Václav Řehořovský

Příspěvek k odvozování nekonečných řad a stanovení jich součtů pomocí omezených integralů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 3, 134--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122771

dějším čase duchu Brahmeguptovu, a že geometrie nalézala se u Indů již v úpadku.

Tak již Bhaskara nevyslovuje *třicet devět*, nýbrž po latinském způsobu *čtyřicet méně jedné*, ač Brahmegupta ještě správně tak činí.

O stavu vědy ani za času Brahmegupty nemůžeme správně souditi, zdaž byla všeobecně na tom stupni, na jakém se nalézají díla Brahmeguptova; neboť nám chybí z těch dob všecky jiné prameny. Kdož ví, nepodávají-li oba spisy Brahmeguptovy jenom zlomky vědomostí, jaké měli Indové ve starém věku, a které on jenom zachytil, aby je před zapomenutím zachránil.

Učený Hollanďan *Stévin* [1]) domníval se, že byl kdysi *učený věk*, ve kterém měli lidé podivuhodnou známosť věd, a který předcházel věku řeckému, z něhož Řekové měli již jen slabé upomínky vědecké. Kdyby býval znal uvedený chod vědy u Indů, byl by býval zajisté jen tím více o svém náhledu přesvědčen.

Příspěvek k odvozování nekonečných řad a stanovení jich součtů pomocí omezených integralů.

Podává

V. Řehořovský v Praze.

Omezených integralů s výhodou užívá se k odvozování nekonečných řad a často i ku stanovení jich součtu; takřka z každé řady nekonečné, která neobsahuje samá čísla, ale i obecné veličiny, možno odvoditi jednu aneb celou řadu nových nekonečných řad; aby však i součty těchto řad udány býti mohly, nutno předně, aby znám byl součet řady původní, z které vycházíme, za druhé pak, abychom byli v stavu objevující se v počtu omezený integral v konečném tvaru vyčísliti. Že tu jak řada původní tak i řady odvozené vesměs konvergentní býti musí, rozumí se samo sebou, an jinak o jich součtech nemůže býti řeči; podotýkáme pouze, že meze konvergence řad za

[1]) Oeuvres mathématiques de Simon Stévin, Leyde, 1634.

integračním znamením stojících nesmí ležeti mimo meze integrační. Postup při užívání methody této objasňují následující příklady.

I.

1. Vzorec

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx)^{m+1}} = \frac{1}{m a^m b} \tag{1}$$

platí pro kladné hodnoty m a pro takové hodnoty a i b, jež jsou různé od nully a při tom současně obě kladné neb záporné; neboť kdyby veličiny ty byly různého znamení, stávalo by v mezích 0 a ∞ jedné hodnoty, totiž $x = -\frac{a}{b}$, pro kterou by funkce za integračním znamením byla přetržitou.

Derivujíce (1) α kráte dle b, obdržíme nový vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{(x+bx)^{m+\alpha+1}} = \frac{(m-1)!\,\alpha!}{(m+\alpha)!\,a^m b^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

kdež zavedeno známé označení

$$p! = 1.2.3\ldots p, \quad 0! = 1.$$

Vložíme-li do (2) postupně $m = 1, 2, 3, \ldots, m$, obdržíme soustavu vzorců:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{(a+bx)^{\alpha+2}} &= \frac{\alpha!}{b^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)!\,a}, \\
\int_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{(a+bx)^{\alpha+3}} &= \frac{\alpha!}{b^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{(\alpha+2)!\,a^2}. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\int_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{(a+bx)^{\alpha+m+1}} &= \frac{\alpha!}{b^{\alpha+1}} \cdot \frac{(m-1)!}{(\alpha+m)!\,a^m}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

3. Sečtením vzorců těch podává se

$$\int_0^\infty \left[1 + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{(a+bx)^2} + \ldots + \frac{1!}{(a+bx)^{m-1}}\right] \frac{x^\alpha\, dx}{(a+bx)^{\alpha+2}}$$

$$= \frac{\alpha!}{a\, b^{\alpha+1}} \left[\frac{1}{(\alpha+1)!} + \frac{1!}{(\alpha+2)!\,a} + \frac{2!}{(\alpha+3)!\,a^2} + \ldots + \frac{(m-1)!}{(\alpha+m)!\,a^{m-1}}\right].$$

Nastává otázka, za jakých podmínek jsme oprávněni pokračovati s m až do nekonečna. V závorce za integračním znamením stojí geometrická řada*), jejíž podíl jest $\frac{1}{a+bx}$; poněvadž x zůstává stále v mezích 0 a ∞, mění se hodnota zlomku v mezích $\frac{1}{a}$ a 0. Aby tedy řada tato byla vždy konvergentní, jest pouze třeba, aby a bylo větší než 1; a nesmí tudíž býti obsaženo v mezích 0 a 1, tyto meze v to počítajíc.

Řada na pravé straně rovnice jest též konvergentní pro všechny hodnoty a větší než 1; neboť jest

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{m}{\alpha+m+1}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{\alpha+1}{m}+1}\cdot\frac{1}{a},$$

a tedy pro $\lim m = \infty$

$$\lim \frac{u^{m+1}}{u^m} = \frac{1}{a},$$

t. j. menší než 1 pro a větší než 1.

Předpokládajíce tedy a větší než 1, můžeme v poslední rovnici položiti $\lim m = \infty$ a obdržíme

$$\int_0^\infty \left[1+\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{(a+bx)^2}+\ldots \text{do nek.}\right]\frac{x^\alpha dx}{(a+bx)^{\alpha+2}}$$

$$=\frac{\alpha!}{ab^{\alpha+1}}\left[\frac{1}{(\alpha+1)!}+\frac{1!}{(\alpha+2)!\,a}+\frac{2!}{(\alpha+3)!\,a^2}+\ldots \text{do nek.}\right].$$

Řadu na levé straně můžeme sečísti, jest

$$1+\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{(a+bx)^2}+\ldots \text{do nek.} = \frac{1}{1-\frac{1}{a+bx}} = \frac{a+bx}{a+bx-1},$$

což dosazeno byvši podává vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(a+bx-1)(a+bx)^{\alpha+1}} =$$

$$\frac{\alpha!}{ab^{\alpha+1}}\left[\frac{1!}{(\alpha+1)!}+\frac{1}{(\alpha+2)!\,a}+\frac{2!}{(\alpha+3)!\,a^2}+\ldots \text{d. nek.}\right] \quad (4)$$

*) Toť tedy původní řada, z které zde vycházíme.

Na levé straně stojící integral algebraického racionalného differencialu jsme s to vždy vyčísliti, takže vzorcem tímto podán jest součtový vzorec řady v pravo stojící; jest

$$\frac{1}{(\alpha+1)!}+\frac{1!}{(\alpha+2)!\,a}+\frac{2!}{(\alpha+3)!\,a^2}+\dots \text{d. nek.}$$
$$=\frac{a\,b^{\alpha+1}}{\alpha!}\int\limits_0^\infty\frac{x^\alpha\,dx}{(a+bx-1)(a+bx)^{\alpha+1}}.$$

Provedeme pokud možno výpočet ten všeobecně.

3. Funkce za integračním znamením jest ryze lomená, položme tedy dle vět platných o rozkladu takových funkcí

$$\frac{b^\alpha x^\alpha}{(a+bx-1)(a+bx)^{\alpha+1}}=\frac{A}{a+bx-1}$$
$$+\frac{B_1}{a+bx}+\frac{B_2}{(a+bx)^2}+\dots+\frac{B_{\alpha+1}}{(a+bx)^{\alpha+1}}. \qquad (5)$$

Jest pak hledaný integral

$$J=\frac{ab}{\alpha!}\Bigg[A\int\limits_0^\infty\frac{dx}{a+bx-1}+B_1\int\limits_0^\infty\frac{dx}{a+bx}$$
$$+B_2\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(a+bx)^2}+\dots+B_{\alpha+1}\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(a+bx)^{\alpha+1}}\Bigg]$$
$$=\frac{ab}{\alpha!}\Bigg[\frac{A}{b}\,l\,(a+bx-1)+\frac{B_1}{b}\,l\,(a+bx)$$
$$-\frac{B_2}{b}\cdot\frac{1}{a+bx}-\dots-\frac{B_{\alpha+1}}{b\alpha}\cdot\frac{1}{(a+bx)^\alpha}\Bigg]_0^\infty,$$

$$J=\frac{a}{\alpha!}\Big[A\,l\,(a+bx-1)+B_1\,l\,(a+bx)\Big]_0^\infty$$
$$+\frac{a}{\alpha!}\left[\frac{B_2}{a}+\dots+\frac{B_{\alpha+1}}{\alpha\,a^\alpha}\right]. \qquad (6)$$

Jedná se o stanovení konstant A, B_1, $B_2, \dots, B_{\alpha+1}$.

Z rovnice (5) po odstranění jmenovatelů jde

$$b^\alpha x^\alpha=A\,(a+bx)^{\alpha+1}+$$
$$\left[B_1\,(a+bx)^\alpha+B_2\,(a+bx)^{\alpha-1}+\dots+B_{\alpha+1}\right](a+bx-1);$$

položivše tu

$$a + bx - 1 = 0, \text{ t. j. } x = \frac{1-a}{b},$$

obdržíme

$$A = (1-a)^\alpha;$$

pro

$$a + bx = 0, \text{ t. j. } x = -\frac{a}{b}$$

podává se

$$(-a)^\alpha = -B_{\alpha+1}, \text{ z čehož } B_{\alpha+1} = -(-a)^\alpha.$$

Pro ostatní konstanty možno si odvoditi rekurrentní vzorec následujícím spůsobem:

Položme zatím k vůli stručnosti

$$B_1 (a + bx)^\alpha + B_2 (a + bx)^{\alpha+1} + \ldots + B_{\alpha+1} = M;$$

pak jest

$$b^\alpha x^\alpha = M(a + bx - 1) + A(a + bx)^{\alpha+1}$$

a derivujme nyní tuto rovnici α kráte po sobě; tím obdržíme soustavu rovnic

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\, b^\alpha x^{\alpha-p} =$$

$$p\,b\,\frac{d^{p-1}M}{dx^{p-1}} + (a + bx - 1)\frac{d^pM}{dx^p}$$

$$+ A(\alpha+1)\,\alpha\ldots(\alpha-p+2)\, b^p (a+bx)^{\alpha-p+1}$$

$$(p = 1, 2, 3, \ldots \alpha).$$

Položme do této soustavy

$$a + bx = 0, \text{ t. j. } x = -\frac{a}{b},$$

a označme $\left(\frac{d^pM}{dx^p}\right)$ hodnotu, kterou obdrží $\frac{d^pM}{dx^p}$ po této substituci; pak jest

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\, b^\alpha \left(-\frac{a}{b}\right)^{\alpha-p} = p\,b\left(\frac{d^{p-1}M}{dx^{p-1}}\right) - \left(\frac{d^pM}{dx^p}\right),$$

$$(p = 1, 2, 3, \ldots \alpha).$$

Avšak jest

$$\frac{d^pM}{dx^p} = B_1 . \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\, b^p (a + bx)^{\alpha-p}$$

$$+ B_2 (\alpha-1)\ldots(\alpha-p)\, b^p (a+bx)^{\alpha-p-1} + \ldots$$

$$+ B_{\alpha-p+1} \cdot p(p-1)\ldots 2 \,.\, b^p,$$

a tedy

$$\left(\frac{d^pM}{dx^p}\right)=p!\,b^p\,B_{\alpha-p+1},\ \left(\frac{d^{p-1}M}{dx^{p-1}}\right)=(p-1)!\,b^{p-1}\,B_{\alpha-p+2};$$

dosadíme-li tyto hodnoty, obdržíme nejprvé

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\,b^\alpha\left(-\frac{a}{b}\right)^{\alpha-p}=p!\,b^p B_{\alpha-p+2}$$
$$-p!\,b^p\,B_{\alpha-p+1},$$

a z toho dále

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)(-a)^{\alpha-p}=p!\,(B_{\alpha-p+2}-B_{\alpha-p+1})$$

aneb užijeme-li známého označení binomialních koefficientů

$$B_{\alpha-p+2}-B_{\alpha-p+1}=\binom{\alpha}{p}(-a)^{\alpha-p},$$
$$(p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \alpha).$$

K stanovení stálých B máme tudíž soustavu rovnic:

$$\left.\begin{aligned}
B_{\alpha+1}-B_\alpha &= \binom{\alpha}{1}(-a)^{\alpha-1}\\
B_\alpha-B_{\alpha-1} &= \binom{\alpha}{2}(-a)^{\alpha+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B_3-B_2 &= \binom{\alpha}{\alpha-1}(-a),\\
B_2-B_1 &= \binom{\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

4. Především se jedná o konstantu B_1, abychom výraz v závorce rovnice (6) mohli vymeziti; sečteme-li veškeré rovnice (7), obdržíme

$$B_{\alpha+1}-B_1=\binom{\alpha}{1}(-a)^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{2}(-a)^{\alpha-2}$$
$$+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}(-a)+\binom{\alpha}{\alpha},$$

a dosadivše již známou hodnotu za $B_{\alpha+1}$

$$-B_1=(-a)^\alpha+\binom{\alpha}{1}(-a)^{\alpha-1}+\ldots+\binom{\alpha}{\alpha-1}(-a)+\binom{\alpha}{\alpha},$$

aneb

$$B_1=-(1-a)^\alpha.$$

Vložíme-li do rovnice (6) hodnoty za A a B_1 přejde tato v

$$=\frac{a(1-a)^\alpha}{\alpha!}\left[l\,\frac{a+bx-1}{a+bx}\right]_0^\infty+\frac{a}{\alpha!}\left[\frac{B_2}{a}+\frac{B_3}{2a^2}+\ldots+\frac{B_{\alpha+1}}{\alpha a^\alpha}\right],$$

a vymezíme-li

$$J=\frac{a(1-a)^\alpha}{\alpha!}l\frac{a}{a-1}+\frac{a}{\alpha!}\left[\frac{B_2}{a}+\frac{B_3}{2a^2}+\ldots+\frac{B_{\alpha+1}}{\alpha a^\alpha}\right].$$

Rovnice (4') jeví se pak následovně:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(\alpha+1)!}+\frac{1!}{(\alpha+2)!a}+\frac{2!}{(\alpha+3)!a^2}+\ldots\text{ do nek.}\\&=\frac{a(1-a)^\alpha}{\alpha!}l\frac{a}{a-1}+\frac{a}{\alpha!}\left[\frac{B_2}{a}+\frac{B_3}{2a^2}+\ldots+\frac{B_{\alpha+1}}{\alpha a^\alpha}\right],\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

při čemž veličiny $B_2, \ldots B_{\alpha+1}$ dány jsou rovnicemi (7).

5. Jestliže vzorce (3) střídavě sečteme a odečteme, obdržíme postupujíce zcela obdobně jako v článcích předcházejících řadu

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{(\alpha+1)!}-\frac{1!}{(\alpha+2)!a}+\frac{2!}{(\alpha+3)!a^2}-\ldots\text{ do nek.}\\&=\frac{a(1+a)^\alpha}{\alpha!}l\frac{a+1}{a}+\frac{a}{\alpha!}\left[\frac{C_2}{a}+\frac{C_3}{2a^2}+\ldots+\frac{C_{\alpha+1}}{\alpha a^\alpha}\right],\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

platnou opět pro hodnoty a *větší než 1* a kdež veličiny C stanoviti lze ze vzorců

$$\left.\begin{aligned}C_{\alpha+1}+C_\alpha&=\binom{\alpha}{1}(-a)^{\alpha-1}\\C_\alpha+C_{\alpha-1}&=\binom{\alpha}{2}(-a)^{\alpha-1},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\C_3+C_2&=\binom{\alpha}{\alpha-1}(-a),\\C_2+C_1&=\binom{\alpha}{\alpha},\\C_1&=(1+a)^\alpha.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Kladouce v (8) a (9) za α různé positivné hodnoty, obdržíme nekonečné řady, jichž součty možná dle těchto vzorců stanoviti; volíme-li ku př. $\alpha=5$, jest dle vzorců (7) a (10)

$$\begin{aligned}B_6-B_5&=5a^4=C_6+C_5,\\B_5-B_4&=-10a^3=C_5+C_4,\\B_4-B_3&=10a^2=C_4+C_3,\\B_3-B_2&=-5a=C_3+C_2,\\B_2-B_1&=1=C_2+C_1,\\B_1&=-(1-a)^5,\quad C_1=(1+a)^5,\end{aligned}$$

takže

$$\frac{B_2}{a} + \ldots + \frac{B_6}{5a^5} = \frac{137 - 385a + 470a^2 - 270a^3 + 60a^4}{60},$$

$$\frac{C_2}{a} + \ldots + \frac{C_6}{5a^5} = -\frac{137 + 385a + 470a^2 + 270a^3 + 60a^4}{60}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (8) a (9), obdržíme

$$\frac{1}{6!} + \frac{1!}{7!a} + \frac{2!}{8!a^2} + \ldots \text{do nek.}$$

$$= \frac{a(1-a)^5}{5!} l \frac{a}{a-1} + \frac{137a - 385a^2 + 470a^3 - 270a^4 + 60a^5}{60 . 5!},$$

$$\frac{1}{6!} - \frac{1!}{7!a} + \frac{2!}{8!a^2} - \ldots \text{do nek.}$$

$$= \frac{a(1+a)^5}{5!} l \frac{a+1}{a} - \frac{137a + 385a^2 + 470a^3 + 270a^4 + 60a^5}{60 . 5!},$$

Jeden vzorec vychází z druhého, dosadí-li se $-a$ místo a; to platí všeobecně pro jakékoliv a a stačí podržeti jen jeden k. př. (8) s podmínkou, aby a *bylo číselně větší než 1.*

II.

6. Položme pro příklad druhý za základ řadu známou

$$arc\,tg\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \text{do nek.} \qquad (11)$$

$$1 \geqq x \leqq -1.$$

Vzorec

$$\int_0^1 \frac{(a+bx)^n}{n} dx = \frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{bn(n+1)},$$

kdež n předpokládáme co *číslo liché,* platí pro jakékoliv hodnoty a i b současně kladné neb záporné; jest-li však a kladné a b záporné, přechází funkce $(a+bx)^n$ pro hodnotu $x = -\frac{a}{b}$ z kladného do záporného a nutno tedy vzhledem k integračním mezím, aby $\frac{a}{b} \geqq 1$, t. j. $a \geqq b$.

Dosadíme-li do vzorce toho postupně $n = 1, 3, 5, \ldots n$ a střídavě sečteme a odečteme, obdržíme

$$\int_0^1 \left[\frac{a+bx}{1} - \frac{(a+bx)^3}{3} + \ldots \pm \frac{(a+bx)^n}{n}\right] dx$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{(a+b)^2 - a^2}{1.2} - \frac{(a+b)^4 - a^4}{3.4} + \ldots \pm \frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{n(n+1)}\right].$$

Pokračujeme-li s n až do nekonečna, obdržíme za integračním znamením řadu pro $arc\,tg\,(a+bx)$, kteráž bude konvergovati, platí-li pro všechny hodnoty x stále

$$-1 \leqq a + bx \leqq 1.$$

Výraz $(a+bx)$ mění se ve vytčených integračních mezích od a do $(a+b)$; máme-li na zřeteli pouze případ, kde a i b jsou *kladné*, bude podmínce konvergenční vyhověno, platí-li

$$a + b \leqq 1. \qquad (12)$$

Při této podmínce konverguje též řada na pravé straně, neboť jest

$$lim\, u_n = lim \frac{(a+b)^{2n} - a^{2n}}{(2n-1)\,2n} = 0,$$

což pro konvergenci řady se střídavými znameními úplně stačí.

Předpokládajíce tedy podmínku (12), můžeme psáti

$$\frac{1}{b}\left[\frac{(a+b)^2 - a^2}{1.2} - \frac{(a+b)^4 - a^4}{3.4} + \ldots \text{do nek.}\right]$$

$$= \int_0^1 arc\,tg\,(a+bx)\,dx;$$

jest však

$$\int_0^1 arc\,tg\,(a+bx)\,dx = \frac{1}{2b}\, l\, \frac{1+a^2}{1+(a+b)^2}$$

$$+ \frac{(a+b)\,arc\,tg\,(a+b) - a\,arc\,tg\,a}{b},$$

a tedy

$$\frac{(a+b)^2 - a^2}{1.2} - \frac{(a+b)^4 - a^4}{3.4} + \frac{(a+b)^6 - a^6}{5.6} - \ldots \text{do nek.}$$

$$= \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+a^2}{1+(a+b)^2} + (a+b)\,arc\,tg\,(a+b) - a\,arc\,tg\,a, \qquad (13)$$

pro $a + b \leqq 1$.

Učiníme-li $b = a$, zjednáme si řadu

$$\frac{2^2-1}{1.2}a^2 - \frac{2^4-1}{3.4}a^4 + \frac{2^6-1}{5.6}a^6 - \ldots \text{ do nek.}$$
$$= \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+a^2}{1+4a^2} + a \operatorname{arc} tg\,(3a+4a^3),$$
$$\text{pro } a \leqq \frac{1}{2}.$$

Položíme-li $a = 0$, obdržíme

$$\frac{b^2}{1.2} - \frac{b^4}{3.4} + \frac{b^6}{5.6} - \ldots \text{ do nek.} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1}{1+b^2} + b \operatorname{arc} tg\, b \qquad (14)$$
$$\text{pro } b \leqq 1;$$

tak ku př. pro $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ výsleduje

$$\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.3^2} + \frac{1}{5.6.3^3} - \frac{1}{7.8.3^4} + \ldots = \frac{1}{2}\, l\, \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Zaměníme-li v (13) vzájemně a a b a obdržený vzorec odečteme od (13), získáme novou řadu

$$\frac{a^2-b^2}{1.2} - \frac{a^4-b^4}{3.4} + \frac{a^6-b^6}{5.6} - \ldots \text{d. nek.}$$
$$= \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+b^2}{1+a^2} + a \operatorname{arc} tg\, a - b \operatorname{arc} tg\, b,$$
$$\text{pro } a+b \leqq 1.$$

Řadu (14) obdržeti lze přímo integrováním (11) v mezích 0 až b a možno ji použíti ku odvozování nových řad, při čemž však pravé strany t. j. součty jich stávají se vždy složitějšími.

Podobným spůsobem mohli bychom ještě množství konvergentních nekonečných řad a zároveň jich součty odvoditi.