Jan Schuster

O objemu bipyramidoidu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 2, 83--86

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122752

O objemu bipyramidoidu.

Dr. Jan Schuster.

V Rozhledech matematických a přírodovědeckých z r. 1927/28, str. 40, jsem udal formuli pro plošný obsah mnohoúhelníka ze stran a úhlopříček sestrojený, který dovoluje rozšíření na prostor potud, že se stejně vyjádří objem tělesa, jež vznikne, když vrcholy obecného $2n$-úhelníka prostorového spojíme s dalšími dvěma body, takže stěny jsou vesměs trojúhelníky sdružující se ve dva pláště.

Značme rohy $2n$-úhelníka řadovými indexy od 1 do $2n$, zbývající dva rohy indexem 0 a $+$. Za základní prvek objemový vezmeme dva sousední 4-stěny, určené body 0, $+$ a dvěma sousedními rohy $2n$-úhelníka, a jeho šestinásobný objem roven součtu dvou determinantů

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_+ & x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_+ & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_0 & x_+ & x_2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_+ - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_1 \\ y_+ - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_1 \\ z_+ - z_0 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

kde toliko v posledním pro stručnost vypsány všecky prvky.

Celý objem roven součtu takových determinantů a jeho čtverec dán výrazem

$$36\,O^2 = \sum_{k,l} \begin{vmatrix} x_+ - x_0 & \ldots \\ x_{2k} - x_0 & \ldots \\ x_{2k+1} - x_{2k-1} & \ldots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_+ - x_0 & \ldots \\ x_{2l} - x_0 & \ldots \\ x_{2l+1} - x_{2l-1} & \ldots \end{vmatrix}.$$

Označíme-li v úsečku spojující vrcholy 0, $+$, dále b_m spojnici rohu m s rohem 0, c_m obdobnou spojnici rohu $+$ s m, a_{mn} spojnici bodů m a n, bude

$$288\,O^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} v^2 & b^2_{2k} + v^2 - c^2_{2l} & b^2_{2l+1} - c^2_{2l+1} - b^2_{2l-1} + c^2_{2l-1} \\ b^2_{2k} + v^2 - c^2_{2k} & b^2_{2k} + b^2_{2l} - a^2_{2k,\,2l} & b^2_{2l+1} - b^2_{2l-1} - a^2_{2k,\,2l+1} + a^2_{2l-1,\,2k} \\ b^2_{2k+1} - c^2_{2k+1} - b^2_{2k-1} + c^2_{2k-1} & b^2_{2k+1} - b^2_{2k-1} - a^2_{2k+1,\,2l} + a^2_{2k-1,\,2l} & a^2_{2k+1,\,2l-1} - a^2_{2k+1,\,2l+1} - a^2_{2k-1,\,2l-1} + a^2_{2k-1,\,2l+1} \end{vmatrix}$$

když vynechány zrušené členy v^2, $b^2{}_{2l}$, $a^2{}_{2l+1,\,2l-1}$ resp. ve členech posledního řádku, resp. v^2, $b^2{}_{2k}$ ve zbývajících prvcích posledního sloupce.

Tento výraz přetvoříme tak, že první řádek odečteme od druhého, který se tím změní na tvar:

$$b^2{}_{2k} - c^2{}_{2k},\; b^2{}_{2k} + c^2{}_{2l} - a^2{}_{2k,\,2l} - v^2,\; c^2{}_{2l+1} - c^2{}_{2l-1} - a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2l-1,\,2k}.$$

Když týž úkon opakujeme ve sloupcích, bude

$$288\,O^2 =$$

$$= \sum_{k,l} \begin{vmatrix} v^2 & b^2{}_{2l} - c^2{}_{2l} & b^2{}_{2l+1} - c^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} + c^2{}_{2l-1} \\ b^2{}_{2k} - c^2{}_{2k} & c^2{}_{2k} + c^2{}_{2l} - a^2{}_{2k,\,2l} - v^2 & b^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} - a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2l-1,\,2k} \\ b^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k+1} - b^2{}_{2k-1} + c^2{}_{2k-1} & c^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l} & a^2{}_{2k+1,\,2l-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l+1} - a^2{}_{2k-1,\,2l-1} + a^2{}_{2k-1,\,2l+1} \end{vmatrix}.$$

Když rozvineme tento determinant podle prvků prvního sloupce, lze v prvním členu

$$v^2 \sum_{k,l} \begin{vmatrix} c^2{}_{2k} + c^2{}_{2l} - v^2 - a^2{}_{2k,\,2l} & b^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} - a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2l-1,\,2k} \\ c^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l} & a^2{}_{2k+1,\,2l-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l+1} - a^2{}_{2k-1,\,2l-1} + a^2{}_{2k-1,\,2l+1} \end{vmatrix}$$

sečítat po částech. Rozvineme-li první sloupec podle členů obsahujících jen index k (l), zruší se v součtu podle indexu l (k) provedeném všecky členy druhého sloupce. Rovněž odpadnou ze součtu členy obsahující v^4. Zbudou tedy v prvním sloupci pouze členy $-a^2{}_{2k,\,2l}$, $-a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l}$.

Provedeme-li touž úvahu se členy $b^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1}$ druhého sloupce, sečítajíce podle indexu k, odpadne zase vše. Zbývá pak celkem

$$v^2 \sum_{k,l} \begin{vmatrix} -a^2{}_{2k,\,2l} & -a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2k,\,2l-1} \\ -a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l} & a^2{}_{2k+1,\,2l-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l+1} - a^2{}_{2k-1,\,2l-1} + a^2{}_{2k-1,\,2l+1} \end{vmatrix}.$$

Podobně provedeme součty ve druhém členu podle l, čímž odpadne z posledního řádku druhéhi sloupce $c^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k-1}$, a člen onen zní:

$$\sum_{k,l} -(b^2{}_{2k} - c^2{}_{2k}) \begin{vmatrix} b^2{}_{2k} - c^2{}_{2l} & b^2{}_{2l+1} - c^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} + c^2{}_{2l-1} \\ -a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l} & a^2{}_{2k-1,\,2l-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l+1} - a^2{}_{2k-1,\,2l-1} + a^2{}_{2k-1,\,2l+1} \end{vmatrix}.$$

Třetí člen se pak stejným sčítáním převede na

$$\sum_{k,l} (b^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k+1} - b^2{}_{2k-1} + c^2{}_{2k-1}) \begin{vmatrix} b^2{}_{2l} - c^2{}_{2l} & b^2{}_{2l+1} - c^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} + c^2{}_{2l-1} \\ -a^2{}_{2k,\,2l} & -a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2l-1,\,2k} \end{vmatrix}$$

a celý výsledek pak jest:

$$288\, O^2 =$$

$$\sum_{k,l} \begin{vmatrix} v^2 & b^2{}_{2l} - c^2{}_{2l} & b^2{}_{2l+1} - c^2{}_{2l+1} - b^2{}_{2l-1} + c^2{}_{2l-1} \\ b^2{}_{2k} - c^2{}_{2k} & -a^2{}_{2k,\,2l} & -a^2{}_{2k,\,2l+1} + a^2{}_{2k,\,2l-1} \\ b^2{}_{2k+1} - c^2{}_{2k+1} - b^2{}_{2k-1} + c^2{}_{2k-1} & -a^2{}_{2k+1,\,2l} + a^2{}_{2k-1,\,2l} & a^2{}_{2k+1,\,2l-1} - a^2{}_{2k+1,\,2l+1} - a^2{}_{2k-1,\,2l-1} + a^2{}_{2k-1,\,2l-1} \end{vmatrix}.$$

Všude se sečítá podle k, l od 1 do $2n$, navzájem nezávisle.

Jde-li o bipyramidoid s lichým počtem rohů, změní se dvojím oběhem v sudorohý.

Podstatné zjednodušení nastane ve výrazu pro šestiroh. Značíme-li nyní 5, 6 rohy 0, + resp. protože přestává význačnost rohů těchto, obdržíme pro šestinásobný objem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & x_6 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & x_6 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & x_6 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & x_6 & x_4 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_5 & x_6 & x_2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0, \\ x_5 & x_6 & x_4 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_6 - x_5 & x_2 - x_4 & x_3 - x_1 \\ y_6 - y_5 & y_2 - y_4 & y_3 - y_1 \\ z_6 - z_5 & z_2 - z_4 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

což je zobecnění výrazu pro obsah rovinného čtyřúhelníka, který se dá umocněním na čtverec převést na vztah:

$$288\, O^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a^2{}_{56} & a_{25} + a^2{}_{46} - a^2{}_{26} - a^2{}_{45}, & a^2{}_{35} + a^2{}_{16} - a^2{}_{36} - a^2{}_{15} \\ a^2{}_{25} + a^2{}_{46} - a^2{}_{26} - a^2{}_{45}, & a^2{}_{24} & a^2{}_{34} + a^2{}_{12} - a^2{}_{32} - a^2{}_{14} \\ a^2{}_{35} + a^2{}_{16} - a^2{}_{36} - a^2{}_{15}, & a^2{}_{34} + a^2{}_{12} - a^2{}_{32} - a^2{}_{14}, & a^2{}_{31} \end{vmatrix}.$$

*

Sur le volume d'un bipyramidoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans les „Rozhledy matematicko-přírodovědecké“ 1927-28 p. 40 l'auteur a déduit une formule rationnelle pour le carré de l'aire d'un polygone plan en fonction des carrés des côtés. Le présent travail donne une extension de la méthode employée à la détermination du volume d'un corps à $2n + 2$ sommets, dont $2n$ appartiennent à un polygone gauche, et les deux derniers sont joints aux précédents par des arêtes d'une telle façon que toutes les faces ont la forme de triangles, formant deux manteaux. Le cas spécial d'un octaèdre, considéré comme généralisation du quadrilatère plan, donne naissance à une extension naturelle à trois dimensions de la formule valable pour deux dimensions.