Antonín Sucharda

Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 4, 257--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122755

Několik analytických úvah o translačních plochách vůbec a bikvadratických zvlášť.

Napsal

Dr. Ant. Sucharda, t. č. v Paříži.

1. V souřadné soustavě pravoúhlé dána budiž řídící křivka A *plochy translační**) rovnicemi

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \varphi(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

tvořící křivka B měj v soustavě s touto rovnoběžné, jejímž počátkem jest bod $b\,(q, r, t)$ křivky A, rovnice

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ \Phi(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

tudíž v původní soustavě rovnice

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} F(x - q, y - r) &= 0 \\ \Phi(x - q, z - t) &= 0. \end{aligned}$$

Poněvadž výtvarný zákon plochy žádá, aby body křivky B vykonávaly dráhy shodné a homothetické s křivkou A, bude při vytvořování plochy bod b probíhati křivku A.

Proto musí jeho souřadnice hověti rovnicím (α) a bude tedy

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} f(q, r) &= 0 \\ \varphi(q, t) &= 0. \end{aligned}$$

---

*) Prof. Tilšer ve svých přednáškách nazýval tyto plochy *plochami posouvání.*

Vyloučíce z rovnic (β), (γ) parametry q, r, t, obdržíme rovnici $F(x, y, z) = 0$ plochy translační.

Vložíme-li tři k sobě příslušné linearné hodnoty q_i, r_i, t rovnicím (γ) vyhovující, do rovnic (β), obdržíme

$$(\delta) \qquad \begin{aligned} F(x - q_i, y - r_i) &= 0 \\ \Phi(x - q_i, z - t_i) &= 0 \end{aligned}$$

jako rovnice křivky B_i s B shodné a homothetické, jež náleží ploše translační.

Užitím všech trojin q_i, r_i, t_i, příslušných k sobě hodnot vyhovujících rovnicím (γ), obdržíme takto všechny křivky soustavy B.

Libovolný bod x, y, z tvořící křivky B má ve směru os X, Y, Z od bodu $b(q, r, t)$ vzdálenosti m_i, n_i, p_i, takže jest

$$x = q + m_i, \qquad y = r + n_i, \qquad z = t + p_i$$

a tudíž

$$\begin{aligned} q &= x - m_i \\ r &= y - n_i \\ t &= z - p_i . \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic (γ) za q, r, t, obdržíme

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} f(x - m_i, y - n_i) &= 0 \\ \varphi(x - m_i, z - p_i) &= 0 \end{aligned}$$

jako rovnice křivky A_i s A shodné a homothetické, v translační ploše obsažené, tudíž křivky soustavy A.

Pro všechny trojiny m_i, n_i, p_i nabudeme tak všech křivek s A shodných a homothetických na ploše, tudíž všech křivek soustavy A.

Trojiny hodnot m_i, n_i, p_i vyhovují rovnicím křivky B pro počátek v bodě b a osy s původními rovnoběžné, tudíž rovnicím

$$(\eta) \qquad \begin{aligned} F(x + q, y + r) &= 0 \\ \Phi(x + q, z + t) &= 0. \end{aligned}$$

Zavedeme-li do rovnic (η) za x, y, z resp. m, n, p a spojíme-li je s rovnicemi (ε) psanými s vynecháním indexu i, nabudeme vyloučením m, n, p z těchto čtyř rovnic opět rovnice plochy translační. Při prvém odvozování této rovnice byla B

křivkou tvořící, při druhém jest jí křivka shodná a homothetická s křivkou A.

Velmi elegantně rovnici plochy translační odvozuje Lie*) pro případ, že souřadnice x, y, z bodů křivek A a B vyjádřeny jsou užitím proměnného parametru t resp τ.

Značí-li tu rovnice

$$
(1) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \psi_1(t) \\ z &= \chi_1(t) \end{aligned}
$$

křivku A, podobně rovnice

$$
(2) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_2(\tau) \\ y &= \psi_2(\tau) \\ z &= \chi_2(\tau) \end{aligned}
$$

křivku B, představují rovnice

$$
(3) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) + \varphi_2(\tau) \\ y &= \psi_1(t) + \psi_2(\tau) \\ z &= \chi_1(t) + \chi_2(\tau) \end{aligned}
$$

plochu translační, která vznikne, posouvá-li se křivka s jednou z daných křivek (1), (2) shodná a homothetická po křivce druhé.

Vyloučením proměnných parametrů t, τ z rovnic (3) nabudeme rovnice plochy v souřadnicích x, y, z. Parametry t a τ na sobě nezávislé lze pokládati za *křivočaré souřadnice plochy* (coordonées curvilignes), $t =$ const., $\tau =$ const. jsou křivky různých soustav plochy této.

2. Budiž tu ukázáno ještě k jinému výtvarnému zákonu ploch uvažovaných. Srov. Strnad, „Drobné zprávy“ t. Časop. roč. XIX. str. 50., k nimž však budiž pro úplnost připomenuto, že již Lie vyslovil tento zákon výtvarný pro $\lambda = 1$, jak uvádí professor *Darboux*, doyen pařížské Sorbonny, ve svých výtečných „Leçons sur la théorie genérale des surfaces“ díl I., pag. 98.

Mějme v soustavě souřadné pravoúhlé

*) Carl Schilling: „Die Minimalflächen fünfter Classe“, Göttingen, 1880, pag. 7.

$$
\begin{array}{ll}
\text{křivku } \mathfrak{A} & \ldots f(xy)=0 \\
(\iota) & \varphi(xz)=0 \\
\text{a křivku } \mathfrak{B} & \ldots \mathrm{F}(xy)=0 \\
(\varkappa) & \Phi(xz)=0.
\end{array}
$$

Libovolný bod $\mathfrak{a}(x_1, y_1, z_1)$ křivky $\mathfrak{A}$ s libovolným bodem $\mathfrak{b}(x_2, y_2, z_2)$ křivky $\mathfrak{B}$ určuje přímku $\overline{\mathfrak{ab}}$, na níž stanoví se daným dělícím poměrem λ určitý bod p vzhledem k $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jako bodům základním.

Souřadnice bodu p jsou

$$
(\lambda) \qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} \\
y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \\
z &= \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Spojíme-li bod $\mathfrak{a}$ s počátkem o a určíme-li na přímé spojnici té bod o' příslušný dělícímu poměru λ, budou jeho souřadnice

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x_1}{1-\lambda} \\
y' &= \frac{y_1}{1-\lambda} \\
z' &= \frac{z_1}{1-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k bodu o' jako novému počátku nabudou souřadnice bodu p v rovnicích (λ) uvedené, ovšem hodnot jiných, totiž

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\lambda x_2}{1-\lambda} \\
y &= \frac{-\lambda y_2}{1-\lambda} \\
z &= \frac{-\lambda z_2}{1-\lambda},
\end{aligned}
$$

z nichž ihned patrno, že nyní $x:y:z = x_2:y_2:z_2$ na důkaz, že geometrickým místem bodů p jest tu křivka $\mathfrak{B}'$ s $\mathfrak{B}$ podobná a stejnolehlá. Považíme-li, že tak jest pro každý bod a a že činitel $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ zůstává stálým, seznáme mimo to, že jsou křivky $\mathfrak{B}'$ mezi sebou shodny. Máme-li při této transformaci na mysli kterýkoli určitý bod r křivky $\mathfrak{B}$, bude mu v každé z křivek $\mathfrak{B}'$ příslušeti bod r'. Každý z těchto bodů bude na jedné z přímek, jež bod r spojují s body křivky $\mathfrak{A}$, i budou tyto body dle předešlého vyplňovati křivku $\mathfrak{A}'$ s $\mathfrak{A}$ podobnou a stejnolehlou. Z toho již patrno, že plocha z křivek $\mathfrak{B}'$ složená totožna jest s plochou, jež by vznikla translací libovolné křivky $\mathfrak{B}'$ po dané křivce $\mathfrak{A}'$. Jest na jevě, že bychom obdrželi i druhou soustavu křivek shodných a stejnolehlých s křivkou $\mathfrak{B}'$, kdybychom při úvahách prve vykonaných křivky $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ spolu zaměnili.

Rovnice plochy obdrží se, jestliže z rovnic (λ) a z rovnic

$$f(x_1 y_1) = 0$$
$$\varphi(x_1 z_1) = 0$$
$$\mathrm{F}(x_2 y_2) = 0$$
$$\Phi(x_2 z_2) = 0$$

vyloučíme souřadnice x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 bodů a a b. Budiž tu ještě připomenuto, že již *Monge* se zabýval plochami translačními, neužívaje arci jména nynějšího*). Hledal totiž differencialní rovnici těchto ploch, z ní pak integrací dospěl k rovnicím

$$x - f(z - \alpha) = \varphi(\alpha)$$
$$y - \mathrm{F}(z - \alpha) = \psi(\alpha),$$

z nichž vyloučením parametru α vychází rovnice translační plochy. Při tom

$$x = f(z), \; y = \mathrm{F}(z)$$

jest rovnice *křivky tvořící*,

$$x = \varphi(z), \; y = \psi(z)$$

rovnice *křivky řídící*.

3. Nebude, trvám, od místa poukázati ještě ke dvěma zajímavým vlastnostem ploch translačních vůbec.

---

*) Monge: „Applications de l'Analyse à la Géométrie", II. partie p. 96—117.

Každým obecným bodem plochy translační procházejí, jak známo, dvě křivky A, B různých soustav. Jsou-li tečny k oběma křivkám v tomto bodě rovnoběžny se dvěma sdruženými průměry příslušné indicatrice, díme, že tvoří křivky A, B na ploše síť křivek sdružených (réseau conjugué).

Podmínku nezbytnou a postačující, aby libovolná plocha obsahovala takovouto síť křivek sdružených, vyjadřuje *Darboux* *) takto:

Dána-li plocha v soustavě souřadné pravoúhlé rovnicemi

$$x = f(u, v)$$
$$y = \varphi(u, v)$$
$$z = \psi(u, v),$$

kdež jsou u, v dva neodvislé parametry, tvoří křivky $u =$ const., $v =$ const. síť křivek sdružených, jestliže determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

K témuž výsledku dospěl již dříve Lie **), jejž ovšem Darboux citovati neopomíjí; nemýlím-li se, píše Lie determinant charakteristický s výměnou řádků za sloupce a naopak.

Je-li translační plocha dána rovnicemi (3), jež jsme uvedli v odst. 1. tohoto pojednání, kladouce t a τ jako neodvislé parametry, pozná se ihned, že tu

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

z čehož ovšem následuje, že se horní determinant totožně rovná nulle. Tím jest dokázáno, *že tvoří křivky A, B různých soustav translační plochy vždycky síť křivek sdružených.*

---

*) ibid I. díl pag. 101.

**) Lie: „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen“ (Mathem. Annalen Bd. XIV.).

Měl jsem příležitost jinde*) odvoditi tuto vlastnost translačních ploch cestou geometrickou, nevěda, že známa byla již Lie-ovi a Darbouxovi. Vycházel jsem při svém důkaze od theoremu Dupinova ve formě, v které jej vyslovuje Salmon-Fiedler**), že totiž průsečnice dvou soumezných tečných rovin libovolné plochy jest přímkou sdruženou se spojnicí bodů dotyčných. Opíraje se o známou vlastnost translačních ploch, že roviny tečné podél libovolné křivky soustavy A nebo B obalují plochu válcovou***), snadně jsem dokázal vlastnost prve vyslovenou.

Pěkně vyjadřuje vlastnost, o níž tu jednáme, *Raffy* ve své poučné knize†), pravě: Mají-li tvořiti dvě soustavy křivek na libovolné ploše síť křivek sdružených, jest potřebí a postačí, oby tvořily tečny ke všem křivkám jedné soustavy v průsečných bodech s křivkou druhé soustavy plochu rozvinutelnou. Z této věty vyplývá na př., jak Raffy v zajímavých svých výkladech pověděl, že jsou-li křivoznačné křivky jedné soustavy křivkami rovinnými v rovinách rovnoběžných, jsou křivky druhé soustavy dotyčnými křivkami ploch válcových, jejichž plošné přímky jsou rovnoběžny s oněmi rovinami.

V řečené již knize své uvádí Raffy též pěkný způsob geometrický, jímž *Koenigs*, professor na Sorbonně, sestrojuje sítě sdružených křivek libovolné plochy: „Roviny svazku, jehož osou jest libovolná přímka *P*, protínají danou plochu v křivkách, jež tvoří síť křivek sdružených s dotyčnými křivkami kuželových ploch, opsaných dané ploše ze středů ležících na přímce *P*."

K tomu dovoluji si poznamenati toto:

Při plochách, vzniklých translací rovinné křivky *A* po libovolné prostorové křivce *B*, snadno jest verifikovati způsob Koenigsův. Přímkou *P* jest tu úběžná přímka rovin křivek soustavy *A*, plochy kuželové jsou nahraženy válcovými, jež se dotýkají translační plochy v křivkách soustavy *B*.

---

*) Srov. mé pojednání „Kterak sestrojiti tečny ke křivkám intensitním ploch translačních vůbec a kuželosečkových zvlášť." (Rozpravy České Akad. Tř. II. roč. VI. č. 24.)

**) Analytische Geometrie d. R. II. díl 3. vyd. pag. 14.

***) Srov. prof. F. Tilšera přednášky na c. k. čes. vys. škole technické z let 80tých.

†) Raffy: „Leçons sur les applications géométriques de l'analyse", 1897.

Jsou-li také křivky soustavy B křivkami rovinnými, jest úběžná přímka těchto rovin druhou přímkou ve smyslu Koenigově. Příslušnými plochami kuželovými jsou tu válcové plochy, jež se dotýkají plochy translační v křivkách soustavy A.

Abychom druhou zajímavou vlastnost translačních ploch dokázali, vycházejme opět od rovnice (3) tohoto pojednání a odvoďme výraz pro linearný element plochy.

Je tu zajisté

$$dx^2 = (\varphi'_1 dt + \varphi'_2 d\tau)^2$$
$$dy^2 = (\psi'_1 dt + \psi'_2 d\tau)^2$$
$$dz^2 = (\chi'_1 dt + \chi'_2 d\tau)^2,$$

pročež

$$ds^2 = (\varphi'^2_1 + \psi'^2_2 + \chi'^2_1)\, d\tau^2$$
$$+ (\varphi'^2_2 + \psi'^2_2 + \chi'^2_2)\, d\tau^2$$
$$+ 2dt\, d\tau\, (\varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi'_2 + \chi'_1\chi'_2).$$

Předpokládáme-li nyní po příkladě *Darbouxově* *), že t, τ jsou oblouky křivek A, B, rovnají se činitelé v prvních dvou závorkách posledního výrazu každý jedné a výraz nabývá jednoduššího tvaru

$$ds^2 = dt^2 + d\tau^2 + 2dt\, d\tau\, (\varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi'_2 + \chi'_1\chi'_2);$$

zavedeme-li dále za t a τ nové parametry α, β tak, že

$$\alpha = t + \tau$$
$$\beta = t - \tau,$$

nabude výraz pro linearný element po krátké úpravě tvaru následujícího:

$$ds^2 = \frac{1}{2}(1 + \varphi'_1\varphi'_2 + \psi'_1\psi_2 + \chi'_1\chi'_2)\, d\alpha^2$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - \varphi'_1\varphi'_2 - \psi'_1\psi'_2 - \chi'_1\chi'_2)\, d\beta^2.$$

Srovnáme-li jej s obecným vzorcem *Darbouxovým* **)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

shledáme, že $F = 0$. Poněvadž však, jak řečený autor ukazuje,

---

*) ibid. pag. 99.
**) ibid. pag. 75.

úhel ω, v němž se protínají křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, dán jest relací

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

jest v předloženém případě $\omega = R$, t. j. křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ protínají se pravoúhelně. Vychází z toho zajímavý výsledek ten, *že dopouští každá plocha translační soustavu pravoúhlých souřadnic křivočarých* (système de coordonnées curvilignes rectangulaires) čili *síť isothermickou.* Křivky $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ ji rozvrhují v nekonečně malé čtverce, položíme-li $d\alpha = d\beta$.

4. Přestávajíce na úvahách o obecné ploše translační, obraťme se k oněm, jejichž řídící a tvořící křivkou jsou *centrické kuželosečky* A a B. Řídící kuželosečka A měj střed i, tvořící B střed u, obě protínejte se v bodě m. Proběhne-li bod m posouvající se křivky B celou křivku A, vznikne žádaná translační plocha P. Při tom každý bod křivky B vytvoří křivku A shodnou a stejnolehlou; také její střed u vytvoří takovou křivku, již nazveme A_s. Plocha dá se vytvořiti arci také tím způsobem, že B jest křivkou řídící a A tvořící. Bod m posouvající se křivky A proběhne pak celou křivku B a každý jiný bod křivky A křivku s B shodnou i stejnolehlou; také střed i vytvoří takovou křivku, nazývejme ji B_s. Jak patrno, obdržíme střed křivky B_s, učiníce $io \triangleq mu$; poněvadž však jest potom též $uo \triangleq mi$, poznáváme, že A_s i B_s mají společný střed v bodě o.

Jest nyní dále zřejmo, že se uvažovaná plocha P dá též vytvořiti takovou translací křivky B, při níž její střed u probíhá danou křivku A_s, nebo takovou translací křivky A, při níž její střed i protíná křivku B_s. Křivky A_s a B_s arci na ploše P neleží.

Povážíme-li, že rovina A křivky A_s dělí tu každou křivku soustavy B ve dvě klinogonalně souměrné polovice, nahlédneme, že rovina tato jest rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Prohlédajíce k druhému zákonu výtvarnému, z obdobné příčiny poznáváme, že tolikéž rovina B křivky B_s jest rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Roviny A a B protínají se v přímce X bodem o procházející, v níž mají kuželosečky A_s, B_s po jednom průměru.

Roviny křivek soustavy B protínají rovinu A v rovnoběžkách s X, jimiž určuje se osnova tetiv kuželosečky A_s. Konce každé z těchto tetiv jsou středy dvou kuželoseček soustavy B, i jest patrno, že jsou každé ty dvě křivky spolu souměrny dle roviny C, která prochází průměry Y, Z kuželoseček A_s resp. B_s, sdruženými s průměrem v přímce X obsaženým. Jesti tedy rovina tato třetí rovinou klinogonalné souměrnosti plochy P. Společný těmto třem rovinám bod o ovšem jest středem plochy uvažované. Volíme-li roviny ty za roviny souřadné, budou řečené tři průměry osami souřadnými a společný střed kuželoseček A_s, B_s počátkem soustavy; rovnice plochy, jíž pak nabudeme, bude nejjednodušší dobou rovnice plochy P, nejobecněji pojaté, v soustavě souřadné kosoúhlé. Vhodným užitím příbuznosti vždycky lze plochu P tak transformovati, aby její roviny souměrnosti byly vzájemně k sobě kolmé, zároveň pak aby byly jejich průsečnice osami kuželoseček A_s, B_s.

Případnou volbou modulu příbuznosti i toho lze docíci, aby tu každá z křivek A_s, B_s měla stejné osy. Tak nabude se nejjednoduššího typu plochy P, na který každou centrickou plochu takovou lze převésti, a na némž i v úvahách následujících přestaneme. Křivkami různých soustav budou zde jedině křivky kruhové a rovnostranné hyperboly. Poukázali jsme již jinde*) k tomu, že tyto plochy třikrát normalně souměrné sluší rozvrhnouti takto:

1. plocha kruho-kruhová, 2. plocha hyperbolo-kruhová, 3. plocha hyperbolo-hyperbolická; při tom první část názvu prohlédá ke křivce řídící, druhá ke křivce tvořící.

Sluší pak při ploše 2. rozeznávati typus a a b podle toho, zda rovina kružnice B_s obsahuje realnou nebo imaginarnou osu hyperboly A_s, při ploše 3. pak typus a, b, c podle toho, zda průsečnice rovin hyperbol A_s, B_s obsahuje realné osy obou křivek, nebo realnou jedné a imaginarnou druhé, nebo konečně obě osy imaginarné.

---

*) Srov. mé pojednání: „Über die bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität.“ Sitzber. d. k. Akad. d. W. in Wien, Bd. CI., Abth. II. a. Mai 1892, pag. 590.

Pro snažší přehled znamenej R pokaždé poloosu řídící kuželosečky (poloměr kružnice, po případě poloosu řídící hyperboly), r poloměr tvořící kružnice, po případě poloosu tvořící hyperboly. Při tom budiž povždy $R > r$.

Tou podmínkou docílíme, že dvojná kuželosečka nezvrhne se ve dvě přímky, okolnost to, již v celé této práci pokládáme za vyloučenou.

Majíce rovnici plochy sestrojiti, volme povždy rovinu kuželosečky A_s za souřadnou rovinu XY, rovinu B_s za souř. rovinu XZ, rovinu k oběma kolmou, společným středem těch křivek procházející za souřadnou rovinu YZ. Jest na bíledni, že za bod b (sr. odst. 1.) nejlépe se tu hodí střed tvořící kuželosečky B.

Bude pak zajisté, poněvadž platí pro A_s, je-li kružnicí:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{gathered}$$

a pro B, je-li kružnicí:

$$\begin{gathered} (x - \alpha)^2 + z^2 = r^2 \\ y = \beta \end{gathered} \tag{2}$$

a protože bod $b\,(\alpha, \beta, 0)$ křivce A_s hoví, nutno psáti:

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 = R^2 \\ \gamma = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Vyloučením α, β, γ z rovnic (2), (3) a současným zracionalisováním ihned se obdrží pro rovnici plochy kruho-kruhové doba tato:

$$(x^2 - y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2\,(R^2 - y^2) = 0. \tag{4}$$

Že plocha jest stupně čtvrtého a že počátek soustavy jest středem jejím, na pohled se potvrzuje; také jest snadno poznati, že roviny, jež jsme za souřadné zvolili, v pravdě jsou ploše rovinami normalné souměrnosti.

Zcela obdobným postupem obdržíme i pro ostatních pět druhů ploch P příslušné rovnice, totiž:
pro *plochu hyp. kruh. typu a:*

(5) $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. kruh. typu b:

(6) $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 - R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu a:

(7) $(x^2 + y^2 - z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu b:

(8) $(x^2 + y^2 - z^2 + R^2 + r^2)^2 - 4x^2(y^2 + R^2) = 0,$

hyp. hyp. typu c:

(9) $(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)^2 - 4x^2(y^2 - R^2) = 0.$

5. Píšeme-li rovnici (4) takto:

$$[x^2 + (R + y)(R - y) - (r + z)(r - z)]^2 - 4x^2(R + y)(R - y) = 0,$$

a povšimneme-li si, že lze obdobně psáti též ostatních pět rovnic, značíme-li pak linearné výrazy zde se vyskytující kratčeji resp. A, B, C, D, E, poznáme, že všechny rovnice ty mají společný tvar

(I) $$(A^2 + BC - DE)^2 - 4A^2BC = 0.$$

Touž plochu, jakou vyjadřuje rovnice (4), obdržíme však, jestliže se po kružnici B_s

$$x^2 + z^2 = r^2$$
$$y = 0$$

středem svým posouvá kružnice A

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$
$$z = \gamma.$$

Poněvadž tu bod b $(\alpha, 0, \gamma)$ křivce B_s hoví, nutno psáti

$$\alpha^2 + \gamma^2 = r^2$$
$$\beta = 0$$
$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$
$$z = \gamma,$$

z kteréžto soustavy vychází vyloučením α, β, γ a jestliže výsledek zracionalníme,

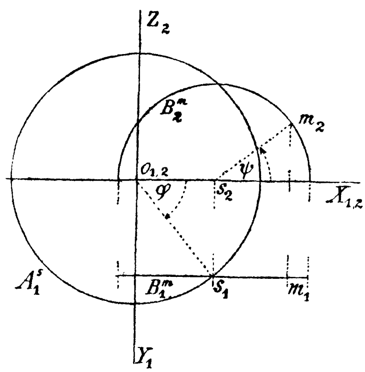
(10) $(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)^2 - 4x^2(r^2 - z^2) = 0$

jako rovnice plochy translační, jež, dosadíme-li za linearné výrazy označení svrchu zavedené, nabývá tvaru od (I) poněkud odchylného, totiž

$$\text{(II)} \qquad (A^2 - BC + DE)^2 - 4A^2DE = 0,$$

na který, jak se rozumí, i rovnice (4) až (9) všech ostatních ploch lze uvésti, odvodíme-li je, jako zde se stalo, translací kuželosečky A po B_s.

Jiný způsob, jehož k analytickému vyjádření plochy P s prospěchem možno užiti, jest tento:



Obr. 1.

Libovolný bod m plochy translační jest na určité kružnici Bm, jemu příslušný poloměr kružnice Bm, mající délku r, jest od osy X odchýlen o úhel ψ, její střed s jest na konci poloměru kružnice A_s od osy X o úhel φ odchýleného, jehož délka jest R (obr. 1.). Z toho ihned následuje pro souřadnice řečeného bodu m, že

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} x &= R\cos\varphi + r\cos\psi \\ y &= R\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi . \end{aligned}$$

Těmito třemi rovnicemi lze každý bod uvažované plochy vyjádřiti užitím proměnných parametrů φ, ψ na sobě nezávislých. Vyloučíme-li je z těchto rovnic, vychází ihned

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{r^2 - z^2},$$

z čehož po náležitém zracionalnění plyne

(12) $[x^2 + y^2 + z^2 - (R^2 + r^2)]^2 - 4(R^2 - y^2)(r^2 - z^2) = 0$
jako třetí doba rovnice plochy P, již zavedením známých znaků psáti lze ve tvaru

(III) $$(A^2 - BC - DE)^2 - 4BCDE = 0,$$

na kterýž ovšem i ostatních pět ploch dotčeným způsobem uvésti lze. Budiž poznamenáno, že Kummer ve svém pojednání*) pro plochy čtvrtého stupně, jež mají dvojnou kuželosečku a dva páry bodů dvojných a k nimž, jak poznáme, i uvažované tuto plochy náleží, uvádí jen rovnici ve tvaru (I) a (II), nikoli však též ve tvaru (III), jejž právě jsme odvodili.

Také ještě připomeňme, že rovnicemi (11) uvedené vyjádření souřadnic libovolného bodu plochy translační vyplývá též ze způsobu Lieova, v odst. 1. uvedeného, jakož ihned vysvitne, povážíme-li, že lze kružnici A_s vyjádřiti rovnicemi

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$z = 0,$$

kružnici pak B_s rovnicemi

$$x = r\cos\psi$$
$$y = 0$$
$$z = r\sin\psi.$$

Rovnice plochy jsou pak

$$x = R\cos\varphi + r\cos\psi$$
$$y = R\sin\varphi$$
$$z = r\sin\psi.$$

Chceme-li konečně rovnice uvažované plochy nabyti na základě onoho zákona výtvarného, jejž jsme v odst. 2. vyložili, vyjděme od kružnic $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, jež jsou v soustavě souřadné pravoúhlé dány rovnicemi

---

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1863.

$$\mathfrak{A}\begin{cases} x^2+y^2=(1-\lambda)^2R^2\\ z=0,\end{cases}$$

$$\mathfrak{B}\begin{cases} x^2+z^2=(1-\lambda)^2r^2\\ y=0.\end{cases}$$

Pak jsou souřadnice bodu p, který dělí spojnici bodu $\mathfrak{a}(x_1, y_1, z_1)$ křivky $\mathfrak{A}$ s bodem $\mathfrak{b}(x_2, y_2, z_2)$ křivky $\mathfrak{B}$ dle poměru λ, tyto:

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$$

$$y=\frac{y_1}{1-\lambda}$$

$$z=\frac{-\lambda z_2}{1-\lambda}.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic a z rovnic

$$x_1^2+y_1^2=(1-\lambda)^2R^2$$
$$x_2^2+z_2^2=(1-\lambda)^2r^2$$

veličiny x_1, y_1, x_2, z_2, nabudeme rovnice plochy ve tvaru

$$(x^2+y^2+z^2-R^2-\lambda^2r^2)^2=4(R^2-y^2)(\lambda^2r^2-z^2),$$

který se pro $\lambda=-1$ úplně srovnává s rovnicí (12).

Položíme-li v rovnicích (4) a (10) za první výraz v závorkách M, za druhý N, za činitel jemu předcházející $4P^2$, můžeme po příkladě Kummerově obě ty rovnice, jakož i pět ku každé příslušných, obsáhnouti tvarem

$$M^2-4P^2N=0. \tag{IV}$$

6. Vložíme-li do rovnice (4)

$$y=c, \tag{13}$$

stane se levá její strana rozdílem kvadrátů, jehož rozkladem v linearné činitele a srovnáním každého s nullou vychází

$$\begin{aligned} x^2+z^2+2x\sqrt{R^2-c^2}+R^2-r^2-c^2=0\\ x^2+z^2-2x\sqrt{R^2-c^2}+R^2-r^2-c^2=0,\end{aligned} \tag{14}$$

což patrně značí rovnice dvou kuželoseček, v nichž rovina (13) plochu protíná.

Jsou to dvě křivky kruhové o poloměru r a středech v A_s, tudíž dvě křivky soustavy B.

Podobně substituce

$$z = C \tag{15}$$

do rovnice (10), dává rozdíl kvadratů, jenž rozložen v linearné činitele a s nullou srovnán vede k rovnicím:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2x\sqrt{r^2 - C^2} - R^2 + r^2 - C^2) &= 0 \\ (x^2 + y^2 - 2x\sqrt{r^2 - C^2} - R^2 + r^2 - C^2) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

dvou křivek kruhových soustavy A.

Protíná tedy každá rovina osnovy XZ plochu ve dvou kružnicích soustavy B, každá rovina osnovy XY ve dvou kružnicích soustavy A.

Pro

$$c = \pm R \tag{17}$$

znějí rovnice (14) souhlasně, totiž:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + z^2 - r^2 &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

t. j. každou z rovin $y = R$, $y = -R$ plocha se protíná ve dvou splývajících kruh. křivkách soustavy B.

Pro

$$C = \pm r \tag{19}$$

vychází z rovnic (16) souhlasně

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

t. j. každou z rovin $z = r$, $z = -r$ plocha se protíná ve dvou splývajících křivkách kruhových soustavy A.

Rovnice roviny tečné v libovolném bodě x, y, z plochy, dané rovnicí (4) zní

$$\begin{aligned} & x(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)(\xi - x) \\ + & y(x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2)(\eta - y) \\ + & z(x^2 - y^2 + z^2 + R^2 - r^2)(\zeta - z) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Pro libovolný bod kružnic, daných rovnicemi (19), (20), totiž kružnice

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,\ z = r$$

jakož i kružnice

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,\ z = -r$$

rovnice ona se zjednoduší. Jde totiž z rovnic těchto, druhou-li zdvojmocníme a k prvé přičteme,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 0,$$

od prvé-li odečteme,

$$x^2 + y^2 - z^2 - R^2 + r^2 = 0,$$

a vložením těchto hodnot do (21) vychází, jelikož součinitel při $(\xi - x)$ a $(\eta - y)$ činí nullou, a součinitel při $(\zeta - z)$ mění v $2r(R^2 - y^2)$, tato rovnice roviny tečné v libovolném bodě kružnice prvé:

$$2r(\zeta - r) = 0,$$

a tato v libovolném bodě druhé:

$$2r(\zeta + r) = 0,$$

tudíž

$$\begin{aligned} \zeta &= r \\ \zeta &= -r. \end{aligned} \tag{22}$$

Rovina tečná kteréhokoliv bodu kterékoliv z obou křivek splývá tedy s rovinou každé z nich, dotýkajíc se plochy P po celém obvodu křivky. Roviny ty jsou tedy singularnými rovinami tečnými plochy uvažované, jež zveme podle Cayleye cnic-trops. Dotýkají se plochy podle křivek A_o, A_ω.

Obdobně lze dokázati o rovinách kružnic, daných rovnicemi (17), (18), totiž:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - r^2 = 0,\ y = R \\ x^2 + z^2 - r^2 = 0,\ y = -R, \end{aligned}$$

že jsou singularnými tečnými rovinami plochy, dotýkajíce se jí každá podél celé kruhové křivky.

Jsou to roviny

$$(23) \qquad \begin{aligned} y &= R \\ y &= -R \end{aligned}$$

a příslušné křivky kruhové jsou B_o, B_ω.

Úvahy předešlým zcela obdobné lze provésti při všech ostatních pěti hlavních druzích ploch P, daných rovnicemi (4) až (9), i přesvědčíme se pokaždé o existenci čtyř singularných rovin tečných, z nichž dvě podél kuželoseček A_o, A_ω, druhé podél B_o, B_ω plochy se dotýkají.

Výsledky právě obdržené a singularních rovnic se týkající, rychleji obdrží se užitím rovnice (IV).

Položíme-li totiž $N = 0$, což vzhledem k rovnici (4) zní

$$R^2 - y^2 = 0,$$

vychází ihned $M^2 = 0$ čili $(x^2 + z^2 - r^2)^2 = 0$ na důkaz, že každá z rovin $y = \pm R$ seče plochu ve dvou splývajících kružnicích poloměru r, hledíme-li při tom k rovnici (11), poznáváme obdobně, že pro

$$r^2 - z^2 = 0$$

vychází

$$(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 0,$$

pročež každá z rovin $z = \pm r$ seče plochu ve známých dvou splývajících kružnicích druhé soustavy.

Poněvadž kružnice obdržené, jak v následujícím se pozná, ke dvojné křivce nenáležejí, jsou to nutně prve řečené cnictropy, roviny jejich tedy singularnými rovinami tečnými. Dá se ukázati*), že Hessiana plochy translační prochází všemi cnictropy, z čehož jde na jevo, že tyto kuželosečky, obsažené v singularních rovinách, náležejí ke *křivce parabolických bodů* plochy translační.

Povšimneme-li si nyní ještě rovnice (III), poznáme, že pro

$$(\alpha) \qquad A^2 - BC - DE^2 = 0$$

vychází

$$(\beta) \qquad BCDE = 0,$$

*) Srov. mé pojednání: „O některých plochách polarných plochy posouvání kruho-kruhové“ v roč. XIII. tohoto časopisu, pag. 9.

z čehož patrno, že kvadratická plocha (α) protíná translační plochu P v křivkách, jež leží v singularných tečných rovinách

$$B = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,$$

tudíž ve všech jejích cnictropech.

Pro případ plochy kruho-kruhové (rovn. 12) jest (α) plochou kulovou s P soustřednou o poloměru $\sqrt{R^2 + r^2}$; pro ostatních pět druhů ploch translačních příslušné výsledky snadně se odvodí.

7. Majíce počtářsky stanoviti dvojnou křivku a dvojné body plochy P, uvažme, že podmínka, aby plocha nějaká měla bod dvojný, vyjadřuje se vymizením diskriminanty její rovnice.

Je-li rovnice plochy v souřadnicích homogenních x, y, z, v dána dobou $P = 0$, jest diskriminanta výsledkem vyloučení proměnných x, y, z, v ze soustavy rovnic

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial P}{\partial v} = 0.$$

Jestliže při tom čtyři plochy rovnicemi těmi představené nemají toliko jednotlivé body společné, nýbrž celou nějakou křivku, jest křivka ta dvojnou křivkou plochy $P = 0$, každý její bod ovšem bodem dvojným.

Výpočet proveďme při jedné ze šesti ploch, daných rovnicemi (4) až (9), na př. při ploše hyperbolo-hyperbolické typu a.

Rovnice její (7) vyjádřena v souřadnicích homogenních nabude, píšeme-li za x, y, z po řadě $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$, $\frac{z}{v}$, tvaru

$$P \equiv [x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2]^2 - 4x^2 (y^2 + R^2 v^2) = 0,$$

i bude pak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial x} \equiv x\,[x^2 - y^2 - z^2 - (R^2 + r^2)\, v^2] = 0\\
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial y} \equiv y\,[-x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2] = 0\\
(24)\quad &\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial z} \equiv z\,[x^2 + y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\, v^2] = 0\\
&\frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial v} \equiv v\,[-x^2 (R^2 + r^2) + y^2 (R^2 - r^2) - z^2 (R^2 - r^2)\\
&\qquad + (R^2 - r^2)^2 v^2] = 0.
\end{aligned}$$

Vložíme-li do rovnic těch $x = 0$, zmizí prvá a ostatní budou:

$$y\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] = 0,$$
$$z\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] = 0,$$
$$v\,[y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2] = 0,$$

z čehož na pohled patrno, že křivka

$$\begin{matrix} y^2 - z^2 + (R^2 - r^2)\,v^2 = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \tag{25}$$

všem plochám

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = 0$$

jest společna. Toť tedy dvojná kuželosečka uvažované plochy (7). Její rovnice v souřadnicích Cartesiových obdrží se, vložíme-li $v = 1$, i zní

$$\begin{matrix} y^2 - z^2 + (R^2 - r^2) = 0 \\ x = 0. \end{matrix} \tag{26}$$

Inflekční kuželová plocha každého bodu dvojné křivky nějaké plochy degeneruje, jak známo, ve dvě roviny tečné v tom bodě ku ploše, jeť každý ten bod biplanarným bodem plochy. Obdrží pak se rovnice kužele inflekčního, transformujeme-li rovnici plochy na onen bod dvojný jako počátek.

Při té transformaci zmizí člen samostatný i člen rozměru prvého z rovnice, t. j. podle obvyklého označení bude

$$u^{(0)} = 0, \; u^{(1)} = 0,$$

člen pak rozměru druhého s nullou srovnán, t. j.

$$u^{(2)} = 0$$

značí rovnici inflekčního kužele.

Nazveme-li v případě daném rovnicí (7) souřadnice libovolného bodu kuželosečky (26) 0, m, n, při čemž arci platí

$$m^2 - n^2 + R^2 - r^2 = 0, \tag{27}$$

bude rovnice plochy, transformovaná na počátek $(0, m, n)$, zníti

$$(28) \qquad (x^2 + y^2 - z^2 + 2my - 2nz)^2 - 4x^2(y^2 + 2ny + R^2 + m^2) = 0.$$

Patrně tu

$$u^{(0)} = 0, \; u^{(1)} = 0$$

kdežto

$$u^{(2)} = 0,$$

zní

$$(29) \qquad (m^2 + R^2)\, x^2 - (my - nz)^2 = 0.$$

Toť rovnice inflekční plochy kuželové, jež skládá se však z rovin

$$(30) \qquad \begin{aligned} \sqrt{m^2 + R^2}\, x - my + nz &= 0 \\ \sqrt{m^2 + R^2}\, x + my - nz &= 0, \end{aligned}$$

tečných to rovin plochy hyperbolo-hyperbolické v bodě křivky dvojné, zvoleném za počátek soustavy. Tím znova jest stvrzeno, že křivka (26) jest dvojnou křivkou plochy.

(Dokončení.)

Rozšíření poučky o neurčitých koëfficientech.

Napsal

Dr. **Jan Pexider** v Paříži.

Jsou-li dvě konečné řady funkcí

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \ldots + u_n\varphi_n(x) \\ &v_0 + v_1\varphi_1(x) + v_2\varphi_2(x) + \ldots + v_n\varphi_n(x), \end{aligned}$$

z nichž žádná není algebraicky lineárnou funkcí druhých a u_k, v_k značí konstanty, sobě rovné pro nekonečně mnoho různých hodnot x_1, x_2, $x_3, \ldots$, číselně menších než libovolná hodnota A, jsou obě řady identické, t. j. platí

$$u_0 = v_0, \; u_1 = v_1, \ldots, \; u_n = v_n.$$

Důkaz. Buďtež x_1, $x_2, \ldots$, x_{n+1} libovolně volené hodnoty menší než A, ale takové, že pro ně žádná z funkcí $\varphi_k(x)$ nena-