Relativní pohyb bodu při n soustavách na sobě závislých.

Dr. *Jindřich Kubíček,* prof. stát. prům. školy, Brno.

Mějme v pevné soustavě souřadnicové o začátku O n pohyblivých soustav. Pohyb i-té soustavy vzhledem k předcházející je určen změnou průvodiče $\mathbf{c}_{i-1}$ začátku A_i a osou rotační $\mathbf{w}_i$ procházející tímto začátkem.

Jest určiti absolutní rychlost a zrychlení bodu M, který se pohybuje v n-té soustavě.

Uvažujme pohyb bodu M vzhledem k první pohyblivé soustavě $(A_1\mathbf{w}_1)$. Jak známo, absolutní rychlost a zrychlení bodu M jsou dány rovnicemi

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{c}_0}{dt} + \frac{^{(1)}d\mathbf{s}_1}{dt} + [\mathbf{w}_1\mathbf{s}_1], \tag{1}$$

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{c}_0}{dt^2} + [\mathbf{w}_1\,[\mathbf{w}_1\mathbf{s}_1]] + \left[\frac{d\mathbf{w}_1}{dt}\,\mathbf{s}_1\right] + 2\left[\mathbf{w}_1\,\frac{^{(1)}d\mathbf{s}_1}{dt}\right] + \frac{^{(1)}d^2\mathbf{s}_1}{dt^2}, \tag{2}$$

kde derivace vzhledem k pohyblivé soustavě je označena $^{(1)}d$. První člen na pravé straně rovnice (1) je rychlost posuvná $\mathbf{v}_p$, $\frac{^{(1)}d\mathbf{s}_1}{dt}$ je rychlost relativní $\mathbf{v}_r$ a $[\mathbf{w}_1\,\mathbf{s}_1]$ je otáčivá rychlost $\mathbf{v}_0$ kolem osy $\mathbf{w}_1$. Součet $\frac{d\mathbf{c}_0}{dt} + [\mathbf{w}_1\mathbf{s}_1]$ dává rychlost z vedení $\mathbf{v}_v$. Platí tedy pro rychlost absolutní

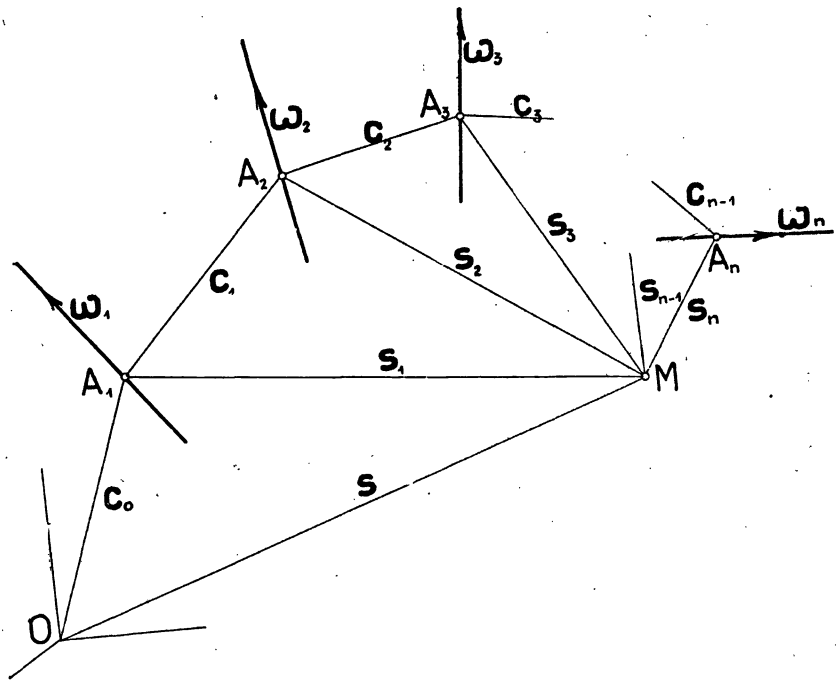
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_v + \mathbf{v}_r.$$

V rovnici (2) první tři členy na pravé straně tvoří zrychlení z vedení $\mathbf{a}_v$, při čemž $\frac{d^2\mathbf{c}_0}{dt}$ je zrychlení posuvné, $[\mathbf{w}_1\,[\mathbf{w}_1\mathbf{s}_1]]$ nazveme podle anglického způsobu zrychlením dostředivým a člen $\left[\frac{d\mathbf{w}_1}{dt}\,\mathbf{s}_1\right]$ nechť se zove zrychlení osové. Poslední dva členy na pravé straně rovnice (2) jsou zrychlení Coriolisovo $\mathbf{a}_c$ a relativní zrychlení $\mathbf{a}_r$.

Jest tedy absolutní zrychlení

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_v + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r.$$

Jak patrno z rovnic (1) a (2), absolutní rychlost zůstane stejná, jestliže se napřed děje pohyb z vedení a potom pohyb relativní. Pro zrychlení to neplatí, neboť zrychlení Coriolisovo plyne právě ze současné existence pohybu vedeného a relativního. Zákon posloupnosti časové platí tedy pouze pro rychlost.



Uvažujme pohyb bodu M vzhledem ke druhé soustavě $(A_2\mathbf{w}_2)$; pak v rovnici pro absolutní rychlost (1) nutno dosaditi

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{s}_2 \tag{3}$$

a

$$\frac{^{(1)}d\mathbf{s}_1}{dt} = \frac{^{(1)}d\mathbf{c}}{dt} + \frac{^{(2)}d\mathbf{s}_2}{dt} + [\mathbf{w}_2\mathbf{s}_2], \tag{4}$$

takže vychází

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{c}_0}{dt} + \frac{^{(1)}d\mathbf{c}}{dt} + [\mathbf{w}_1, \mathbf{c}_1 + \mathbf{s}_1] + [\mathbf{w}_2, \mathbf{s}_2] + \frac{^{(2)}d\mathbf{s}_2}{dt},$$

anebo

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dc_0}{dt} + \frac{^{(1)}dc_1}{dt} + [w_1 c_1] + [w_1 + w_2, s_2] + \frac{^{(2)}ds_2}{dt},$$

kde derivace vzhledem ke druhé soustavě je označena ${}^{(2)}d$. Postupujíce z $(i - 1)$ na i, obdržíme

$$\left.\begin{aligned} v_a = \frac{ds}{dt} = \frac{dc_0}{dt} + \frac{^{(1)}dc_1}{dt} + \frac{^{(2)}dc_2}{dt} + \ldots + \frac{^{(n-1)}dc_{n-1}}{dt} + \\ + [w_1c_1] + [w_1 + w_2, c_2] + \ldots + [w_1 + \ldots + w_{n-1}, c_{n-1}] + \\ + [w_1 + \ldots + w_n, s_n] + \frac{^{(n)}ds_n}{dt}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

derivace vzhledem k i-té soustavě je označena ${}^{(i)}d$.

Abychom určili absolutní zrychlení bodu M pohybujícího se nejprve vzhledem k soustavě (A_2w_2), nutno do rovnice (2) vedle vztahů (3) a (4) ještě dosaditi

$$\frac{^{(1)}d^2s_1}{dt^2} = \frac{^{(1)}d^2c_1}{dt^2} + [w_2 [w_2s_2]] + \left[\frac{^{(1)}dw_2}{dt} s_2\right] + 2\left[w_2 \frac{^{(2)}ds_2}{dt}\right] + \frac{^{(2)}d^2s_2}{dt^2}. \quad (6)$$

Takto vychází

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{^{(1)}d^2c_0}{dt^2} + [w_1 [w_1c_1]] + \left[\frac{^{(1)}dw_1}{dt} c_1\right] + 2\left[w_1 \frac{^{(1)}dc_1}{dt}\right] + \frac{^{(1)}d^2c_1}{dt^2} +$$
$$+ [w_1 [w_1s_2]] + 2 [w_1 [w_2s_2]] + [w_2 [w_2s_2]] +$$
$$+ 2\left[w_1 + w_2, \frac{^{(2)}ds_2}{dt}\right] + \left[\frac{dw_1}{dt} s_2\right] + \left[\frac{^{(1)}dw_2}{dt} s_2\right] + \frac{^{(2)}d^2s_2}{dt^2}.$$

Po redukci druhého řádku na základě distribučního pravidla na

$$[w_1 + w_2, [w_1 + w_2, s_2]]$$

obdržíme

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2c_0}{dt^2} + \frac{^{(1)}d^2c_1}{dt^2} + [w_1 [w_1c_1]] + \left[\frac{dw_1}{dt} c_1\right] + 2\left[w_1 \frac{^{(1)}dc_1}{dt}\right] +$$
$$+ [w_1 + w_2, [w_1 + w_2, s_2]] + \left[\frac{dw_1}{dt} + \frac{^{(1)}dw_2}{dt}, s_2\right] +$$
$$+ 2\left[w_1 + w_2, \frac{^{(2)}ds_2}{dt}\right] + \frac{^{(2)}d^2s_2}{dt^2}.$$

Indukcí vychází obecně

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_a = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{c}_0}{dt^2} + \frac{{}^{(1)}d^2\mathfrak{c}_1}{dt^2} + \ldots + \frac{{}^{(n-1)}d^2\mathfrak{c}_{n-1}}{dt^2} + \\
+ [\mathfrak{w}_1[\mathfrak{w}_1\mathfrak{c}_1]] + [\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2, [\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2, \mathfrak{c}_2]] + \ldots \\
\ldots + [\mathfrak{w}_1 + \ldots + \mathfrak{w}_n, [\mathfrak{w}_1 + \ldots + \mathfrak{w}_n, \mathfrak{s}_n]] + \\
+ \left[\frac{d\mathfrak{w}_1}{dt}\mathfrak{c}_1\right] + \left[\frac{d\mathfrak{w}_1}{dt} + \frac{{}^{(1)}d\mathfrak{w}_2}{dt}, \mathfrak{c}_2\right] + \ldots \\
\ldots + \left[\frac{d\mathfrak{w}_1}{dt} + \frac{{}^{(1)}d\mathfrak{w}_2}{dt} + \ldots \frac{{}^{(n-1)}d\mathfrak{w}_n}{dt}, \mathfrak{s}_n\right] + \\
+ 2\left[\mathfrak{w}_1 \frac{{}^{(1)}d\mathfrak{c}_1}{dt}\right] + 2\left[\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2, \frac{{}^{(2)}d\mathfrak{c}_2}{dt}\right] + \ldots \\
\ldots + 2\left[\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \ldots + \mathfrak{w}_n, \frac{{}^{(n)}d\mathfrak{s}_n}{dt}\right] + \frac{{}^{(n)}d^2\mathfrak{s}_n}{dt^2}.
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

Na pravé straně předchozí rovnice první řádek je zrychlení postupné, druhý a třetí řádek značí zrychlení dostředivé, čtvrtý a pátý řádek je zrychlení osové, šestý a sedmý zrychlení Coriolisovo a poslední zrychlení relativní.

Z obecných rovnic (5) a (7) je patrno, že právě tak jako při jedné pohyblivé soustavě zákon posloupnosti pohybu vedeného a relativního platí pouze pro rychlost. V absolutním zrychlení je část připadající na zrychlení Coriolisovo podmíněna současností pohybu vedeného a relativního.

Podle rovnic (5) a (7) možno rozložiti celkový pohyb bodu M na $(n + 1)$ složek vztahujících se k pohyblivým vrcholům vektorového mnohoúhelníka $OA_1 \ldots A_nM$. První složka je dána pohybem vrcholu A_1, druhá relativním pohybem vrcholu A_2 vzhledem k soustavě $(A_1\mathfrak{w}_1)$ a současným jeho pootočením kolem osy $\mathfrak{w}_1$; i-tá složka je dána relativním pohybem vrcholu A_i v soustavě $(A_{i-1}\mathfrak{w}_{i-1})$ a současným pootočením tohoto bodu kolem osy $\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \ldots$ $\ldots + \mathfrak{w}_{i-1}$ procházející předchozím vrcholem A_{i-1}.

Rovnice (5) a (7) lze také odvoditi z úvahy, že, zatím co začátky soustav se pohybují, otáčí se bod M současně kolem všech předcházejících os a pohybuje se zároveň relativně v poslední soustavě. Vyjádříme-li to matematicky, obdržíme

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{v}_a = \frac{d\mathfrak{c}_0}{dt} + \frac{{}^{(1)}d\mathfrak{c}_1}{dt} + \frac{{}^{(2)}d\mathfrak{c}_2}{dt} + \ldots + \frac{{}^{(n-1)}d\mathfrak{c}_{n-1}}{dt} + \frac{{}^{(n)}d\mathfrak{s}_n}{dt} + \\
+ [\mathfrak{w}_1\mathfrak{s}_1] + [\mathfrak{w}_2\mathfrak{s}_2] + \ldots + [\mathfrak{w}_n\mathfrak{s}_n], \\
\mathfrak{a}_a = \frac{d^2\mathfrak{c}_0}{dt^2} + \frac{{}^{(1)}d^2\mathfrak{c}_1}{dt^2} + \frac{{}^{(2)}d^2\mathfrak{c}_2}{dt^2} + \ldots + \frac{{}^{(n-1)}d^2\mathfrak{c}_{n-1}}{dt^2} + \frac{{}^{(n)}d^2\mathfrak{s}_n}{dt^2} + \\
+ [\mathfrak{w}_1[\mathfrak{w}_1\mathfrak{s}_1]] + \left[\frac{d\mathfrak{w}_1}{dt}\mathfrak{s}_1\right] + 2\left[\mathfrak{w}_1 \frac{{}^{(1)}d\mathfrak{s}_1}{dt}\right] +
\end{aligned}
$$

$$+ [\mathbf{w}_2 [\mathbf{w}_2 \mathbf{s}_2]] + \left[\frac{{}^{(1)}d\mathbf{w}_2}{dt} \mathbf{s}_2\right] + 2\left[\mathbf{w}_2 \frac{{}^{(2)}d\mathbf{s}_2}{dt}\right] +$$

$$\vdots$$

$$+ [\mathbf{w}_n [\mathbf{w}_n \mathbf{s}_n]] + \left[\frac{{}^{(n-1)}d\mathbf{w}_n}{dt} \mathbf{s}_n\right] + 2\left[\mathbf{w}_n \frac{{}^{(n)}d\mathbf{s}_n}{dt}\right].$$

Položíme-li v těchto rovnicích

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \ldots + \mathbf{s}_n$$
$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{c}_2 + \ldots + \mathbf{s}_n$$
$$\vdots$$

a použijeme-li vztahů:

$$\frac{{}^{(1)}d\mathbf{c}_2}{dt} = \frac{{}^{(2)}d\mathbf{c}_2}{dt} + [\mathbf{w}_2 \mathbf{c}_2],$$

$$\frac{{}^{(1)}d\mathbf{c}_3}{dt} = \frac{{}^{(2)}d\mathbf{c}_3}{dt} + [\mathbf{w}_2, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3] = \frac{{}^{(3)}d\mathbf{c}_3}{dt} + [\mathbf{w}_3 \mathbf{c}_3] + [\mathbf{w}_2, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3],$$

$$\vdots$$

$$\frac{{}^{(1)}d\mathbf{c}_i}{dt} = \frac{{}^{(i)}d\mathbf{c}_i}{dt} + [\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i] + [\mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{c}_{i-1} + \mathbf{c}_i] + \ldots + [\mathbf{w}_2, \mathbf{c}_2 + \ldots + \mathbf{c}_i],$$

$$\frac{{}^{(2)}d\mathbf{c}_i}{dt} = \frac{{}^{(i)}d\mathbf{c}_i}{dt} + [\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i] + [\mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{c}_{i-1} + \mathbf{c}_i] + \ldots + [\mathbf{w}_3, \mathbf{c}_3 + \ldots + \mathbf{c}_i]$$

$$\vdots$$

obdržíme rovnice (5) a (7).

*

Le mouvement relatif par rapport à n systèmes de comparaison.

(Extrait de l'article précédent.)

On établit les formules donnant la relation entre la vitesse et l'accélération absolues d'un mobile M et sa vitesse et son accélération rélatives par rapport à n systèmes $(A_1\mathbf{w}_1), \ldots (A_n\mathbf{w}_n)$, animés d'un mouvement connu.

Le mouvement absolu est la résultante de $(n + 1)$ composantes de la forme

$$\frac{\overline{d^2\mathbf{c}_i}}{dt^2} + [\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_i, [\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_i, \mathbf{c}_i]] +$$

$$+ \left[\frac{d\mathbf{w}_1}{dt} + \ldots + \frac{{}^{i-1}\overline{d\mathbf{w}_i}}{dt}, \mathbf{c}_i\right] + 2\left[\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_i, \frac{{}^{i}\overline{d\mathbf{c}_i}}{dt}\right].$$