Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Vilém Pexider

Rozšíření poučky o neurčitých koefficientech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 4, 277--280

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122759`

$$(28)\qquad (x^2 + y^2 - z^2 + 2my - 2nz)^2 - 4x^2(y^2 + 2ny + R^2 + m^2) = 0.$$

Patrně tu

$$u^{(0)} = 0,\ u^{(1)} = 0$$

kdežto

$$u^{(2)} = 0,$$

zní

$$(29)\qquad (m^2 + R^2)\, x^2 - (my - nz)^2 = 0.$$

Toť rovnice inflekční plochy kuželové, jež skládá se však z rovin

$$(30)\qquad \begin{aligned} \sqrt{m^2 + R^2}\, x - my + nz &= 0 \\ \sqrt{m^2 + R^2}\, x + my - nz &= 0, \end{aligned}$$

tečných to rovin plochy hyperbolo-hyperbolické v bodě křivky dvojné, zvoleném za počátek soustavy. Tím znova jest stvrzeno, že křivka (26) jest dvojnou křivkou plochy.

(Dokončení.)

Rozšíření poučky o neurčitých koëfficientech.

Napsal

Dr. **Jan Pexider** v Paříži.

Jsou-li dvě konečné řady funkcí

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \ldots + u_n\varphi_n(x) \\ &v_0 + v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + \ldots + v_n\varphi_n(x), \end{aligned}$$

z nichž žádná není algebraicky lineárnou funkcí druhých a u_k, v_k značí konstanty, sobě rovné pro nekonečně mnoho různých hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$, číselně menších než libovolná hodnota A, jsou obě řady identické, t. j. platí

$$u_0 = v_0,\ u_1 = v_1, \ldots,\ u_n = v_n.$$

Důkaz. Buďtež $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ libovolně volené hodnoty menší než A, ale takové, že pro ně žádná z funkcí $\varphi_k(x)$ nenabývá hodnoty nekonečně veliké; pak ze supponované identity

$$u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x) = 0$$

plyne $n + 1$ lineárných a homogenních rovnic

$$\begin{aligned} u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_1) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_1) &= 0 \\ u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_2) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_2) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_0 - v_0 + (u_1 - v_1)\varphi_1(x_{n+1}) + \ldots + (u_n - v_n)\varphi_n(x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

pro $n + 1$ neznámých $u_0 - v_0$, $u_1 - v_1$, ..., $u_n - v_n$.

Tu víme, je-li determinant z koëfficientů u neznámých různý od nully, t. j. je-li

$$\Delta = \Sigma \pm [1 \,.\, \varphi_1(x_2) \,.\, \varphi_2(x_3) \ldots \varphi_n(x_{n+1})] \gtrless 0$$

— čemuž vyhověti patrně vždy máme ve své moci, jelikož funkce φ_k jsou dle supposice na sobě algebraicky lineárně nezávislé a hodnoty $\varphi_k(x_\nu)$ závisejí jedině od volby argumentů x_ν — že existuje jediné řešení, a sice nullové, t. j.

$$u_0 - v_0 = 0,\ u_1 - v_1 = 0, \ldots,\ u_n - v_n = 0,$$

z čehož plyne

$$u_0 = v_0,\ u_1 = v_1, \ldots,\ u_n = v_n,$$

jak bylo dokázati.

A naopak. Platí-li $n + 1$ rovnic $u_k = v_k$, platí identita $\Sigma(u_k - v_k)\varphi_k = 0$, t. j. identičnost řad $\Sigma u_k \varphi_k = \Sigma v_k \varphi_k$, takže rovnice $u_k = v_k$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ jsou podmínkou nejen nutnou, nýbrž i postačující pro rovnost dvou řad funkcí.

Na základě této věty odvoditi lze následující. Značtež $\varphi_k, \psi_k, \ldots$ funkce proměnné x, a_k, $b_k, \ldots$ konstanty, a přičtěme k identitě

$$(1) \qquad \sum_1^n a_k \varphi_k = \sum_1^n a_k \varphi_k$$

na obou stranách konstantu $a_0 = \sum_1^n a_k c_k$, při čemž rozklad v c_k jest ostatně zcela libovolný, a spojme na jedné straně funkce φ_k a konstanty c_k ve funkce ψ_k, t. j. $\psi_k = \varphi_k + c_k$; pak zajisté

$$\sum_1^n a_k\varphi_k + a_0 = \sum_1^n a_k\psi_k,$$

při čemž postačujícími podmínkami bylo, aby ψ_k lišily se od φ_k jen o jisté konstanty a aby součet jich násobků s příslušnými koëfficienty funkčními rovnal se konstantě na pravé straně a_0.

Ukáže-li se naopak, že k platnosti identity (1) jest nutně zapotřebí podmínek právě uvedených, jsou i nutné i postačující pro shodnost dvou řad, t. j. aby dvě řady různých funkcí

$$\Sigma(a_0 + a_k\varphi_k) \text{ a } \Sigma b_k\psi_k$$

se sobě rovnaly, jest nutné a stačí, aby kromě rovnosti

$$a_k = b_k$$

platily relace

$$\psi_k - \varphi_k = c_k \text{ a } \Sigma a_k c_k = a_0$$

čili „funkce dvou identických řad nemohou se od sebe lišiti leč konstantami."

Proveďme tedy druhou část důkazu.

Aby

$$\Sigma a_k\varphi_k + a_0 = \Sigma b_k\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

t. j.

$$\sum_1^n (a_0 + a_k\varphi_k - b_k\psi_k) = \sum_1^m u_k\varrho_k + u_0 = 0,$$

jest dle odvozené poučky nutně třeba, aby

$$u_k = 0 \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Tu nastávají následující případy:

buď $\psi_\nu \neq \varphi_\nu$ vůbec, a pak $\varrho_\nu = \varphi_\nu$ anebo ψ_ν, takže $u_\nu = a_\nu$ anebo $-b_\nu$, t j. $a_\nu = b_\nu = 0$;
neb $\psi_k = \varphi_k + c_k$, a pak $\varrho_k = \varphi_k$ kdežto $b_k c_k$ obsažena jsou v u_0, a příslušné koëfficienty $a_k - b_k = u_k = 0$, t. j. $a_k = b_k$, takže identicky $\Sigma b_k c_k = \Sigma a_k c_k$, anebo jest

$\psi_\mu = \varphi_\mu$, a tu opět z $u_\mu = a_\mu - b_\mu = 0$ plyne $a_\mu = b_\mu$.

Obdržíme tudíž $u_0 = a_0 - \Sigma a_k c_k = 0$, takže původní rovnice má platnost jen při hodnotách

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_k \varphi_k + a_0 &= \Sigma a_k (\varphi_k + c_k) \\ a_0 &= \Sigma a_k c_k, \end{aligned}\right. \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

z čehož jde požadovaná identita

$$\Sigma a_k \varphi_k = \Sigma a_k \varphi_k.$$

K tomu bylo nutno, aby

$$b_k = a_k, \quad \psi_k = \varphi_k + c_k, \quad \Sigma a_k c_k = a_0,$$

což jsou právě ony svrchu uvedené postačující a nyní za nutné prokázané podmínky. Tím dokázána věta:

„Algebraicky lineárně na sobě nezávislé funkce dvou identických řad nemohou se od sebe lišiti leč o konstanty."

Applikace této věty jest na příklad:

Lze-li integrál nějaké funkce vyjádřiti algebraickými a transcendentními funkcemi v konečném počtu, tu funkce výrazu jednoho pro onen integrál nemohou se od funkcí jiného výrazu pro týž integrál lišiti leč o konstanty; neboť má-li

$$\int f(x)\, dx = \Sigma a_k \varphi_k + \mathrm{A} = \Sigma b_k \psi_k + \mathrm{B},$$

jest nutno, aby

$$a_k = b_k, \quad \psi_k = \varphi_k + c_k, \quad \Sigma b_k c_k + \mathrm{B} = \text{libovolné konstantě A},$$

takže, nepovažujeme-li takové dva výrazy za podstatně různé, můžeme říci:

„Lze-li integrál funkce vyjádřiti algebraickými a transcendentními funkcemi, na sobě lineárně nezávislými, v konečném počtu, je to možné způsobem jen jediným."

V Paříži dne 20. ledna 1899.