Jan Sobotka
Poznámka k základním vztahům souřadnic projektivních

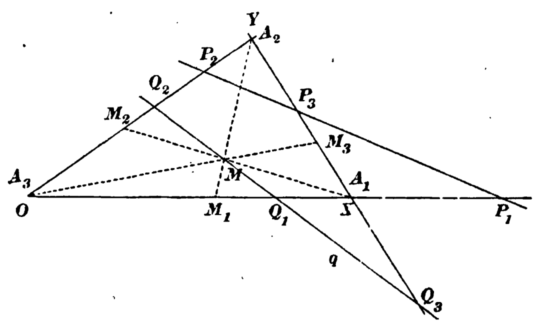
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 2, 87--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122746

Poznámka k základním vztahům souřadnic projektivních.

Napsal *J. Sobotka.*

1. T. Vahlen zavádí pro rovinu v originelním spisu „Konstruktionen und Approximationen" (Leipzig 1911), str. 12, nehomogenní souřadnice projektivní, čímž jest dán názorný přechod od souřadnic paralelních k těmto a naopak.



Obr. 1.

Je-li OXY základní trojúhelník (obr. 1), jehož strany buďtež příslušně o, $\overline{x}$, $\overline{y}$ a, je-li E bod jednotkový, jenž se promítá z vrcholů Y, X, O na protilehlé strany v E_1, E_2, E_3, tu když libovolný bod v rovině M se stejným způsobem promítá v body M_1, M_2, M_3, lze za souřadnice x, y bodu M zvoliti hodnoty dvojpoměrů

$$x = (XOE_1M_1), \quad y = (YOE_2M_2),$$

při čemž tedy považujeme $(OX) = x$ za osu souřadnic x a $(OY) = y$ za osu souřadnic y, takže pro bod O jest $x = y = 0$, pro bod X jest $x = \infty$, pro bod Y jest $y = \infty$ a pro bod E jest $x = y = 1$. Můžeme psáti též

$$x = Y(XOEM), \quad y = X(YOEM),$$

kde označujeme jako obvykle na pravých stranách těchto výrazů svazky přímek o vrcholech Y, resp. X, jež promítají body v závorkách vyznačené a x, y jsou hodnoty dvojpoměrů v těchto svazcích.

Je-li e přímka jednotková, jež seče strany $\overline{y}=x$, $\overline{x}=y$, o v bodech E'_1, E'_2, E'_3 a p libovolná přímka v rovině, která je seče v bodech P_1, P_2, P_3, pak volíme za souřadnice přímky p hodnoty $\xi = \overline{y}\,(\overline{x}oep)$, $\eta = \overline{x}(\overline{y}oep)$, kde značí jak obvykle pravé strany řady bodové vyťaté na y, resp. x přímkami v závorkách uvedenými. Jest tudíž $\xi = (OXE'_1P_1)$, $\eta = (OYE'_2P_2)$. Pro přímku bodem X jest $\xi = o$, pro přímku bodem Y jest $\eta = o$ a pro přímku bodem O jest $\xi = \infty$, $\eta = \infty$. Následkem toho mezi souřadnicemi libovolného bodu M a libovolné přímky p platí relace

$$x\xi = (XOE_1M_1)\,(OXE'_1P_1) = (XOE_1E'_1)\,(OXM_1P_1),$$
$$y\eta = (YOE_2M_2)\,(OYE'_2P_2) = (YOE_2E'_2)\,(OYM_2P_2).$$

Když volíme E a e tak, aby byly harmonické vzhledem k trojúhelníku OXY, pak jest $(XOE_1E'_1) = (YOE_2E'_2) = -1$, a tedy

$$x\xi = -(OXM_1P_1),\quad y\eta = -(OYM_2P_2).$$

Prochází-li přímka q, protínající x, y, o v bodech Q_1, Q_2, Q_3, bodem M, takže

$$x\xi = -(OXM_1Q_1),\quad y\eta = -(OYM_2Q_2),$$

pak jest, když promítáme z bodu M na přímku o

$$(OXM_1Q_1) = (M_3XYQ_3)$$
$$(OYM_2Q_2) = (M_3YXQ_3),$$

následkem čehož jest

$$(OXM_1Q_1) + (OYM_2Q_2) = (M_3XYQ_3) + (M_3YXQ_3) = 1.$$

Tedy pro bod a přímku, jež jsou incidentní, platí relace

$$x\xi + y\eta + 1 = 0, \tag{1}$$

jež značí rovnici přímky, mají-li ξ, η stálé hodnoty a rovnici bodu má-li x a y stálé hodnoty.

Takto jsme dospěli k nehomogenním souřadnicím projektivním, od nichž dospějeme k homogenním souřadnicím x_1, x_2, x_3, resp. ξ_1, ξ_2, ξ_3, když klademe

$$x = \frac{x_1}{x_3},\quad y = \frac{x_2}{x_3} \text{ a obdobně } \xi = \frac{\xi_1}{\xi_3},\quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

Označíme-li body O, X, Y nyní příslušně A_3, A_1, A_2, pak jest

$$\frac{x_1}{x_3} = (A_1A_3E_1M_1),\quad \frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_2M_2),$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = (A_3A_1E'_1Q_1), \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3A_2E'_2Q_2).$$

Zevšeobecněná věta Cevova vzhledem k bodům E a M praví, že

$$(A_1A_3E_1M_1)\ (A_3A_2E_2M_2)\ (A_2A_1E_3M_3) = 1.$$

Ježto

$$(A_1A_3E_1M_1) = \frac{x_1}{x_3}, \qquad (A_3A_2E_2M_2) = \frac{x_3}{x_2},$$

proto jest

$$\frac{x_1}{x_2}\,(A_2A_1E_3M_3) = 1$$

a tudíž

$$\frac{x_1}{x_2} = (A_1A_2E_3M_3).$$

Obdobně dává zevšeobecněná věta Menelaova vztah

$$(A_3A_1E'_1Q_1)\ (A_1A_2E'_3Q_3)\ (A_2A_3E'_2Q_2) = 1,$$

z čehož plyne

$$\frac{\xi_1}{\xi_3}\,(A_1A_2E'_3Q_2)\,.\,\frac{\xi_3}{\xi_2} = 1,$$

takže

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2A_1E'_3Q_3).$$

Tím jsme dospěli k známým rovnicím homogenním. Rovnice (1) přechází tu pak v rovnici

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0.$$

2. V následujícím budiž poukázáno k jednoduchému způsobu, jímž se dají právě provedené úvahy rozšířiti do prostoru. Mějme (obr. 2) čtyřstěn základní $OXYZ$ a zvolme přímky (OX), (OY), (OZ) za osy souřadnic. Roviny v čtyřstěnu protilehlé k vrcholům O, X, Y, Z buďtež O, X, Y, Z; bod jednotkový označme opět E a rovinu jednotkovou E. Za souřadnice x, y, z libovolného bodu M v prostoru zvolíme hodnoty dvojpoměrů

$$x = (YZ)(XOEM), \quad y = (ZX)(YOEM), \quad z = (XY)(ZOEM),$$

kde se na pravých stranách nacházejí svazky rovin o osách (YZ), (ZX), (XY), jejichž roviny obsahují body v závorkách dalších vyznačené.

Za souřadnice ξ, η, ζ libovolné roviny P zvolíme pak duálně hodnoty dvojpoměrů

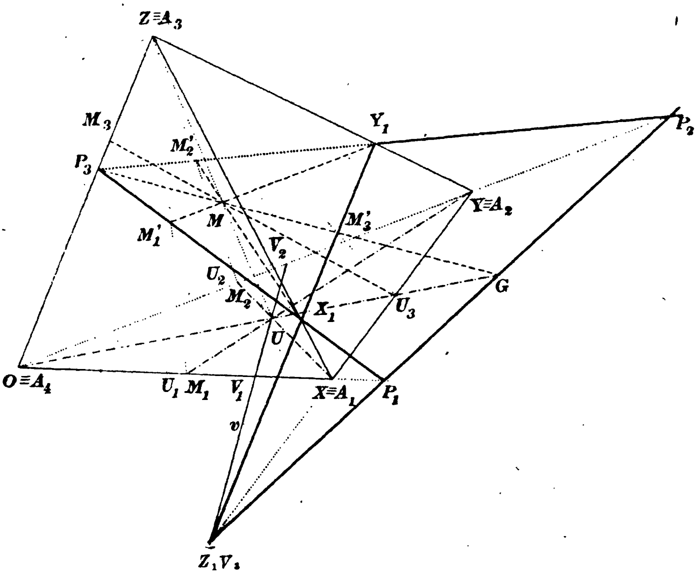
$$\xi = x\,(\mathrm{XOEP}), \quad \eta = y\,(\mathrm{YOEP}), \quad \zeta = z\,(\mathrm{ZOEP}),$$

kde na pravé straně vyznačeny jsou řady bodově vyťaté rovinami v závorkách uvedenými na osách x, y, resp. z.

Promítají-li se tudíž body E, M z přímky (YZ) na osu x do bodů E_1, M_1, z přímky (ZX) na y do bodů E_2, M_2 a z přímky (XY) na osu z do bodů E_3, M_3, jest

$$x = (XOE_1M_1),\; y = (YOE_2M_2),\; z = (ZOE_3M_3). \qquad (2)$$

Pro bod O jest tedy $x = y = z = o$ a pro body X, Y, Z jest příslušné $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$. Když duálně rovina E, P protí-



Obr. 2.

nají osu x v bodech E'_1, P_1, osu y v bodech E'_2, P_2 a osu z v bodech E'_3, P_3, jest

$$\xi = (OXE'_1P_1),\; \eta = (OYE'_2P_2),\; \zeta = (OZE'_3P_3). \qquad (3)$$

Pro rovinu bodem O jest tudíž $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, $\zeta = \infty$ a pro roviny bodem X, Y nebo Z jest příslušné $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$.

Z rovnic těchto plyne, když bod jednotkový E a rovina jednotková E leží harmonicky vzhledem k čtyřstěnu $OXYZ$ obdobně jako v úvaze předcházející

$$x\xi = -(OXM_1P_1),\; y\eta = -(OYM_2P_2),\; z\zeta = -(OZM_3P_3).$$

Předpokládejme nyní, že bod M a rovina P jsou incidentní, a hledejme zde vztah mezi součiny $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$. Rovina P protíná čtyřstěn $OXYZ$ v úplném čtařstranu, jehož tři strany jsou (P_1P_2),

(P_2P_3), (P_3P_1) a jehož čtvrtá strana leží v rovině (XYZ) a spojuje body X_1, Y_1, Z_1, v nichž se protínají sobě příslušné strany v perspektivních trojúhelnících XYZ, $P_1P_2P_3$, majících O za střed perspektivity. Při tom značí X_1 průsečík stran (XZ), (P_1P_3), dále Y_1 průsečík stran (ZY), (P_3P_2) a Z_1 průsečík stran (YX), (P_2P_1). Bod M v rovině P promítněme z vrcholů Y_1, X_1, P_3 trojúhelníka $Y_1X_1P_3$ na jeho strany protilehlé do bodů M'_1, M'_2, M'_3 a tyto body promítněme dále z bodu Z do roviny (OXY). Body M'_1 a M'_2 se tu promítají patrně v body M_1, M_2, při čemž se přímky (YM_1), (XM_2) protínají v bodě U, jenž jest průmětem bodu M z bodu Z do roviny (OXY). Rovina (zM) protíná rovinu (OXY) v přímce (OU) a rovinu P v přímce (P_3M); proto protínají se přímky tyto v bodě G, ležícím na přímce (P_1P_2) společné (OXY) a P. Průsečnice roviny (zM) s rovinou (XYZ) prochází bodem U_3, v němž (OU) protíná (XY), pak bodem M'_3 a obsahuje bod Z. Následkem toho jest U_3 průmětem bodu M'_3 z bodu Z. Přímka (U_3M) protíná z patrně v bodě M_3; neboť ona jest transversálou vedenou bodem M k protilehlým hranám (XY) a z daného čtyřstěnu. Z toho plyne, že

$$z\zeta = -(OZM_3P_3) = -(OUU_3G).$$

V rovině (OXY) prochází přímka (Z_1U) bodem U a protíná přímky (OX), (OY) v bodech, jež označíme V_1, V_2. Pro souřadnice v této rovině jest stopa dé ni přímky (ZE) bodem jednotkovým a roviny E přímkou jednotkovou, při čemž stopy tyto leží harmonicky vzhledem k trojúhelníku OXY. Následkem toho platí podle předcházejícího relace

$$(OXU_1V_1) + (OYU_2V_2) = 1$$

čili

$$(OXM_1V_1) + (OYM_2V_2) = 1,$$

z níž plyne

$$\frac{(OXM_1P_1)}{(OXV_1P_1)} + \frac{(OYM_2P_2)}{(OYV_2P_2)} = 1.$$

Avšak

$$(OXV_1P_1) = (OYV_2P_2) = (OU_3UG),$$

proto

$$(OXM_1P_1) + (OYM_2P_2) = (OU_3UG) = 1 - (OUU_3G).$$

Poněvadž $(OUU_3G) = (OZM_3P_3)$, plyne tu vztah

$$(OXM_1P_1) + (OYM_2P_2) + (OZM_3P_3) = 1,$$

takže

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0. \tag{4}$$

udává souvislost souřadnic bodu a roviny pro případ, že jsou incidentní.

Přechod od uvažovaných souřadnic nehomogenních k souřadnicím homogenním jest dán rovnicemi

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

a

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad \zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4},$$

z nichž jest geometrický význam těchto souřadnic patrný. Označíme-li nyní vrcholy O, X, Y, Z daného čtyřstěnu příslišné A_4, A_1, A_2, A_3, přecházejí rovnice (2) a (3) v rovnice

$$\frac{x_1}{x_4} = (A_1A_4E_1M_1), \; \frac{x_2}{x_4} = (A_2A_4E_2M_2), \; \frac{x_3}{x_4} = (A_3A_4E_3M_3),$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = (A_4A_1E'_1P_1), \; \frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_4A_2E'_2P_2), \; \frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_4A_3E'_3P_3),$$

z nichž pak plynou hodnoty pro $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ jakož i pro $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}$ způsobem prve vytknutým pro rovinu. Označíme-li průměty bodu E z přímek x, y, z na hrany protilehlé v čtyřstěnu příslušně E_4, E_5, E_6, bodu M pak M_4, M_5, M_6 a průsečíky rovin E, P s těmito hranami E'_4, E'_5, E'_6, pokud se týče P_4, P_5, P_6, tu plyne na př. z výrazů pro souřadnice v rovině $A_2A_3A_4$ přímo

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_4M_4), \; \frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3A_2E'_4P_4).$$

Rovnice (4) přechází tu v známou rovnici

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0.$$

Jsou-li pro $i = 1, \ldots, 4$, x_i, y_i souřadnice homogenní dvou bodů a ξ_i, η_i dvou rovin určujících přímku p, pak jsou homogenní souřadnice této přímky pro $k = 1, \ldots, 4$ a $k \neq i$,

$$p_{ik} = x_iy_k - x_ky_i, \text{ pokud se týče } q_{ik} = \xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i.$$

Vyjádříme-li tyto body a tyto přímky souřadnicemi nehomogenními x, y, z a x', y', z', resp. ξ, η, ζ a ξ', η', ζ', obdržíme

$$\varrho p_{12} = xy' - yx', \; \varrho p_{23} = yz' - zy', \; \varrho p_{31} = zx' - xz',$$
$$\varrho p_{14} = x - x', \quad \varrho p_{24} = y - y', \quad \varrho p_{34} = z - z'$$

a obdobně

$$\sigma q_{12} = \xi\eta' - \eta\xi', \; \sigma q_{23} = \eta\xi' - \zeta\eta', \; \sigma q_{31} = \zeta\xi' - \xi\zeta',$$
$$\sigma q_{14} = \xi - \xi', \quad \sigma q_{24} = \eta - \eta', \quad \sigma q_{34} = \zeta - \zeta'.$$

Protíná-li přímka p roviny souřadné (yz), (xz), (xy) příslušně v bodech M_1, M_2, M_3, jejichž souřadnice nechť jsou příslušně

$$O,\ Y_1,\ Z_1;\ X_2,\ O,\ Z_2;\ X_3,\ Y_3,\ O,$$

tu, jelikož libovolný bod na přímce p má rovnici

$$(x + \lambda x')\xi + (y + \lambda y')\eta + (z + \lambda z')\zeta + 1\,\lambda = 0.$$

obdržíme pro uvedené souřadnice bodů M_1, M_2, M_3 výrazy

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{p_{21}}{p_{41}}, \quad Z_1 = \frac{p_{31}}{p_{41}};$$

$$X_2 = \frac{p_{12}}{p_{42}}, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = \frac{p_{32}}{p_{42}};$$

$$X_3 = \frac{p_{13}}{p_{43}}, \quad Y_3 = \frac{p_{23}}{p_{43}}, \quad Z_3 = 0.$$

Snadno seznáme, že platí tu relace

$$\frac{Y_1}{Y_3} + \frac{Z_1}{Z_2} = 1, \quad \frac{Z_2}{Z_1} + \frac{X_2}{X_3} = 1, \quad \frac{X_3}{X_2} + \frac{Y_3}{Y_1} = 1$$

$$X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_2 = 0.$$

Duálně jsou-li M_1, M_2, M_3 roviny, jež spojují p příslušně s body X, Y, Z, jsou jejich souřadnice, a to

pro M_1 $\quad \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{Y}_1 = \frac{q_{21}}{q_{41}}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{q_{31}}{q_{41}};$

pro M_2 $\quad \mathfrak{X}_2 = \frac{q_{12}}{q_{42}}, \quad \mathfrak{Y}_2 = 0, \quad \mathfrak{Z}_2 = \frac{q_{32}}{q_{42}};$

a pro M_3 $\quad \mathfrak{X}_3 = \frac{q_{13}}{q_{43}}, \quad \mathfrak{Y}_3 = \frac{q_{23}}{q_{43}}, \quad \mathfrak{Z}_3 = 0.$

Souřadnice ty jsou spojeny relacemi

$$\frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{Y}_3} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} = 1, \quad \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_3} = 1, \quad \frac{\mathfrak{X}_3}{\mathfrak{X}_2} + \frac{\mathfrak{Y}_3}{\mathfrak{Y}_2} = 1,$$

$$\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2 = 0.$$

*

Remarque sur les propriétés fondamentales des coordonnées projectives.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur fait voir comment on peut introduire, d'une manière simple, les coordonnées projectives nonhomogènes du point et du plan de l'espace; il établit les conditions de l'incidence de ces figures, effectue le passage aux coordonnées homogènes et donne l'expression des coordonnées de droite à l'aide des coordonnées nonhomogènes introduites ci-dessus.