Eduard Weyr

O tvoření jistých rovnic, jež lze algebraicky řešiti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 3, 107--126

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122773`

O tvoření jistých rovnic, jež lze algebraicky řešiti.

Napsal

Eduard Weyr.

Pan *Vojtěch Jäger* sděluje na str. 25. a 121. roč. VIII. tohoto časopisu rovnice pátého, sedmého a devátého stupně, závislé na dvou parametrech, jež lze obecně řešiti, a podotýká, že se vše obdobně má i pro rovnice stupňů vyšších. Řešení oné rovnice pátého stupně založeno na identitě

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^5 - 5\,\alpha_1\,\alpha_2\,(\alpha_1 + \alpha_2)^3 + 5\,\alpha_1{}^2\,\alpha_2{}^2\,(\alpha_1 + \alpha_2) \\ - (\alpha_1{}^5 + \alpha_2{}^5) = 0,$$

a řešení rovnice uvedené sedmého stupně na identitě

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^7 - 7\,\alpha_1\,\alpha_2\,(\alpha_1 + \alpha_2)^5 + 14\,\alpha_1{}^2\,\alpha_2{}^2\,(\alpha_1 + \alpha_2)^3 \\ - 7\,\alpha_1{}^3\,\alpha_2{}^3\,(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1{}^7 + \alpha_2{}^7) = 0.$$

Naskýtá se tu otázka, kterak lze methodicky tyto totožnosti vyvinouti, kterak i obdobné totožnosti pro 9., 11. . . ., a vůbec pro libovolný lichý, aneb i sudý stupeň stanoviti? Chci k těmto otázkám odpověděti a zároveň ukázati, jakým způsobem se mohou tyto úvahy generalisovati, t. j. kterak lze sestrojiti vyšší rovnice i jiných tvarů a algebraicky obecně řešitelné. Chtěje býti vzhledem k elementárnímu rázu těchto úvah srozumitelným i začátečníkům, pojednám o věci trochu obšírněji.

I. Buďte α_1 a α_2 kořeny rovnice druhého stupně

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \qquad (\alpha)$$

t. j. předpokládejme, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -p; \quad \alpha_1\,\alpha_2 = q. \qquad (1)$$

Utvořme si rovnici, jejíž kořeny x se rovnají součtu pátých odmocnin z hodnot α_1 a α_2, t. j. rovnici o kořenech $\sqrt[5]{\alpha_1} + \sqrt[5]{\alpha_2}$. Pátá odmocnina libovolného čísla má obecně pět hodnot; kombinujeme-li sečítáním každou z pěti hodnot $\sqrt[5]{\alpha_1}$ s každou hodnotou $\sqrt[5]{\alpha_2}$, obdržíme 25 součtů, t. j. 25 hodnot x. Rovnici dvacátého pátého stupně, jejíž kořeny jsou tyto součty, lze takto utvořiti. Položivše

$$\sqrt[5]{\alpha_1} = \beta_1; \quad \sqrt[5]{\alpha_2} = \beta_2$$

máme

$$\beta_1{}^5 = \alpha_1; \quad \beta_2{}^5 = \alpha_2, \tag{2}$$

a pak

$$x = \beta_1 + \beta_2. \tag{3}$$

Eliminujeme-li z pěti rovnic (1), (2) a (3) hodnoty α_1, α_2, β_1, β_2, tu obdržíme hledanou rovnici dvacátého pátého stupně o neznámé x. Na ten okamžik tuto eliminaci neprovádějme, a uvažme toto:

Z rovnice (2) vychází, že

$$\beta_1 \beta_2 = \sqrt[5]{q}. \tag{4}$$

Ač každé z čísel β_1 a β_2 má pět hodnot, tož součin β_1, β_2 má též jen pět hodnot $\sqrt[5]{q}$. Dejme nyní tomu, že symbolem $\sqrt[5]{q}$ označíme jen jednu z pěti hodnot této odmocniny, jinak libovolně zvolenou; nazveme ji u. Nyní dle rovnice (4) přináleží ku každé z pěti hodnot β_1 č. $\sqrt[5]{\alpha_1}$ jen jediná hodnota β_2, pročež vytknuvše u nemáme více 25, ale jen 5 párů β_1, β_2, a tedy i jen 5 hodnot x. Za u však lze zvoliti 5 hodnot $\sqrt[5]{q}$, čím celkem máme zase 25 hodnot x. Rovnici pátého stupně, jejíž kořeny jsou hodnoty x příslušné zvolenému u, lze pomocí u racionálně sestrojiti. Vskutku, máme nyní na místo (1) a (3) rovnice

$$\beta_1{}^5 + \beta_2{}^5 = -p; \; \beta_1 \beta_2 = \sqrt[5]{q} = u; \; x = \beta_1 + \beta_2. \tag{5}$$

Eliminací hodnot β_1 a β_2 obdržíme hledanou rovnici 5. stupně. Z druhé a z třetí rovnice (5) vychází

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4u}); \; \beta_2 = \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4u});$$

to-li vložíme do první rovnice (5), máme

$$(x + \sqrt{x^2 - 4u})^5 + (x - \sqrt{x^2 - 4u})^5 = -2^5 p.$$

Vymocníme-li na levé straně, tu se členy obsahující liché mocniny hodnoty $\sqrt{x^2 - 4u}$ patrně zruší, ostatní pak se vyskytnou dvakráte, čímž

$$x^5 + \binom{5}{2} x^3 (x^2 - 4u) + \binom{5}{4} x (x^2 - 4u)^2 = -2^4 p,$$

to jest

$$16 x^5 - 80 u x^3 + 80 u^2 x = -2^4 p,$$

čili

$$x^5 - 5ux^3 + 5u^2 x + p = 0. \qquad (6)$$

Toť tedy rovnice, jejíž kořeny jsou dány formulí (3),

$$x = \sqrt[5]{\alpha_1} + \sqrt[5]{\alpha_2}$$

t. j., jelikož α_1 a α_4 jsou kořeny rovnice (α),:

$$x = \sqrt[5]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + \sqrt[5]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \text{ kdež } q = u^5.$$

Jednu z těchto pátých odmocnin lze tu libovolně zvoliti, za druhou ale nutno vzíti onu, jež vyhovuje podmínce

$$\sqrt[5]{\alpha_1} \,.\, \sqrt[5]{\alpha_2} = u.$$

Tím je vytknuto přesně všech pět kořenů rovnice (6) i v tom případu, kdy koefficienty u, p jsou libovolná komplexní čísla.

Položíme-li do rovnice (6) za x, u a p hodnoty $\beta_1 + \beta_2$, resp. β_1, β_2, resp. $-(\beta_1^5 + \beta_2^5)$, máme identitu

$$(\beta_1 + \beta_2)^5 - 5\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)^3 + 5\beta_1^2\beta_2^2(\beta_1 + \beta_2)$$
$$-(\beta_1^5 + \beta_2^5) = 0,$$

na níž založil pan *V. Jäger* řešení rovnice (6).

Nyní bychom mohli snadno stanoviti rovnici 25. stupně, o níž jsme se zmínili. Položíme-li do (6) posloupně za u všech pět hodnot $\sqrt[5]{q}$, obdržíme pět rovnic, jichž součin jest hledaná rovnice stupně 25.

Součin výrazů (6) jest symetrický vůči hodnotám u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, kořenům to rovnice

$$u^5 - q = 0.$$

Pomocí relac z této rovnice přímo vycházejících

$$\Sigma u = 0, \ \Sigma uu = 0, \ \Sigma uuu = 0, \ \Sigma uuuu = 0, \ u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = q$$

mohli bychom všecky symetrické funkce hodnot u nahraditi výrazy z q utvořenými, čímž by rovnice 25. stupně na p a q závislá byla ustanovena.

II. Utvořme si obdobným spůsobem rovnici 7. stupně. Položme zase

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -p; \ \alpha_1\alpha_2 = q; \ x = \sqrt[7]{\alpha_1} + \sqrt[7]{\alpha_2}.$$

Dále

$$\sqrt[7]{\alpha_1} = \beta_1; \ \sqrt[7]{\alpha_2} = \beta_2; \ \beta_1\beta_2 = \sqrt[7]{\alpha_1\alpha_2} = \sqrt[7]{q} = u.$$

Zde značí u zase jistou, jinak libovolně zvolenou hodnotu ze sedmi hodnot $\sqrt[7]{q}$. Máme tedy

$$\beta_1{}^7 + \beta_2{}^7 = -p; \; \beta_1 \beta_2 = u; \; x = \beta_1 + \beta_2. \qquad (7)$$

Eliminujeme-li z těchto tří rovnic β_1 a β_2, obdržíme jako při rovnicích (5):

$$(x + \sqrt{x^2 - 4u})^7 + (x - \sqrt{x^2 - 4u})^7 = -2^7 p,$$

to jest

$$x^7 + \binom{7}{2} x^5 (x^2 - 4u) + \binom{7}{4} x^3 (x^2 - 4u)^2 + \binom{7}{6} x (x^2 - 4u)^3$$
$$= -2^6 p,$$

t. j. seřadíme-li dle mocností x

$$64 x^7 - 448 u x^5 + 896 u^2 x^3 - 448 u^3 x = -2^6 p,$$

aneb krátivše číslem 64

$$x^7 - 7 u x^5 + 14 u^2 x^3 - 7 u^3 x + p = 0. \qquad (8)$$

Kořeny této rovnice jsou dány formulí*)

$$x = \sqrt[7]{\alpha_1} + \sqrt[7]{\alpha_2}$$

to jest

$$x = \sqrt[7]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + \sqrt[7]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \text{ kdež } q = u^7.$$

Zvolivše zde jednu ze sedmi hodnot $\sqrt[7]{\alpha_1}$ nutno vzíti za $\sqrt[7]{\alpha_2}$ onu, která vyhovuje druhé rovnici (7), t. j. podmínce

$$\sqrt[7]{\alpha_1} \sqrt[7]{\alpha_2} = u;$$

tím plyne sedm a jen sedm hodnot x.

Vložíme-li do rovnice (8) za x, u a p resp. hodnoty $\beta_1 + \beta_2$, $\beta_1 \beta_2$ a $-(\alpha_1 + \alpha_2)$, t. j. $-(\beta_1{}^7 + \beta_2{}^7)$. obdržíme

$$(\beta_1 + \beta_2)^7 - 7 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^5 + 14 \beta_1{}^2 \beta_2{}^2 (\beta_1 + \beta_2)^3$$
$$- 7 \beta_1{}^3 \beta_2{}^3 (\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1{}^7 + \beta_2{}^7) = 0;$$

z té vyvozeno v citovaném článku řešení rovnice (8).

III. Proveďme ještě obdobný počet vzhledem k stupni devátému. Položme

$$\beta_1{}^9 + \beta_2{}^9 = -p; \; \beta_1 \beta_2 = \sqrt[9]{q} = u; \; x = \beta_1 + \beta_2.$$

*) V citovaném článku pag. 121 (ročník VIII.) má v 12. řádku zdola býti koefficient $14/p^2$ místo $14p^3$.

Pak eliminací β_1 a β_2 plyne

$$(x+\sqrt{x^2-4u})^9+(x-\sqrt{x^2-4u})^9=-2^9p,$$

to jest

$$x^9+\binom{9}{2}x^7(x^2-4u)+\binom{9}{4}x^5(x^2-4u)^2+\binom{9}{6}x^3(x^2-4u)^3$$
$$+\binom{9}{8}x(x^2-4u)^4=-2^8p,$$

čili $x^9-9ux^7+27u^2x^5-30u^3x^3+9u^4x+p=0.$*) (9)

A všech devět kořenů x podává formule

$$x=\sqrt[9]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}+\sqrt[9]{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}, \text{ kdež } q=u^9.$$

Hodnoty těchto dvou devátých odmocnin nutno tak zvoliti, by jich součin se rovnal u. Vytkněme si k vůli cvičení spřežené hodnoty těchto odmocnin ve třech případech do podrobna.

Buďte předně v rovnici (9) daná čísla p a u reálná, kladná nebo záporná, avšak hovící podmínce

$$\frac{p^2}{4}-u^9\geqq 0.$$

Pak jsou oba čísla $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ reálná a tudíž má devátá odmocnina jich jednu reálnou hodnotu. Označme reálnou devátou odmocninu čísla $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ literou λ, a čísla $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ literou μ. Všech devět hodnot první odmocniny pak zahrnuje výraz

$$V_k=\lambda\left(\cos\frac{2k\pi}{9}+i\sin\frac{2k\pi}{9}\right) \text{ čili } =\lambda e^{\frac{2k\pi i}{9}}$$
$$(k=0,\ 1,\ ..\ 8)$$

a všech devět hodnot druhé odmocniny dáno výrazem

$$W_l=\mu\left(\cos\frac{2l\pi}{9}+i\sin\frac{2l\pi}{9}\right) \text{ čili } \mu e^{\frac{2l\pi i}{9}}.$$
$$(l=0,\ 1,\ ..\ 8)$$

*) Píšíce $-u$ místo u, máme druhý tvar v cit. článku uvedený. Vložením hodnot $\beta_1+\beta_2$; $\beta_1\beta_2$ a $-(\beta_1^9+\beta_2^9)$ místo x, u a p bychom z (9) obdrželi identitu obdobnou oněm, které jsme již vytkli.

Máme tedy

$$x = V_k + W_l,$$

s tou podmínkou, aby

$$V_k W_l = u.$$

Avšak

$$V_k W_l = \lambda \mu e^{\frac{2(k+l)\pi i}{9}} = u e^{\frac{2(k+l)\pi i}{9}}.$$

Musí tedy

$$e^{\frac{2(k+l)\pi i}{9}} = 1,$$

pročež máme těchto devět párů čísel k, l; 0, 0; 1, 8; 2, 7; 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3; 7, 2; 8, 1, a tyto příslušné kořeny x:

$$x_1 = \lambda + \mu,$$

$$x_2 = \lambda e^{\frac{2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{8.2\pi}{9}}, \quad x_6 = \lambda e^{\frac{5.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{4.2\pi i}{9}},$$

$$x_3 = \lambda e^{\frac{2.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{7.2\pi i}{9}}, \quad x_7 = \lambda e^{\frac{6.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{3.2\pi i}{9}},$$

$$x_4 = \lambda e^{\frac{3.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{6.2\pi i}{9}}, \quad x_8 = \lambda e^{\frac{7.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{2.2\pi i}{9}},$$

$$x_5 = \lambda e^{\frac{4.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{5.2\pi i}{9}}, \quad x_9 = \lambda e^{\frac{8.2\pi i}{9}} + \mu e^{\frac{2\pi i}{9}}.$$

V případu, kdy $\frac{p^2}{4} - u^9 = 0$, máme patrně $\lambda = \mu =$ reálné hodnotě $\sqrt[9]{-\frac{p}{2}}$ a vůči

$$e^{\frac{2k\pi i}{9}} + e^{\frac{2l\pi i}{9}} = e^{\frac{2k\pi i}{9}} + e^{\frac{2(l-9)\pi i}{9}} = e^{\frac{2k\pi i}{9}} + e^{\frac{-2k\pi i}{9}}$$

$$= 2\cos\frac{2k\pi}{9}$$

obdržíme tyto hodnoty x

$$x_1 = 2\lambda;\ x_2 = 2\lambda\cos\frac{2\pi}{9};\ x_3 = 2\lambda\cos\frac{2.2\pi}{9};$$

$$x_4 = 2\lambda\cos\frac{3.2\pi}{9};\ x_5 = 2\lambda\cos\frac{4.2\pi}{9};\ x_6 = 2\lambda\cos\frac{5.2\pi}{9};$$

$$x_7 = 2\lambda\cos\frac{6.2\pi}{9};\ x_8 = 2\lambda\cos\frac{7.2\pi}{9};\ x_9 = 2\lambda\cos\frac{8.2\pi}{9}.$$

Za druhé buďte v rovnici (9) p a u reálné hodnoty, hovíc podmínce

$$\frac{p^2}{4} - u^9 < 0,$$

což arci vyžaduje, aby u bylo kladné.

Hodnoty α_1 a α_2 jsou nyní

$$-\frac{p}{2} \pm i\sqrt{u^9 - \frac{p^2}{4}}.$$

Majíce stanoviti jich páté odmocniny, uveďme je dříve na normálný tvar

$$\varrho\,(\cos \pm \varphi + i \sin \pm \varphi).$$

Patrně

$$\varrho^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + u^9 - \frac{p^2}{4} = u^9 = q; \quad \varrho = +\sqrt{u^9};$$

$$\varrho \cos \pm \varphi = -\frac{p}{2}; \quad \varrho \sin \pm \varphi = \pm\sqrt{u^9 - \frac{p^2}{4}};$$

to jest

$$\cos \varphi = -\frac{p}{2\varrho}; \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{u^9 - \frac{p^2}{4}}}{\varrho},$$

čím úhel φ stanoven. Znajíce nyní ϱ a φ, máme

$$x = \sqrt[9]{\varrho\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)} + \sqrt[9]{\varrho\,(\cos - \varphi + i \sin - \varphi)},$$

s tou podmínkou, by součin těchto odmocnin se rovnal u. Tedy

$$x = \sqrt[9]{\varrho}\left(\cos \frac{\varphi + k\,2\pi}{9} + i \sin \frac{\varphi + k\,2\pi}{9}\right)$$
$$+ \sqrt[9]{\varrho}\left(\cos \frac{-\varphi + l\,2\pi}{9} + i \sin \frac{-\varphi + l\,2\pi}{9}\right),$$

a patrně jest nám za k a l opět ony družiny vzíti, které jsme již vytkli. A jelikož $\sqrt[9]{\varrho} = \sqrt[9]{\sqrt{u^9}} = \sqrt{u}$, máme toto řešení

$$x_1 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi}{9}; \quad x_2 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{9};$$

$$x_3 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 2 . 2\pi}{9}; \quad x_4 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 3 . 2\pi}{9};$$

$$x_5 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 4 . 2\pi}{9}; \quad x_6 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 5 . 2\pi}{9};$$

$$x_7 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 6 . 2\pi}{9}; \quad x_8 = 2\sqrt{u} \cos \frac{\varphi + 7 . 2\pi}{9};$$

$$x_9 = 2\sqrt{u}\cos\frac{\varphi + 8.2\pi}{9}.$$

V těchto hodnotách značí $\sqrt{u}$ kladnou odmocninu; vždyť repræsentuje $\sqrt[9]{\varrho}$ a tato hodnota co modul normalného výrazu jest kladná.

Za třetí buď v rovnici dané (9) p číslo reálné, u ale imaginárné, ale takové, že q č. u^9 jest reálné. Značme tedy literou q číslo reálné, $\sqrt[9]{q}$ jeho reálnou devátou odmocninu a položme na př.

$$u = \sqrt[9]{q}.\ e^{\frac{7.2\pi i}{9}}.$$

Předpokládejme dále, že $\frac{p^2}{4} - q$ jest kladné číslo a označme reálné hodnoty odmocnin

$$\sqrt[9]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},\quad \sqrt[9]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

zase literami λ, μ. Položivše pak opět

$$V_k = \lambda e^{\frac{k.2\pi i}{9}};\quad W_l = \mu e^{\frac{l.2\pi i}{9}},$$

máme

$$x = V_k + W_l$$

s tou podmínkou, aby

$$V_k\ W_l = u$$

to jest

$$\lambda \mu e^{\frac{(k+l)2\pi i}{9}} = u.$$

Vvšak $\lambda\mu$ jest reálná devátá odmocnina ze součinu čísel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ t. j. $\sqrt[9]{q}$. Máme tedy podmínku

$$\sqrt[9]{q}.\ e^{\frac{(k+l)2\pi i}{9}} = \sqrt[9]{q}.\ e^{\frac{7.2\pi i}{9}}.$$

To vyžaduje, by se $k + l$ buďto rovnalo 7 aneb se líšilo od 7 násobkem čísla 9; pročež nutno za k, l vzíti družiny: 0, 7; 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1; 7, 0; 8, 8. Kořeny rovnice (9) jsou tedy v našem případu:

$$x_1 = \lambda + \mu\, e^{\frac{7.2\pi i}{9}};\quad x_2 = \lambda\, e^{\frac{2\pi i}{9}} + \mu\, e^{\frac{6.2\pi i}{9}};$$
$$x_3 = \lambda\, e^{\frac{2.2\pi i}{9}} + \mu\, e^{\frac{5.2\pi i}{9}};\quad x_4 = \lambda\, e^{\frac{3.2\pi i}{9}} + \mu\, e^{\frac{4.2\pi i}{6}};$$
$$x_5 = \lambda\, e^{\frac{4.2\pi i}{9}} + \mu\, e^{\frac{3.2\pi i}{9}};\quad x_6 = \lambda\, e^{\frac{5.2\pi i}{9}} + \mu\, e^{\frac{2.2\pi i}{9}};$$
$$x_7 = \lambda\, e^{\frac{6.2\pi ,}{9}} + \mu\, e^{\frac{2\pi i}{9}};\quad x_8 = \lambda\, e^{\frac{7.2\pi i}{9}} + \mu;$$
$$x_9 = (\lambda + \mu)\, e^{\frac{8.2\pi i}{9}}.$$

IV. Dosud jsme vykonali počet při stupních 5, 7 a 9; učiňme nyní totéž pro libovolný stupeň m, *nechť si je lichý nebo sudý.* Tedy položme

$$\beta_1^m + \beta_2^m = -p;\ \beta_1\beta_2 = \sqrt[m]{q} = u;\ x = \beta_1 + \beta_2. \quad (10)$$

Eliminujeme-li β_1 a β_2, obdržíme hledanou rovnici ve tvaru

$$(x + \sqrt{x^2 - 4u})^m + (x - \sqrt{x^2 - 4u})^m = -2^m p, \quad (11)$$

to jest

$$x^m + \binom{m}{2} x^{m-2}(x^2 - 4u) + \binom{m}{4} x^{m-4}(x^2 - 4u)^2 + .. = -2^{m-1} p.$$

Přímé seřadění této rovnice dle mocnin neznámé x by bylo pracné; rychleji a elegantně dojdeme cíle, užijeme-li následujícího obratu. Položme, vracejíce se k rovnici (11), majíce na okamžik na zřeteli jen kladné hodnoty u a reálné x — a to k vůli seřadění úplně stačí —

$$4u = \varrho^2;\ x = \varrho \cos\varphi,$$

tedy

$$x + \sqrt{x^2 - 4u} = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\, e^{i\varphi},$$
$$x - \sqrt{x^2 - 4u} = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \varrho\, e^{-i\varphi}.$$

Tím rovnice (11) dá

$$(\varrho\, e^{i\varphi})^m + (\varrho\, e^{-i\varphi})^m = -2^m p,$$

to jest

$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) + \varrho^m(\cos m\varphi - i\sin m\varphi) = -2^m p,$$

to jest

$$\varrho^m \cos m\varphi = -2^{m-1} p.$$

Vyjádříme-li známou formulí*) $\cos m\varphi$ pomocí $\cos\varphi$, máme

---

*) V. n. př. *Serret:* Cours d'Algèbre supérieure, 4. vydání t. I.

$$\varrho^m \Big[2^{m-1} \cos^m \varphi - 2^{m-3}\, m \cos^{m-2} \varphi + 2^{m-5} \frac{m(m-3)}{1\,.\,2} \cos^{m-4} \varphi + \ldots$$

$$+ (-1)^g\, 2^{m-2g-1} \frac{m(m-g-1)(m-g-2)\ldots(m-2g+1)}{1\,.\,2\ldots g}$$

$$\cos^{m-2g} \varphi + \ldots\Big] = -2^{m-1} p.$$

Avšak $\varrho^2 = 4u = 2^2 u$, pročež obecný člen v levo bude

$$(-1)^g\, 2^{m-2g-1} \frac{m(m-g-1)\ldots(m-2g+1)}{1\,.\,2\ldots g}\,.\, \varrho^{2g}.\ \varrho^{m-2g} \cos^{m-2g} \varphi$$

$$= (-1)^g\, 2^{m-1} \frac{m(m-g-1)\ldots(m-2g+1)}{1\,.\,2\ldots g}\, u^g\, \varrho^{m-2g} \cos^{m-2g} \varphi$$

$$= (-1)^g\, 2^{m-1} \frac{m(m-g-1)\ldots(m-2g+1)}{1\,.\,2\ldots g}\, u^g\, x^{m-2g}.$$

Tím poslední rovnice zní — zkrátivše ji číslem 2^{m-1} —

$$x^m - m u x^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2} u^2 x^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3} u^3 x^{m-6} + \ldots$$

$$+ (-1)^g \frac{m(m-g-1)\ldots(m-2g+1)}{1\,.\,2\ldots g} u^g x^{m-2g} + \ldots$$

$$+ p = 0. \qquad (12)$$

Kořeny této rovnice jsou dány formulemi (10), z nichž patrno, že β_1^m a β_2^m jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0,$$

a že tedy x rovnající se $\beta_1 + \beta_2$ má hodnotu

$$x = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} + \sqrt[m]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \text{ kdež } q = u^m.$$

V této formuli nutno opět vzíti takové m-té odmocniny, by jich součin se rovnal u.

Každá symetrická celistvá funkce dvou hodnot β_1 a β_2 se dá vyjádřiti co celistvá funkce součtu $\beta_1 + \beta_2$ a součinu $\beta_1 \beta_2$, nejjednodušších to funkcí souměrných. Vskutku taková funkce se skládá ze členů tvaru

$$C(\beta_1^{r_1} \beta_2^{r_2} + \beta_2^{r_1} \beta_1^{r_2})$$

to jest

$$C\beta_1^{r_1} \beta_2^{r_1} (\beta_2^{r_2 - r_1} + \beta_1^{r_2 - r_1}),$$

a jde tedy o to, abychom vyjádřili součet $\beta_1^m + \beta_2^m$ pomocí součtu a součinu hodnot β_1 a β_2. A tuto úlohu řeší formule (12), vložíme-li do ní za x, u a p hodnoty z rovnic (10). Máme

$$\beta_1{}^m + \beta_2{}^m = (\beta_1 + \beta_2)^m - m\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}\beta_1{}^2\beta_2{}^2(\beta_1+\beta_2)^{m-4} - \ldots$$

V. Co příklad rovnice stupně sudého vytkněme si případ $m = 10$.

Tu rovnice (12) zní

$$x^{10} - 10ux^8 + 35u^2x^6 - 50u^3x^4 + 25u^4x^2 - 2u^5 + p = 0. \quad (13)$$

Učinivše $x^2 = y$ máme rovnici

$$y^5 - 10uy^4 + 35u^2y^3 - 50u^3y^2 + 25u^4y - 2u^5 + p = 0; \quad (14)$$

a kořeny její jsou

$$y = \left(\sqrt[10]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - u^{10}}} + \sqrt[10]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - u^{10}}}\right)^2.$$

Desáté kořeny nutno zde tak voliti, by jich součin se rovnal u. Buďte na př. u a p reálné hodnoty, a $\frac{p^2}{4} - u^{10}$ hodnota kladná. Pak jsou obě hodnoty

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - u^{10}}$$

kladné aneb obě záporné; a sice jsou obě kladné, je-li p záporné, a obě záporné kdy p jest kladné. Předpokládejme třeba p kladné; pak jsou čísla

$$\alpha_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - u^{10}}, \quad \alpha_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - u^{10}}$$

záporná, a tedy $-\alpha_1$ a $-\alpha_2$ jsou kladná. V normálných tvarech jsou:

$$\alpha_1 = -\alpha_1(\cos\pi + i\sin\pi), \quad \alpha_2 = -\alpha_2(\cos\pi + i\sin\pi),$$

a tudíž

$$\sqrt[10]{\alpha_1} = \sqrt[10]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{\pi + k2\pi}{10} + i\sin\frac{\pi + k2\pi}{10}\right), \quad (k = 0, 1, .. 9)$$

$$\sqrt[10]{\alpha_2} = \sqrt[10]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{\pi + l2\pi}{10} + i\sin\frac{\pi + l2\pi}{10}\right). \quad (l = 0, 1, .. 9)$$

Zde značí $\sqrt[10]{-\alpha_1}$ a $\sqrt[10]{-\alpha_2}$ co moduly hodnoty kladné. Součin těchto modulů jest patrně kladná odmocnina $\sqrt[10]{u^{10}}$ t. j. $+u$ je-li u kladné, ale $-u$ je-li u záporné. Máme tedy

$$\sqrt[10]{\alpha_1}\,\sqrt[10]{\alpha_2} = \pm u \left(\cos\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} + i \sin\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10}\right)$$

a tato hodnota má se rovnati u.

Jeli tedy 1) u kladné, musí

$$\cos\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} + i \sin\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} = 1,$$

to jest $1 + k + l$ musí vymizeti aneb se rovnati násobku 10. Tomu vyhovuje těchto deset družin k, l: 0, 9; 1, 8; 2, 7; 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3; 7, 2; 8, 1; 9, 0 a tu podává tedy formule

$$x = \sqrt[10]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{10} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{10}\right)$$
$$+ \sqrt[10]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{\pi + 2l\pi}{10} + i \sin\frac{\pi + 2l\pi}{10}\right)$$

kořeny rovnice (13). Kořeny y rovnice (14) jsou pak jich čtverce, t. j.

$$y = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{(2k+1)2\pi}{10} + i \sin\frac{(2k+1)2\pi}{10}\right)$$
$$+ \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{(2l+1)2\pi}{10} + i \sin\frac{(2l+1)2\pi}{10}\right) + 2u.$$

Čísla $2k+1$ a $2l+1$ jsou tu resp. 1, 19; 3, 17; 5, 15; ...; 19, 1 a poněvadž násobky 10 můžeme zanedbati, máme jen těchto pět hodnot y:

$$y_1 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{2\pi}{10} + i \sin\frac{2\pi}{10}\right) + \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{9 \cdot 2\pi}{10}\right.$$
$$\left. + i \sin\frac{9 \cdot 2\pi}{10}\right) + 2u,$$

$$y_2 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{3 \cdot 2\pi}{10} + i \sin\frac{3 \cdot 2\pi}{10}\right) + \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{7 \cdot 2\pi}{10}\right.$$
$$\left. + i \sin\frac{7 \cdot 2\pi}{10}\right) + 2u,$$

$$y_3 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{5 \cdot 2\pi}{10} + i \sin\frac{5 \cdot 2\pi}{10}\right) + \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{5 \cdot 2\pi}{10}\right.$$
$$\left. + i \sin\frac{5 \cdot 2\pi}{10}\right) + 2u,$$

$$y_4 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{7.2\pi}{10} + i\sin\frac{7.2\pi}{10}\right) + \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{3.2\pi}{10}\right.$$
$$\left.+ i\sin\frac{3.2\pi}{10}\right) + 2u,$$
$$y_5 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\left(\cos\frac{9.2\pi}{10} + i\sin\frac{9.2\pi}{10}\right) + \sqrt[5]{-\alpha_2}\left(\cos\frac{2\pi}{10}\right.$$
$$\left.+ i\sin\frac{2\pi}{10}\right) + 2u,$$

co kořeny rovnice (14) v případu vyznačeném; $\sqrt[5]{-\alpha_1}$ a $\sqrt[5]{-\alpha_2}$ jsou co moduly reálná a kladná čísla.

Je-li 2) u záporné, musí

$$\cos\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} + i\sin\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} = -1$$

to jest

$$\frac{2\pi + (k+l)2\pi}{10} = \pi + N2\pi,$$

kdež N značí celistvé číslo. Tedy

$$1 + k + l = 5 + 10N \text{ t. j. } k + l = 4 + 10N.$$

Musí míti tudíž $k+l$ buď hodnotu 4 aneb 14. Tím máme pro čísla k, l tyto družiny: 0, 4; 1, 3; 2, 2; 3, 1; 4, 0; 5, 9; 6, 8; 7, 7; 8, 6; 9, 5, a pro kořeny x rovnice (13) máme pak deset hodnot

$$x = \sqrt[10]{-\alpha_1}\, e^{\frac{k2\pi i}{10}} + \sqrt[10]{-\alpha_2}\, e^{\frac{l2\pi i}{10}}.$$

Dále

$$y = x^2 = \sqrt[5]{-\alpha_1}\, e^{\frac{k2.2\pi i}{10}} + \sqrt[5]{-\alpha_2}\, e^{\frac{2l.2\pi i}{10}} + 2u.$$

Deset družin k, l podává jen pět různých hodnot y, poněvadž v číslech $2k$ a $2l$ lze 10 zanedbati. Stačí tedy za $2k$ a $2l$ položiti posloupně 0, 8; 2, 6; 4, 4; 6, 2; 8, 0, a obdržíme všecky kořeny rovnice (14).

VI. Již jsme podotkli, že dosavadní výsledky spočívají v podstatě na té okolnosti, že $\beta_1^m + \beta_2^m$ lze vyjádřiti co celistvou racionálnou funkci hodnot $\beta_1 + \beta_2$ a $\beta_1\beta_2$. Vyjdeme-li z obecnějšího výrazu $\beta_1^m\beta_2^n + \beta_1^n\beta_2^m$ $(m > n)$, obdržíme v podstatě tytéž výsledky. Položme tedy zase

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -p; \quad \alpha_1 \alpha_2 = q;$$
$$\beta_1^m \beta_2^n = \alpha_1; \quad \beta_1^n \beta_2^m = \alpha_2; \quad x = \beta_1 + \beta_2.$$

Na hodnotách p a q závisí α_1, α_2, na těchto β_1, β_2 a konečně na těch x. Eliminací hodnot α_1, α_2, β_1, β_2 plyne rovnice pro x. Z rovnice

$$\beta_1^{m+n} \beta_2^{m+n} = \alpha_1 \alpha_2 = q$$

vychází

$$\beta_1 \beta_2 = \sqrt[\mu]{q},$$

položivše $m + n = \mu$. Zvolme z μ hodnot této odmocniny opět jednu, zvouce ji u a podrobme hodnoty β_1 a β_2 té podmínce, by

$$\beta_1 \beta_2 = u.$$

Pak máme rovnice

$$\beta_1^m \beta_2^n + \beta_1^n \beta_2^m = -p; \quad \beta_1 \beta_2 = u; \quad x = \beta_1 + \beta_2 \qquad (15)$$

a z nich vychází eliminací β_1 a β_2 hledaná rovnice pro x. První z těchto rovnic můžeme psáti

$$\beta_1^n \beta_2^n (\beta_1^{m-n} + \beta_2^{m-n}) = -p \quad \text{t. j.} \quad \beta_1^{m-n} \beta_2^{m-n} = -\frac{p}{u^n}.$$

Nyní mají rovnice (15) týž tvar, jako rovnice (10), a jest tedy eliminační výsledek — položivše

$$m - n = \nu; \quad \frac{p}{u^n} = p'$$

tento:

$$x^\nu - \nu u x^{\nu-2} + \frac{\nu(\nu-3)}{1.2} u^2 x^{\nu-4} - \frac{\nu(\nu-4)(\nu-5)}{1.2.3} u^3 x^{\nu-6} + \ldots$$
$$+ p' = 0.$$

Tedy rovnice již odvozená.

VII. Dosud jsme uvažovali rovnice, jejichž kořeny jsme utvořily z kořenů α_1 a α_2 rovnice druhého stupně. Buďte nyní α_1, α_2, α_3 kořeny rovnice kubické

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0, \qquad (16)$$

t. j. položme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = q,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -r.$$

Utvořme nyní rovnici, jejíž kořeny x jsou dány formulí

$$x = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}. \qquad (17)$$

Učiňme

$$\alpha_1 = \beta_1{}^2; \quad \alpha_2 = \beta_2{}^2; \quad \alpha_3 = \beta_3{}^2.$$

Pak máme

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = x; \quad \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2 = -p;$$
$$\beta_1{}^2\beta_2{}^2 + \beta_1{}^2\beta_3{}^2 + \beta_2{}^2\beta_3{}^2 = q; \quad \beta_1{}^2\beta_2{}^2\beta_3{}^2 = -r.$$

Eliminací hodnot β_1, β_2, β_3 z těchto čtyr rovnic bychom obdrželi rovnici pro x a sice stupně osmého. Položivše však

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 = u, \tag{18}$$

kdež u značí jednu jen z obou hodnot $\sqrt{-r}$, náleží ku každé družině β_1 a β_2 patrně jen jedna z obou hodnot $\sqrt{\alpha_3}$, čímž se objeví jen čtyry hodnoty x. A vskutku eliminujeme-li β_1, β_2, β_3 z rovnic

$$\Sigma\beta = x; \quad \Sigma\beta^2 = -p; \quad \Sigma\beta^2\beta^2 = q; \quad \beta_1\beta_2\beta_3 = u \tag{19}$$

obdržíme jen bikvadratickou rovnici pro x. Máme již dvě z nejjednodušších symetrických funkcí hodnot β, t. $\Sigma\beta$ a $\beta_1\beta_2\beta_3$; vyjadřeme si ještě $\Sigma\beta\beta$. Patrně mocněním

$$(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3)^2 = \Sigma\beta^2\beta^2 + 2\beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

to jest

$$(\Sigma\beta\beta)^2 = q + 2ux, \quad \Sigma\beta\beta = \sqrt{q + 2ux}.$$

Nyní známým spůsobem vyjadřeme složitější symetrickou funkci $\Sigma\beta^2$ pomocí oněch tří jednoduchých; máme

$$\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2 = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 - 2\Sigma\beta\beta$$

t. j.

$$-p = x^2 - 2\sqrt{q + 2ux}$$

č.

$$(x^2 + p)^2 - 4(q + 2ux) = 0. \tag{20}$$

Toť hledaná rovnice; její kořeny jsou dány formulí

$$x = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}, \tag{17}$$

a α_1, α_2, α_3 značí tu kořeny rovnice kubické (16):

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0. \tag{16}$$

Zároveň dlužno vzíti takové hodnoty odmocnin $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_2}$ $\sqrt{\alpha_3}$, jež vyhovují podmínce (18) t.

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\alpha_3} = u. \tag{18}$$

Rovnice (20) není arci obecnou rovnicí čtvrtého stupně; lze však tuto snadno převésti na tvar (20), *čímž získáno obecné* *řešení rovnic bikvadratických.* Vskutku, odstranivše z obecné bikvadratické rovnice známým způsobem člen kubický, máme

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (21)$$

Rovnice ta se stotožní s (20), položíme-li ji do tvaru

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + bx + c - \frac{a^2}{4} = 0$$

a učiníme-li

$$\frac{a}{2} = p;\ b = -8u;\ c - \frac{a^2}{4} = -4q,$$

t. j.

$$p = \frac{a}{2};\ u = -\frac{b}{8};\ q = \frac{a^2 - 4c}{16}.$$

Kořeny rovnice (21) jsou tudíž

$$x = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3},$$

značí-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kořeny kubické resolventy

$$\alpha^3 + \frac{a}{2}\alpha^2 + \frac{a^2 - 4c}{16}\alpha - \frac{b^2}{64} = 0.$$

Učinivše $4\alpha = \lambda$, máme resolventu *)

$$\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (a^2 - 4c)\lambda - b^2 = 0$$

a

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3}).$$

Odmocniny nutno vzíti s takovým znamením, by jich součin byl u to jest

$$-\frac{b}{8}.$$

VIII. Co další příklad utvořme rovnici, jejíž kořeny x jsou dány formulí

$$x = \sqrt[3]{\alpha_1} + \sqrt[3]{\alpha_2} + \sqrt[3]{\alpha_3}, \qquad (22)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ značí kořeny kubické rovnice

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0.$$

Každá z oněch tří odmocnin má tři hodnoty, pročež x má 27 hodnot; téhož stupně by byla rovnice vycházející pro x eliminací hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ z rovnic

*) Toť v podstatě *Eulerovo* řešení bikvadratických rovnic.

$$x = \sqrt[3]{\alpha_1} + \sqrt[3]{\alpha_2} + \sqrt[3]{\alpha_3}\,; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p;$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = q; \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -r;$$

aneb eliminací hodnot β_1, β_2, β_3 z rovnic

$$x = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \quad \beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3 = -p;$$

$$\beta_1^3 \beta_2^3 + \beta_1^3 \beta_3^3 + \beta_2^3 \beta_3^3 = q; \quad \beta_1^3 \beta_2^3 \beta_3^3 = -r.$$

Z poslední rovnice jde

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 = \sqrt[3]{-r} = u. \tag{23}$$

Zvolíme-li *jednu* ze tří odmocnin $\sqrt[3]{-r}$, značíce ji u, máme pak ku dvěma hodnotám β_1 a β_2 zcela určitou, jedinou hodnotu β_3; a poněvadž za $\beta_1 = \sqrt[3]{\alpha_1}$, $\beta_2 = \sqrt[3]{\alpha_2}$ obdržíme po třech hodnotách, máme tu jen 9 hodnot x. A skutečně obdržíme eliminaci hodnot β_1, β_2 a β_3 z rovnic

$$\Sigma\beta_1 = x; \quad \Sigma\beta_1^3 = -p; \quad \Sigma\beta_1^3\beta_2^3 = q; \quad \beta_1\beta_2\beta_3 = u \tag{24}$$

pro x rovnici stupně devátého. Eliminací provedeme, vyjádříme-li si $\Sigma\beta_1^3$ a $\Sigma\beta_1^3\beta_2^3$ pomocí x, u a $y = \Sigma\beta_1\beta_2$ a eliminujeme-li pak y z obou výrazů; snadno nalezneme, že

$$\Sigma\beta_1^3 = (\Sigma\beta_1)^3 - 3\,\Sigma\beta_1^2\beta_2 - 6\,\beta_1\beta_2\beta_3;$$

avšak

$$\Sigma\beta_1^2\beta_2 = (\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 3\,\beta_1\beta_2\beta_3$$
$$= yx - 3u.$$

Tudíž $\quad \Sigma\beta_1^3 = x^3 - 3(xy - 3u) - 6u$

t. j.

$$-p = x^3 - 3xy + 3u. \tag{25}$$

Dále

$$\Sigma\beta_1^3\beta_2^3 = (\Sigma\beta_1\beta_2)^3 - 3\,\Sigma\beta_1^3\beta_2^3\beta_3 - 6\,\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2$$
$$= (\Sigma\beta_1\beta_2)^3 - 3\,\beta_1\beta_2\beta_3\,\Sigma\beta_1^2\beta_2 - 6\,\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2$$

t. j. $\quad q = y^3 - 3u(xy - 3u) - 6u^2$

t. j.

$$q = y^3 - 3uxy + 3u^2. \tag{26}$$

Eliminací y z rovnic (25) a (26) máme konečně rovnici devátého stupně

$$(x^3 + 3u + p)^3 - 27x^3[u(x^3 + 3u + p) + 3u^2 - q] = 0,$$

jejíž kořeny jsou dány formulí (22), v níž $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ značí kořeny rovnice

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - u^3 = 0,$$

v níž odmocniny $\sqrt[3]{\alpha}$ nutno tak stanoviti, by jich součin se rovnal u. Nalezená rovnice se substitucí $x^3 = \xi$ převede na rovnici kubickou, pročež je poněkud jen forma zajímava, do níž jsme kořeny její upravili.

IX. Pokračovati naznačenou cestou není nikterak obtížné. Položíme n. př.

$$x = \sqrt[4]{\alpha_1} + \sqrt[4]{\alpha_2} + \sqrt[4]{\alpha_3}, \tag{27}$$

t. j. položme

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = x; \quad \beta_1{}^4 + \beta_2{}^4 + \beta_3{}^4 = -p;$$
$$\beta_1{}^4\beta_2{}^4 + \beta_1{}^4\beta_3{}^4 + \beta_2{}^4\beta_3{}^4 = q; \quad \beta_1\beta_2\beta_3 = u,$$

kde u značí určitou hodnotu odmocniny $\sqrt[4]{-r}$. Učinivše zase

$$\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = y,$$

nalezáme snadno*)

$$-p = 2y^2 - 4x^2y + x^4 + 4ux,$$
$$q = y^4 - 4uxy^2 + 4u^2y + 2u^2x^2.$$

Eliminací y z obou těchto rovnic bychom obdrželi pro x rovnici 16. stupně, jejíž kořeny podává formule (27), v níž α_1, α_2, α_3 značí zase kořeny rovnice

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - u^4 = 0;$$

mimo to nutno v (27) odmocninám dáti hodnoty, jichž součin jest u. Značí-li β_1, β_2, β_3 tři hodnoty těchto odmocnin vyhovující této podmínce, jest jeden kořen x

$$x_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

a jelikož $\sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$ lze snadno napsat ostatních 15 kořenů x.

Tři budou tvaru

$$\beta_1 - \beta_2 - \beta_3,$$

šest tvaru

$$\beta_1 + i\beta_2 - i\beta_3,$$

tři tvaru

$$-\beta_1 + i\beta_2 + i\beta_3,$$

*) Tabulky počítané *Meyer-Hirschem* a doplněné *Cayley-em*, vyjádřující symetrické funkce vyšší pomocí základních symetrických funkcí $\Sigma\beta$, $\Sigma\beta\beta$, $\Sigma\beta\beta\beta$, atd. nalezne čtenář ve *Faà de Bruno*: Théorie des formes binaires, na konci díla, aneb ve *Fiedler:* D. Elem. d. neueren Geometrie etc., pag. 73 seqq.

a tři tvaru

$$-\beta_1 - i\beta_2 - i\beta_3.$$

Lze rovnici pro x substitucí $x^4 = \xi$ redukovati na bikvadratickou rovnici, t. j. má x^4 jen čtyry hodnoty? Odpověď zůstavujeme čtenáři, jehož věc zajímá.

X. Učiňme dále

$$x = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} + \sqrt{\alpha_3 \alpha_1} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \tag{28}$$

kde α_1, α_2, α_3 nechť zase značí kořeny rovnice

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r = 0.$$

Položivše

$$\sqrt{\alpha_2 \alpha_3} = \beta_1; \quad \sqrt{\alpha_3 \alpha_1} = \beta_2; \quad \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} = \beta_3,$$

bude

$$x = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = q;$$

$$\beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_3^2 + \beta_2^2\beta_3^2 = pr; \quad \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 = r^2.$$

Položme $\pm r = u$ a nahraďme poslední rovnici touto

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = u.$$

Pak x patrně má jen 4 hodnoty a příslušnou bikvadratickou rovnici obdržíme eliminací β_1, β_2, β_3. Učinivše zase $\Sigma\beta_1\beta_2 = y$, snadno nalezneme

$$\Sigma\beta_1^2 = (\Sigma\beta_1)^2 - 2\Sigma\beta_1\beta_2, \quad \text{t. j.} \quad q = x^2 - 2y;$$

$$\Sigma\beta_1^2\beta_2^2 = (\Sigma\beta_1\beta_2)^2 - 2\beta_1\beta_2\beta_3\Sigma\beta_1, \quad \text{t. j.} \quad pr = y^2 - 2ux.$$

Eliminací y obdržíme

$$x^4 - 2qx^2 - 8ux + q^2 - 4pr = 0. \tag{29}$$

Tím máme opět řešení obecných rovnic 4. stupně:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{30}$$

Nutno položiti, kladouce $u = +r$,

$$-2q = a; \quad -8r = b; \quad q^2 - 4pr = c$$

to jest

$$q = -\frac{a}{2}; \quad r = -\frac{b}{8}; \quad p = \frac{4c - a^2}{2b}.$$

Jsou tedy kořeny rovnice (30) dány formulí

$$x = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} + \sqrt{\alpha_3 \alpha_1} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \tag{31}$$

kdež α_1, α_2, α_3 jsou kořeny kubické resolventy

$$\alpha^3 + \frac{4c - a^2}{2b}\alpha^2 - \frac{a}{2}\alpha - \frac{b}{8} = 0. \tag{32}$$

Odmocniny ve výrazu pro x nutno vzíti takovým znamením, by jich součin se rovnal u t. j. $-\dfrac{b}{8}$.

Vezmeme-li však $u = -r$ máme
$$-2q = a;\quad 8r = b;\quad q^2 - 4pr = c,$$
to jest
$$q = -\frac{a}{2};\quad r = \frac{b}{8};\quad p = \frac{a^2 - 4c}{2b},$$
t. j. resolventa zní
$$\alpha^3 + \frac{a^2 - 4c}{2b}\alpha^2 - \frac{a}{2}\alpha + \frac{b}{8} = 0. \tag{33}$$
V řešení (31) nutno vzíti nyní odmocniny s takovým znamením, by jich součin se rovnal u, t. j. opět $= -\frac{b}{8}$. To v podstatě táž věc jako dříve, neboť kořeny této resolventy se různí od oněch jen znamením, a tedy jsou jich součiny $\alpha_2\,\alpha_3$, $\alpha_3\,\alpha_1$ a $\alpha_1\,\alpha_2$ tytéž.

Mějme na př. rovnici
$$x^4 - 18x^2 - 32x - 15 = 0.$$
Resolventa (33) zní nyní
$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 4 = 0,$$
a kořeny její jsou
$$\alpha_1 = 1;\quad \alpha_2 = 1;\quad \alpha_3 = 4.$$
Máme tedy
$$x = \sqrt{1\,.\,4} + \sqrt{4\,.\,1} + \sqrt{1\,.\,1},$$
a nutno vzíti odmocniny s takovým znamením, by jich součin
$$= -\frac{b}{8} = -\frac{-32}{8} = 4.$$
Tudíž máme
$$x_1 = 2 + 2 + 1;\quad x_2 = 2 - 2 - 1;\quad x_3 = -2 + 2 - 1;$$
$$x_4 = -2 - 2 + 1,$$
t. j. kořeny dané rovnice jsou
$$5;\ -1;\ -1;\ -3.$$
Skutečně máme
$$x^4 - 18x^2 - 32x - 15 = (x - 5)(x + 3)(x + 1)^2.$$
Podotýkaje, že bychom mohli zcela obdobně utvořiti rovnici, jejíž kořeny jsou irracionalně a souměrně tvořeny z kořenů α_1, α_2, α_3, α_4 bikvadratické rovnice, aneb i rovnice řešitelné vyššího stupně, končím o těchto věcech. *)

---

*) Historická stránka tohoto předmětu vyložena jest ve spisu dříve oznáměném *Günther* „Hyperbelfunktionen.“