Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Hlavatý

Množství číselná o pořádkových číslech z druhé třídy číselné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, 71--79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122733

Množství číselná o pořádkových číslech z druhé třídy číselné.

Napsal *V. Hlavatý.*

1. Tato krátká poznámka neskýtá vlastně principielně nových poznatků z teorie množství. Jejím účelem je podati soustavný návod na konstrukci množství o pořádkových číslech z druhé třídy číselné. Pokud vím, vyskytují se příklady na pořádková čísla až do ω^ω jakožto příklady ad hoc sestrojené a pořádkové číslo ω^ω bylo ilustrováno jen dvěma příklady od Hessenberga.*) Jeden z nich nalézá se téměř v každé učebnici teorie množství. Konstrukce, kterou uvádím, dovoluje sestrojiti příklady na spočetná množství o pořádkových číslech

$$\omega, \ldots \omega \cdot n, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots, \ldots \varepsilon, \ldots;$$

(nikoliv do nekonečna).

2. Je známo, že pro druhou třídu jsou charakteristické dva tvořící principy: Princip konečné indukce a princip transfinitní indukce. Je proto zřejmo, že i v soustavném návodě na konstrukci množství o pořádkových číslech druhé třídy musí býti užito dvou principů různých. Oba budou vyloženy v následujících řádcích.

3. Podáme nejdříve návod na konstrukci příkladu množství o pořádkových číslech tvaru

$$\omega^m x_m + \omega^n x_n + \cdots + \omega x_1 + x_0 \ (m > n > \cdots > 1, \text{ celá konečná čísla}).$$

Budiž ω pořádkové číslo dobře spořádaného spočetného množství elementů

$$M_{1\cdot 1} \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Elementy a nechť jsou libovolná, různá čísla prvé třídy psaná v decimální soustavě, která neobsahují číslice 0. Je zřejmo, že pořádkové číslo ωx_1 má množství

$$M_{1, x_1} \quad a_1, a_{1+x_1}, a_{1+2x_1}, \ldots \; a_2, a_{2+x_1}, a_{2+2x_1}, \ldots \; a_{x_1}, a_{2x_1}, a_{3x_1}, \ldots$$

*) „Grundbegriffe der Mengenlehre". (Abh. der Fries'schen Schule, str 583—84.) Od tohoto příkladu na spořádání množství podle pořádkového čísla ω^ω je nutno rozlišovati příklady na transfinitní indukci (Borel: „Leçons sur la théorie des fonctions" (II. vydání), 115, 136 . . ., Schoenfliess: „Entwickelung der Mengenlehre" 25, 112), které znázorňují, jak možno dospěti k pořádkovému číslu druhé třídy.

(kdežto $x_1\omega = \omega$). Majíce sestrojiti množství o pořádkovém čísle ω^n sestrojíme krycí množství $(A/M_{1,1})$ a spořádáme je lexikograficky. Při tom A je konečné množství čísel

$$1, 2, \ldots . n.$$

To znamená, že lexikograficky spořádáme množství všech komplexů

1.) $$((a_i 1), (a_j 2), \ldots, (a_l n)).^{*)}$$

Komplexu 1.) můžeme jednoznačně přiřaditi číslo

$$m_{n,1} \qquad a_i o\ a_j o \ldots . o a_l.$$

Tímto přiřaděním získáme množství $M_{n,1}$ čísel, které je podobno s lexikograficky spořádaným množstvím $(A/M_{1,1})$ a má tedy také pořádkové číslo ω^n:

Příklad pro $n = 3$. Množství čísel

$$\begin{array}{ll} & a_1 o a_1 o a_1,\ a_1 o a_1 o a_2, \ldots .\ a_1 o a_2 o a_1,\ a_1 o a_2 o a_2, \ldots ., \ldots . \mid \\ M_{3,1} & a_2 o a_1 o a_1,\ a_2 o a_1 o a_2, \ldots .\ a_2 o a_2 o a_1,\ a_2 o a_2 o a_2, \ldots ., \ldots . \mid \\ & a_3 o a_1 o a_1,\ a_3 o a_1 o a_2, \ldots ., \ldots ., \mid \ldots ., \ldots . \end{array}$$

má pořádkové číslo ω^3.

Máme-li sestrojiti množství o pořádkovém čísle $\omega^n x_n$, spořádáme lexikograficky produkt $BM_{n,1}$, kde B je konečné množství x_n libovolných (různých) elementů

$$b_1, b_2, \ldots . b_{x_n}.$$

To znamená, že lexikograficky spořádáme množství všech orientovaných párů $(b_u, m_{n,1})$ $[\neq (m_{n,1}, b_u)]$, kde $m_{n,1}$ jsou elementy z $M_{n,1}$. Toto množství má pořádkové číslo $\omega^n x_n$. Přiřadíme-li jedno-jednoznačně každému páru $(b_u, m_{n,1})$ číslo

$$m_{n,1} \underbrace{o\ o \ldots . o}_{u\text{-kráte}},$$

získáme množství M_{n, x_n} s původním podobné, které má tudíž pořádkové číslo $\omega^n x_n$.

Příklad: Pořádkové číslo $\omega^2 3$ má množství čísel

$$\begin{array}{l} a_1 o a_1 o,\ a_1 o a_2 o, \ldots .\ a_2 o a_1 o,\ a_2 o a_2 o, \ldots ., \ldots ., \ldots . \mid \\ a_1 o a_1 oo,\ a_1 o a_2 oo, \ldots .\ a_2 o a_1 oo,\ a_2 o a_2 oo, \ldots ., \ldots ., \ldots . \mid \\ a_1 o a_1 ooo,\ a_1 o a_2 ooo, \ldots .\ a_2 o a_1 ooo,\ a_2 o a_2 ooo, \ldots ., \ldots ., \ldots . \end{array}$$

Každá dvě množství M_{m, x_m}, M_{n, x_n} jsou o nulovém průřezu při $m \neq n$, ježto již každé číslo z $M_{m,1}$ je různé od každého čísla z $M_{n,1}$. Proto podle známých vět z teorie spořádaných množství můžeme

*) Jsou-li $((a_{i_1} 1), (a_{i_2} 2), \ldots, (a_{i_n} n))$ a $((a_{j_1} 1), (a_{j_2} 2), \ldots, (a_{j_n} n))$ dva komplexy z krycího množství $(A/M_{1,1})$, pak je $((a_{i_1} 1), (a_{i_2} 2), \ldots, (a_{i_n} n))$ před $((a_{j_1} 1) (a_{j_2} 2), \ldots (a_{j_n} n))$, když v $M_{1,1}$ je a_{i_1} před a_{j_1}, nebo v případě $a_{i_1} = a_{j_1}$, když je a_{i_2} před a_{j_2}, nebo v případě $a_{i_1} = a_{j_1}$, $a_{i_2} = a_{j_2}$, když je a_{i_3} před a_{j_3}, atd.

prohlásiti, že pořádkové číslo $\omega^m x_m + \omega^n x_n + \dots + \omega x_1 + x_0$ $(m > n > \dots > 1)$ má množství

$$M_{m, x_m} + M_{n, x_n} + \dots + M_{1, x_1} + M_{0, x_0} \qquad (\omega^0 = 1)$$

(kde sčítanci vyskytují se právě v tomto pořádku). Čtenář si příslušný příklad již snadno sám sestrojí.

4. Víme, že ω^ω je limitním případem potencí ω^n.*) Můžeme psáti

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots = \omega^\omega.$$

Této rovnice můžeme použíti k sestrojení množství pořádkového čísla ω^ω. Platí totiž věta, že pořádkové číslo součtu $\sum\limits_i^J A_i$**) spořádaných množství, je invariantem substitucí podobných množství k původním, jsou-li každá dvě ze zmíněných množství o nulovém průřezu. Proto můžeme ω^ω obdržeti jako pořádkové číslo množství

$$\sum_i^J M_{i,1},$$

je-li J dobře spořádané množství čísel 1, 2, 3, ... *in inf.*

Obdržíme tak množství, které označíme $M_{\omega,1}$:

$M_{1,1}$: $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$

$M_{2,1}$: $a_1 o a_1,\ a_1 o a_2, \dots \mid a_2 o a_1,\ a_2 o a_2, \dots \mid$
$a_3 o a_1, a_3 o a_2, \dots \mid \dots \mid \dots$

$M_{3,1}$:
$a_1 o a_1 o a_1,\ a_1 o a_1 o a_2, \dots,\ a_1 o a_2 o a_1,\ a_1 o a_2 o a_2, \dots, \dots \mid$
$a_2 o a_1 o a_1,\ a_2 o a_1 o a_2, \dots,\ a_2 o a_2 o a_1,\ a_2 o a_2 o a_2, \dots, \dots,$
$\dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots \mid a_n o a_1 o a_1,\ a_n o a_1 o a_2, \dots,$
$a_n o a_2 o a_1,\ a_n o a_2 o a_2, \dots, \dots, \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots$
. . . .

$M_{4,1}$:
$a_1 o a_1 o a_1 o a_1,\ a_1 o a_1 o a_1 o a_2, \dots,\ a_1 o a_1 o a_2 o a_1,$
$a_1 o a_1 o a_2 o a_2, \dots,\ a_1 o a_2 o a_1 o a_1,\ a_1 o a_2 o a_1 o a_2, \dots,$
$a_1 o a_2 o a_2 o a_1,\ a_1 o a_2 o a_2 o a_2, \dots, \dots, \dots, \dots \mid$
$a_2 o a_1 o a_1 o a_1, \dots, \dots \mid \dots \mid a_n o a_1 o a_1 o a_1,\ a_n o a_1 o a_1 o a_2, \dots$
$a_n o a_1 o a_2 o a_1,\ a_n o a_1 o a_2 o a_2, \dots,$
$a_n o a_2 o a_1 o a_1,\ a_n o a_2 o a_1 o a_2, \dots,\ a_n o a_2 o a_2 o a_1,$
$a_n o a_2 o a_2 o a_2, \dots, \dots, \dots \mid \dots$
. . . .

$M_{5,1}$:
$a_1 o a_1 o a_1 o a_1 o a_1,\ a_1 o a_1 o a_1 o a_1 o a_2, \dots \mid \dots \mid \dots \mid \dots$
. . . .

. . . .

*) Hausdorf: „Grundzüge der Mengenlehre", str. 118.

**) i je elementem transfinitního spořádaného množství J.

Při tom k vůli přehledu oddělují vodorovné čáry množství čísel uspořádaných podle různých pořádkových čísel, svislé čáry oddělují množství čísel, vzniklých z různých prvých elementů a_i.*)

Příklad uvedený je dosti obecný, neboť za a_i můžeme dosazovati libovolná různá čísla, pokud neobsahují nuly. Pro další úvahy bude výhodné význam čísel a_i poněkud pozměniti. Za a dosadíme totiž všechna celá čísla psaná v soustavě dvojkové a komplexu 1.) přiřadíme jedno-jednoznačně číslo

$$a_i 2\, a_j 2 \ldots . 2 a_l,$$

které budeme čísti v soustavě desetinné.

5. Dalším naším úkolem je stanovení množství o pořádkovém čísle $\omega^{\omega}.\, n$. Leč to je úloha snadná a čtenář si ji snadno rozřeší podle návodu k sestrojení množství o pořádkovém čísle $\omega \cdot n$. Přistoupíme hned k sestrojení množství celých čísel, spořádaných podle pořádkového čísla $\omega^{\omega} .\, \omega^{n} .\, p$. K tomu cíli lexikograficky spořádáme produkt $BM_{n,1}\; M_{\omega,1}$, když B značí konečné množství elementů psaných v desetinné soustavě

$$b_1,\; b_2, \ldots .\, b_p,$$

které neobsahují číslice 0, 1, 2. Takto uspořádaný produkt má pořádkové číslo $\omega^{\omega} .\, \omega^{n} .\, p$. Je nutno tedy lexikograficky spořádati množství všech komplexů

$$((m_{n,1},\; 2),\; (b_r,\; 1),\; (m_{\omega,1},\; 3)), \qquad r = 1, \ldots .\, p.$$

Každému komplexu přiřadíme jedno-jednoznačně číslo

$$m_{\omega+n,\,p} \qquad\qquad m_{n,1}\, b_r\, m_{\omega,1}\, b_r.\text{**)}$$

Množství $M_{\omega+n,\,p}$ všech těchto čísel, jsouc podobno spořádanému množství $B M_{n,1}\; M_{\omega,1}$, má taktéž pořádkové číslo $\omega^{\omega} \omega^{n} p = \omega^{\omega+n} .\, p$. Ježto známe množství $M_{n,1},\; M_{\omega,1}$, nečiní již lexikografické spořádání čísel $m_{\omega+n,\,p}$ žádných obtíží a nemusíme se o praktickém provedení zmiňovati.

6. Přistoupíme k sestrojení množství o pořádkovém čísle $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$. Pro větší přehlednost v indexech zavedeme symbol

$$\omega_{\varrho,\sigma} = \omega^{\omega_{\varrho\sigma}} \qquad \varrho \leqq \omega, \qquad \sigma \leqq \omega^{\omega}$$

---

*) K vůli srovnání uvádím zároveň Hessenbergův příklad množství celých čísel, spořádaných podle ω^{ω}

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... | 4, 6, 10, 14, ... | 9, 15, 21, ... |
25, 35, 55, ... | 49, 77, 91, ... | 121, 143, 187, ... | . . . . | . . . . | . . . .
8, 12, 20, ... | 18, 30, 42, 66, ... | 50, 70, 110, ... | . . . . | . . . .
. . . | . . . . | 27, 45, ... | 75, 105, 165, ... | . . . .

Při tomto spořádání rozhoduje rozklad čísla v prvočísla. Bližší by se čtenář dočetl na citovaném místě.

**) Předpokládáme již, že každé číslo $m_{n,1}$, z $M_{n,1}$ resp. $m_{\omega,1}$ z $M_{\omega,1}$ je psáno podle úmluvy, učiněné na konci odst. 4.

a indexem u M označíme přímo pořádkové číslo příslušného množství. (Na příklad místo dřívějšího $M_{\omega,1}$ budeme psáti $M_{\omega_{1,1}}$ atp.) Dále zavedeme pomocné množství $C_{\omega_{1,1}}$, které je podobné s $M_{\omega_{1,1}}$, ale žádné jeho číslo neobsahuje číslice 0, 1, 2. (Třeba číslicím 0, 1, 2 v číslech z $M_{\omega_{1,1}}$ přiřadíme jedno-jednoznačně čísla a'_0, a'_1, a'_2, neobsahující 0, 1, 2, takže C je psáno jen v číslech složených z a'_0, a'_1, a'_2.) $C_{\omega_{1,1}}$ můžeme psáti

$$C_{\omega_{1,1}} \begin{cases} c_1,\ c_2 \ldots \mid c_\omega,\ c_{\omega+1}, \ldots \mid c_{\omega.2},\ c_{\omega.2+1}, \ldots \mid \ldots \mid \ldots\ldots \mid \\ c_{\omega.n},\ c_{\omega.n+1}, \ldots \mid \ldots \mid c_{\omega^2},\ c_{\omega^2+1}, \ldots \mid \ldots \\ \ldots \mid c_\varphi,\ c_{\varphi+1}, \ldots \mid \ldots \\ \quad (\varphi = \omega^m x_m + \omega^n x_n + \cdots + \omega x_1,\ m > n > \cdots > 1). \end{cases}$$

Každý index u c v C je tedy menší než $\omega_{1,1}$.

Nyní sestrojíme množství o pořádkovém čísle $\omega_{1,n}$. K tomu cíli spořádáme lexikograficky krycí množství $(A/M_{\omega_{1,1}})$ a každému jeho elementu

3.) $$\left((m'_{\omega_{1,1}} 1),\ (m''_{\omega_{1,1}} 2) \ldots\ldots (m^{(n)}_{\omega_{1,1}} n)\right)$$

přiřadíme číslo

$$m_{\omega_{1,1}} \qquad m'_{\omega_{1,1}} c_2\, m''_{\omega_{1,1}} c_2\, m'''_{\omega_{1,1}} \ldots c_2\, m^{(n)}_{\omega_{1,1}}.$$

Množství $M_{\omega_{1,n}}$ těchto čísel má pořádkové číslo $\omega_{1,n}$. Je-li $m \neq n$, pak $M_{\omega_{1,n}}$, $M_{\omega_{1,m}}$ mají nulový průřez a

$$M_{\omega_{2,1}} = \sum_i^J M_{\omega_{1,i}}$$

má pořádkové číslo $\omega_{2,1}$. Obdobným způsobem získáme množství

$$M_{\omega_{3,1}} = \sum_i^J M_{\omega_{2,i}}$$

o pořádkovém čísle $\omega_{3,1}$, při čemž $M_{\omega_{2,n}}$ je lexikograficky spořádané množství čísel $m_{\omega_{2,n}}$

$$m'_{\omega_{2,1}} c_3\, m''_{\omega_{2,1}} \ldots c_3\, m^{(n)}_{\omega_{2,1}}.$$

Obdobně bychom stanovili $M_{\omega_{4,1}}$ $M_{\omega_{5,1}}$ ..... jako limity součtu množství, z nichž každé bychom získali vkládáním čísel resp. c_4, c_5 ...... Pak

$$M_{\omega_{\omega,1}} = \sum_i^J M_{\omega_{i,1}}$$

má pořádkové číslo $\omega_{\omega,1}$. Tak můžeme pokračovati dále. Obecně, známe-li množství $M_{\omega_{\varphi,1}}$ čísel $m_{\omega_{\varphi,1}}$

$$(\varphi = \omega^m x_m + \omega^n x_n + \cdots + \omega x_1,\ m > n > \cdots > 1),$$

získáme lexikografickým spořádáním čísel

$$m'_{\omega_{\varphi,1}}\ c_{\varphi+1}\ m''_{\omega_{\varphi,1}}\ c_{\varphi+1}\ \ldots\ \ldots\ m^{(n)}_{\omega_{\varphi,1}}$$

množství $M_{\omega_{\varphi},n}$ a limitním pochodem obdržíme

$$M_{\omega_{\varphi}+1,1} = \sum_i^{J} M_{\omega_{\varphi},i}.$$

Vkládáním $c_{\varphi+2}$ obdrželi bychom při známém postupu $M_{\omega_{\varphi}+2,1}$ atd. a

$$M_{\omega_{\varphi}+\omega,1} = \sum_i^{J} M_{\omega_{\varphi}+i,1}$$

atd. ... Konečně obdržíme $M_{\omega^{(3)}}$ o pořádkovém čísle $\omega^{(3)} = \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$

$$M_{\omega^{(3)}} = \sum_i^{J} M_{\omega^{(2)}i}, \left(\omega^{(2)}i = \omega^{\omega^{\omega^{i}}}\right).$$

Poznámka. Při tomto postupu neužili jsme elementu c_1 a elementů c_φ, jež tvoří prvé derivační množství $C'_{\omega_1,1}$. Při dalším stejném postupu zbyl by element c_1 a elementy druhého derivačního množství atd. Zdálo by se tedy, že můžeme použíti $C_{\omega_1,1}$ a jeho derivační množství ke konstrukci množství M o libovolně velikém pořádkovém čísle. Tomu tak není. Platí totiž věta (Cantor-Bendixsonova*)): „Je-li C spočetné množství (Abzählbare Menge), pak postupným stanovováním derivačních množství C', C'', ... dospějeme vždy k množství nulovému."

Ježto $C_{\omega_1,1}$ je množství spočetné, tu při stálém aplikování našeho postupu museli bychom je tedy vyčerpati (eventuelně až na konečný počet elementů) a postup konstrukcí M by nemohl libovolně pokračovati.**)

7. Další postup naznačíme již jen v hlavních rysech. Sestrojíme množství $C_{\omega^{(3)}}$ podobné k $M_{\omega^{(3)}}$ a vkládáním čísel z tohoto množství dospějeme k množství o pořádkovém čísle $\omega^{(4)}$. Neužíváme-li derivačního množství, stačí opět sestrojiti množství $C_{\omega^{(4)}}$ podobné k $M_{\omega^{(4)}}$ a pokračovati v konstrukci množství. Získáme konečně obecně množství $M_{\omega^{(i)}}$ a limitním pochodem

$$M_\varepsilon = \sum_i^{J} M_{\omega^{(i)}}$$

o pořádkovém čísle ε (= Cantorovu ε-číslu). Při tom ovšem je nutno dokázati, že množství C můžeme konstruovati tak, aby průřez dvou libovolných $C_{\omega^{(i)}}$, $C_{\omega^{(j)}}$ $(i \neq j)$ byl nulový. K tomu cíli uvažujeme množství všech dvojčíslí

$$t_i = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}),$$

*) Rosenthal „Neuere Untersuchungen über Funktionen ...." 867.

**) Mohli bychom však libovolné spočetné transfinitní podmnožství z $C'_{\omega_1,1}$ spořádati podle pořádkového čísla $\omega_{1,1}$ a s tím pracovati podle našeho návodu.

kde a jsou celá čísla psaná v desítkové soustavě, splňující podmínky

$$a_k^{(i)} \neq a_k^{(j)}, \quad a_k^{(i)} \neq a_l^{(i)} \quad k, l = 0, 1, \quad i \neq j,$$

která neobsahují číslic 0, 1. Ježto mocnost množství všech těchto dvojčíslí je právě táž, jako mocnost množství všech $M_{\omega(i)}$, můžeme množství $M_{\omega(i)}$ jedno-jednoznačně přiřaditi t_i. Nahradíme-li v $M_{\omega(i)}$, které předpokládáme psané v soustavě dvojkové, číslice 0, 1 postupně $a_0^{(i)}$, $a_1^{(i)}$, získáme tak množství čísel $C_{\omega(i)}$, jehož čísla obsahují jen $a_0^{(i)}$, $a_1^{(i)}$. Vhodnou volbou*) $a^{(i)}$ dosáhneme, že žádná sestava z $a^{(i)}$ není totožná se sestavou z čísel $a^{(j)}$. Skutečně tedy jsou $C_{\omega(i)}$, $C_{\omega(j)}$ o nulovém průřezu, jak bylo dokázati. Množství $C\varepsilon$ obdržíme tedy spořádaným součtem

$$C\varepsilon = \sum_i^I C_{\omega(i)}.$$

Kdežto ε není možno psáti konečným způsobem pomocí ω, elementy z $C\varepsilon$ — jak plyne z poslední rovnice — je možno psáti konečným způsobem pomocí číslic. Předpokládáme-li, že množství všech dvojčíslí bylo spořádáno podle pořádkového čísla $> \omega$, nevyčerpali jsme všechny dvojice ke konstrukci $C\varepsilon$ a můžeme tedy v konstrukci množství M (a C) se zbývajícími dvojicemi pokračovati. Ježto však množství všech čísel je spočetné, je zřejmo, že tímto postupem nemůžeme překročiti jisté pořádkové číslo druhé třídy.

8. Nyní snadno přehlédneme principy, zmíněné v druhém odstavci, jichž jsme použili ke konstrukci množství M. Jsou to:

a) Tvoření množství M užitím krycích množství a vkládáním elementů c, které **nejsou elementy zhuštění** (t. j. elementy z prvého derivačního množství C') příslušného množství C. Tento princip odpovídá principu konečné indukce.

b) Tvoření množství M limitním pochodem. Mezi takto konstruovaná množství patří též ta, jimž vlastně „odpovídají“ elementy zhuštění z C. Tento princip odpovídá principu transfinitní indukce.

*

Construction systématique des ensembles dénombrables.

(Extrait de l'article précédent.)

On sait que pour les nombres de la deuxième classe deux principes sont caractéristiques: Le principe de l'induction finie et celui de l'induction transfinie. Or, pour donner une construction **systématique** des ensembles bien ordonnés dénombrables (ce

*) Na jednu takovou volbu upozornil mne p. doc. Jarník: „Nechť číslo $a_k^{(i)}$ je $(i+2)$-místné, začínající a končící číslicí $(k+3)$ a mající uprostřed právě i dvojek“.

que nous faisons dans cette note) on doit de même avoir recours à deux principes.

1. Soit $M_{1,1}$ l'ensemble des nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots .$$

ne contenant pas 0, bien ordonné d'après ω, et A l'ensemble fini

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots ., n.$$

On construit l'ensemble $M_{1,1}^A$ en l'ordonnant lexicographiquement. En faisant correspondre à chaque élément

$$((a_{j_1} 1), \quad (a_{j_2} 2), \ldots , (a_{j_n} n)),$$

de $M_{1,1}^A$ le nombre

$$m_{n,1} \qquad a_{j_1} o a_{j_2} o a_{j_3} o \ldots . a_{j_n}$$

on obtient l'ensemble $M_{n,1}$ des nombres $m_{n,1}$, ordonné d'après ω^n. Si B est l'ensemble fini des nombres

$$b_1, \quad b_2, \ldots . b_{x_n} \qquad (b \neq a)$$

on peut construire l'ensemble M_{n,x_n} ordonné d'après $\omega^n x_n$, en ordonnant lexicographiquement le produit $B\, M_{n,1}$ et en faisant correspondre à chaque élément $((m_{n,1} 2), (b, 1))$ de $M_{n,1} B$ le nombre $m_{n,1}$ pb, $(p \neq b \neq a)$ de M_{n,x_n}. — La construction d'un ensemble, ordonné d'après $\psi = \omega^m \cdot x_m + \omega^n \cdot x_n + \cdots + \omega \cdot x_1 + x_0$, $(m > n > \cdots > 1)$ est sans difficulté. Pour parvenir à l'ensemble $M_{\omega_{1,1}}$, bien ordonné d'après $\omega_{1,1} = \omega^\omega$, nous employons le fait bien connu que $\omega_{1,1}$ est le nombre limite de ω^i, si i est l'élément de l'ensemble J des nombres entiers 1, 2, 3, ...

On a donc

$$M_{\omega_{1,1}} = \sum_i^J M_{i,1}.$$

(Voir l'exemple du § 4 du texte tchèque.)

2. Remplaçons maintenant dans $M_{\omega_{1,1}}$ le zéro interpolé par 2 en supposant que les éléments a sont écrits en système dyadic des nombres 0, 1. On peut trouver l'ensemble $C_{\omega_{1,1}} \backsim M_{\omega_{1,1}}$ en remplaçant les chiffres 0, 1, 2 dans $M_{\omega_{1,1}}$ par $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, ne contenant pas 0, 1, 2. $C_{\omega_{1,1}}$ est donc l'ensemble des nombres que l'on peut écrire c_ψ $(\psi < \omega_{1,1})$. L'ensemble $M^A_{\omega_{1,1}}$, ordonné lexicographiquement est bien ordonné d'après $\omega_{1,n} = \omega^{\omega \cdot n}$. En faisant correspondre à chaque élément $((m'_{\omega_{1,1}} 1), (m''_{\omega_{1,1}} 2), \ldots , (m^{(n)}_{\omega_{1,1}} n))$ de $M^A_{\omega_{1,1}}$ le nombre

$$m_{\omega_{1,n}} \qquad m'_{\omega_{1,1}} c_1 m''_{\omega_{1,1}} c_2 \ldots . m^{(n)}_{\omega_{1,1}}$$

on obtient l'ensemble $M_{\omega_{1,n}}$ des nombres $m_{\omega_{1,n}}$, ordonné d'après $\omega_{1,n} = \omega^{\omega \cdot n}$. Et de plus

$$M_{\omega_{2,1}} = \sum_i^J M_{\omega_{1,i}}$$

est l'ensemble des nombres $m_{\omega_{2,1}}$, bien ordonné d'après $\omega_{2,1} = \omega^{\omega^2}$ En général, après avoir construit l'ensemble $M_{\omega_{\varphi,1}}$ $(\varphi + x_0 = \psi)$ on peut ordonner lexicographiquement l'ensemble $M^A_{\omega_{\varphi,1}}$. Si l'on fait correspondre à chaque élément $((m'_{\omega_{\varphi,1}}\, 1),\ (m''_{\omega_{\varphi,1}}\, 2), \ldots.$ $(m^{(n)}_{\omega_{\varphi,1}}\, n))$ de $M^A_{\omega_{\varphi,1}}$ le nombre

$$m_{\omega_{\varphi,n}} \qquad m'_{\omega_{\varphi,1}} \quad c_{\varphi+1} \; m''_{\omega_{\varphi,1}} \; c_{\varphi+1} \ldots . \; m^{(n)}_{\omega_{\varphi}},$$

on obtient l'ensemble $M_{\omega_{\varphi,n}}$ des nombres $m_{\omega_{\varphi,n}}$, bien ordonné d'après $\omega_{\varphi,n} = \omega^{\omega^{\varphi}\cdot n}$ et de plus

$$M_{\omega_{\varphi+1,1}} = \sum_i^J M_{\omega_{\varphi,i}}$$

est l'ensemble des nombres $m_{\omega_{\varphi+1,1}}$, bien ordonné d'après $\omega^{\omega^{\varphi+1}}$.

On parvient ainsi jusqu'à $M_{\omega^{(3)}}$ bien ordonné d'après $\omega^{(3)} = \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$. Remarquons que cette méthode n'a pas fait l'usage de l'ensemble dérivé $C'_{\omega_{1,1}}$.

3. On peut poursuivre le procédé, en trouvant $C_{\omega^{(3)}}$ de telle façon que l'on remplace les chiffres 0, 1, 2 dans $M_{\omega^{(3)}}$*) par $a_0^{(3)} \neq a_1^{(3)} \neq a_2^{(3)}$ (ne contenant pas 0, 1, 2, et différents de $a_k^{(1)}$ pour $k = 0, 1, 2$). En se servant de $C_{\omega^{(3)}}$ on parvient jusqu'à $M_{\omega^{(4)}}$ $\left(\omega^{(4)} = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}\right)$etc. L'ensemble T des complexes $t_i = (a_0^{(i)},\ a_1^{(i)},\ a_2^{(i)})$ étant dénombrable, on peut:

a) l'ordonner d'après un nombre $\varrho > \omega$ dont nous avons construit l'exemple;

b) et de plus, on peut faire correspondre à chaque $M_{\omega^{(i)}}$ un des „premiers" éléments

$$t_{i_1}, \quad t_{i_2}, \quad t_{i_3}, \ldots \ldots$$

de T ordonné d'après $\varrho > \omega$. Cela nous permet de construire à l'aide du choix convenable de $a^{(i)}$ les C de telle façon

b') qu' ils sont sans éléments communs et

a') que l'on peut dépasser même C_ε (ε étant le ε-nombre de Cantor) et continuer. (Ce procédé n'est pas illimité.)

4. Les principes, dont nous nous sommes servis sont:

1. Construction des ensembles à l'aide de M^A. . . et de l'interpolation des éléments n o n l i m i t e s c de C . . . Ce principe correspond au principe de l'induction finie.

2. Emploie du principe de l'induction transfinie, surtout pour les M_ϱ, où ϱ est un élément limite de la deuxième classe.

---

*) en système triadic des chiffres 0, 1, 2, transcrit.