Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Poznámka o řadách arithmetických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 4, 281--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122756

Poznámka o řadách arithmetických.

Napsal

Vilém Jung,

professor st. prům. školy v Praze.

Obecný člen y_x arithmetické řady n-ho stupně jest racionální celistvou funkcí n-ho stupně indexu x, platí tedy

$$y_x = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r. \tag{1}$$

Utvořme si obecný člen řady prvních differencí totiž

$$\Delta y_x = \sum_{r=0}^{n} a_r (x+1)^r - \sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \sum_{r=0}^{n} a_r \{(x+1)^r - x^r\},$$

provedeme-li výkony tuto naznačené a srovnáme-li výsledek dle mocnin argumentu x, obdržíme

$$\Delta y_x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r^{(1)} x^r,$$

při čemž

$$a_r^{(1)} = \sum_{p=r+1}^{n} (p)_{p-r} a_p = \sum_{p=r+1}^{n} (p)_r a_p;$$

řada prvních differencí Δy_x jest stupně $(n-1)$-ho.

Podobně si utvoříme obecný člen řady druhých differencí, totiž

$$\Delta^2 y_x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r^{(1)} \{(x+1)^r - x^r\} = \sum_{r=0}^{n-2} a_r^{(2)} x^r,$$

při čemž

$$a_r^{(2)} = \sum_{p=r+1}^{n-1} (p)_r a_p^{(1)};$$

řada druhých differencí $\Delta^2 y_x$ jest stupně $(n-2)$-ho.

Platí tedy obdobně pro s-tou differenci

$$\Delta^s y_x = \sum_{r=0}^{n-s} a_r^{(s)} x^r, \tag{2}$$

při čemž

$$(3) \qquad a_r^{(s)} = \sum_{p=r+1}^{n-(s-1)} (p)_r \, a_p^{(s-1)} ;$$

řada s-tých differencí $\Delta^s y_x$ jest stupně $(n-s)$-ho.

Ze vzorce (3) obdržíme součinitele $a_{n-s}^{(s)}$ při nejvyšší mocnině x^{n-s} ve výraze $\Delta^s y_x$, položíme-li $r = n - s$, tedy

$$(4) \qquad a_{n-s}^{(s)} = a_{n-(s-1)}^{(s-1)} \left[n - (s-1) \right].$$

Pro n-tou differenci konečně obdržíme

$$(5) \qquad \Delta^n y_x = a_0^{(n)} = \text{Const.}$$

Další difference rovnají se nulle, totiž

$$(6) \qquad \Delta^s y_x = 0 \quad \text{pro } s > n .$$

Hodnota $\Delta^n y_x = a_0^{(n)}$ dá se jednoduše stanoviti pomocí vzorce (4), dosazujeme-li postupně $s = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^{(1)} &= n\, a_n \\
a_{n-2}^{(2)} &= (n-1)\, a_{n-1}^{(1)} \\
a_{n-3}^{(3)} &= (n-2)\, a_{n-2}^{(2)} \\
&\vdots \\
a_2^{(n-2)} &= 3 \,.\, a_3^{(n-3)} \\
a_1^{(n-1)} &= 2 \,.\, a_2^{(n-2)} \\
a_0^{(n)} &= 1 \,.\, a_1^{(n-1)}
\end{aligned}$$

tedy

$$(7) \qquad \Delta^n y_x = a_0^{(n)} = n!\, a_n .$$

Pro n tou differenci arithmetické řady n-ho stupně platí však

$$(8) \qquad \Delta^n y_x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k \, y_{n+x-k} = \text{Const.}$$

Ježto

$$y_{n+x-k} = \sum_{r=0}^{n} a_r (n+x-k)^r = \sum_{r=0}^{n} a_r (b-k)^r,$$

platí se zřetelem k rovnici (7) identičnost

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k (n)_k \left[\sum_{r=0}^{n} a_r \, (b-k)^r \right] \right\} = n!\, a_n .$$

Se zřetelem k rovnici (6) jest v platnosti dále identičnost

$$(10) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left\{ (-1)^k (n)_k \left[\sum_{r=0}^{m} a_r \, (b-k)^r \right] \right\} = 0,$$

když $m < n$.

Obě tyto identičnosti jsou v platnosti pro jakékoliv celistvé a kladné n jakož i m a pro jakékoliv a_r a b (realné i komplexní).

Dr. F. J. Studnička uvádí ve svém pojednání „*Příspěvek k nauce o determinantech mocninných*“ (Věstník České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění. Ročník VII.) tři zvláštní poučky do číselné theorie patřící, jakožto zvláštní případy identičnosti, plynoucí z jisté vlastnosti *základního determinantu mocninného*, totiž

$$(\alpha) \qquad \begin{gathered} a^n - (n)_1 (a+1)^n + (n)_2 (a+2)^n - \ldots \\ \pm (a+n)^n = (-1)^n . n! \end{gathered}$$

$$(\beta) \qquad \begin{gathered} (n)_1 . 1^n - (n)_2 . 2^n + (n)_3 . 3^n - \ldots \\ \pm (n)_n . n^n = (-1)^{n-1} . n! \end{gathered}$$

$$(\gamma) \qquad a_0 - (n)_1 a_1 + (n)_2 a_2 - \ldots \pm (n)_n a_n = 0,$$

představují-li čísla

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

arithmetickou řadu stupně $(n-k)$-ho pro $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Obrátíme-li na levé straně v rovnicích (α), (β) pořádek členů a násobíme-li v případech, v nichž jest po obrácení první člen záporný, celou rovnici (-1), položíme-li $a+n=b$

v rovnici (α) a uvážíme-li, že $(n)_k = (n)_{n-k}$, můžeme tyto rovnice psáti ve formě

$$(\alpha') \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k (b-k)^n = n!$$

$$(\beta') \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n)_k (n-k)^n = n!$$

Identičnost (β') plyne z (α') pro $b = n$.

Identičnost (α') jest zvláštním případem identičnosti (9) tuto odvozené a to pro $a_n = 1$; $a_r = 0$, $[r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)]$.

Identičnost (γ) jest totožna s identičností (10).

Věstník literární.

O životě a vědeckém působení P. L. Čebyševa se dočtli čtenáři Časopisu v krátké stati prof. A. Vasiljeva, umístěné v roč. XXV. na str. 25. Týž auktor uveřejnil v „Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria“ (Torino, C. Clausen editore) 1898, na 56 stranách podrobný rozbor díla slavného ruského mathematika, věnovaný jeho příteli prof. K. Hermite-ovi, pod titulem „P. L. Tchébychef et son oeuvre scientifique par A. Vassilief, professeur à l'Université de Kasan.“

Doporučujeme tento rozbor, pocházející z péra nejkompetentnějšího, a obsahující úplný seznam vědeckých prací Čebyševa, všem pěstitelům mathematiky co nejvřeleji. *E. Weyr.*

Précis élémentaire de la théorie des Fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par *Lucien Lévy*, examinateur d'admission et répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1898.

Stručný nástin základů theorie elliptických funkcí určený hlavně inženýrům, zbudovaný prostředky elementárnými, omezující se, pokud možno, na proměnné reálné, a obohacený applikacemi mechanickými, geometrickými a číselnými.

Stanovisko theorie funkcí komplexní proměnné, jež jest nutné pro hlubší vniknutí do této náuky, vytknuto povšechně teprve v poslední kapitole. To však nikterak nevadí poznání