Karel Petr

Poznámka k numerickému výpočtu určitých integrálů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, 67--70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122731

Poznámka k numerickému výpočtu určitých integrálů.

Napsal *K. Petr.*

Vyšetřovati budeme formuli udávající přibližnou hodnotu určitého integrálu v mezích $(-1, 1)$, jsou-li dány hodnoty funkce pro její prvé, druhé, ..., k-té derivace v bodech $-1, 0, 1$. Dostaneme tak výsledek tvaru

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0\,(y_1 + y_{-1}) + B_0\,y_0 + & \\
+ A_1 (y_1' - y_{-1}') & \\
(1) \qquad + A_2\,(y_1'' + y_{-1}'') + B_2\,y_0'' & \\
+ \dots\dots\dots\dots & \\
+ A_k\,(y_1^{(k)} + (-1)^k\,y_{-1}^{(k)}) + B_k\,y_0^{(k)} + R_k, &
\end{aligned}
$$

kde A_k, B_k jsou numerické konstanty a B_k pro k liché vůbec rovno nule; $y_1^{(k)}$ značí k-tou derivaci funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$; obdobný význam mají $y_0^{(k)}$, $y_{-1}^{(k)}$. Zbytek R_k jest dán výrazem

$$R_k = \frac{f^{(3k+3)}(\xi)}{(3\,k + 3)!} \int_{-1}^{1} x^{k+1}\,(x^2 - 1)^{k+1}\,dx, \qquad \xi \text{ hodnota v } (-1, 1),$$

a je-li k sudé, můžeme dokonce i psáti

$$R_k = \frac{f^{(3\,k+4)}(\xi)}{(3\,k + 4)!} \int_{-1}^{1} x^{k+2}\,(x^2 - 1)^{k+1}\,dx,$$

neboť, je-li k sudé, můžeme při výpočtu integrálu pokládati za známou i $y_0^{(k+1)}$, kterážto však z výsledku (1) vypadá. Jelikož jest

$$\int_{-1}^{1} x^{2b}\,(x^2 - 1)^a\,dx = \frac{(-1)^a\;2^{a+1}\,a!}{(2b + 1)\,(2b + 3)\dots(2a + 2b + 1)},$$

jest zbytek R_k dán rovnicemi

$$R_k = \frac{f^{(3k+3)}(\xi)}{(3\,k + 3)!}\;\frac{2^{k+2}\,(k + 1)!}{(k + 2)\,(k + 4)\dots(3\,k + 4)}, \qquad \text{je-li } k \text{ liché},$$

$$= -\frac{f^{(3k+4)}(\xi)}{(3k+4)!}\,\frac{2^{k+2}(k+1)!}{(k+3)(k+5)\dots(3k+5)},\quad \text{je-li } k \text{ sudé.}$$

Abychom vypočetli koeficienty $A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, \dots$ můžeme postupovati takto:

Do (1) dosadíme $f(x) = x^\alpha$, kde α jest celé číslo sudé, kladné menší než $3k+3$ a větší než k. Tak dostaneme rovnici

$$\frac{2}{\alpha+1} = 2A_0 + 2A_1\alpha + 2A_2\alpha(\alpha-1) + \dots$$
$$\dots + 2A_k\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+k-1),$$

aneb

$$A_k(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) + \dots \tag{2}$$
$$+ A_2(\alpha+1)\alpha(\alpha-1) + A_1(\alpha+1)\alpha + A_0(\alpha+1) - 1 = 0.$$

Budiž nejprve k sudé. Pak jest rovnice (2) splněna pro $\alpha = k+2$, $k+4, \dots, 3k+2$, což jest celkem $(k+1)$ hodnot. Jest tedy identicky

$$A_k(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) + \dots$$
$$+ A_2(\alpha+1)\alpha(\alpha-1) + A_1(\alpha+1)\alpha + A_0(\alpha+1) - 1 = \tag{3}$$
$$A_k(\alpha-k-2)(\alpha-k-4)(\alpha-k-6)\dots(\alpha-3k-2).$$

Odtud, klademe-li $\alpha = -1$, vyplývá nejprve

$$A_k = \frac{1}{(k+3)(k+5)\dots(3k+3)}.$$

Označme pro stručnost

$$\psi(x) = (x+3)(x+5)\dots(x+2k+3)$$

a odčítejme od identity (3) touž identitu psanou pro α o jednotku menší. Dostaneme, klademe-li $\alpha = 0$,

$$A_0 = A_k[\psi(k) - \psi(k-1)] = \frac{1}{1!}A_k\,.\,\Delta\psi(k),$$

při čemž značí Δ známým způsobem symbol diferenční. Podobně plyne dále

$$A_1 = -\frac{1}{2!}A_k[\psi(k) - 2\psi(k-1) + \psi(k-2)] = -\frac{1}{2!}A_k\Delta^2\psi(k),$$

$$A_2 = \frac{1}{3!}A_k\Delta^3\psi(k),$$

$$A_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda+1)!}A_k\Delta^{\lambda+1}\psi(k).$$

Stejně dostáváme pro k liché

$$A_k = -\frac{1}{(k+2)(k+4)\dots(3k+2)} = \frac{-1}{\psi(k-1)}$$

$$A_0 = -\frac{1}{1!} A_k \Delta \psi(k-1), \quad A_1 = \frac{1}{2!} A_k \Delta^2 \psi(k-1),$$

$$A_2 = -\frac{1}{3!} A_k \Delta^3 \psi(k-1), \ldots$$

čímž koeficienty A_λ i tu pohodlně jsou stanoveny.

Ku výpočtu B_ϱ ($\varrho \leqq k$) klademe do (1) $f(x) = x^\varrho$; ϱ jest sudé celé číslo. Použitím identity (3) dostáváme nejprve pro k sudé

$$B_\varrho = \frac{2}{(\varrho+1)!} \; \frac{\psi(k-\varrho-1)}{\psi(k)};$$

pro k liché pak podobně

$$B_\varrho = \frac{2}{(\varrho+1)!} \cdot \frac{\psi(k-\varrho-2)}{\psi(k-1)}.$$

Proveďme výpočty na př. pro $k = 4$. Tu jest

$$\psi(x) = (x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)$$

a máme

	$\Delta\psi(k)$,	$\Delta^2\psi(k)$,	$\Delta^3\psi(k)$,	$\Delta^4\psi(k)$,	$\Delta^5\psi(k) = 5!$
$\psi(4) = 135135$					
	54495				
$\psi(3) = 80640$		18900			
	35595		5310		
$\psi(2) = 45045$		13590		1080	
	22005		4230		120,
$\psi(1) = 23040$		9360		960	
	12645		3270		
$\psi(0) = 10395$		6090			
	6555				
$\psi(-1) = 3840$					

kde v druhém, třetím,... sloupci psány prvé, druhé,... diference. Dostáváme ihned pro příslušné koeficienty tyto numerické hodnoty

$$A_0 = \frac{54495}{135135}, \quad A_1 = \frac{-18900}{2!\,135135}, \quad A_2 = \frac{5310}{3!\,135135},$$

$$A_3 = -\frac{1080}{4!\,135135}, \quad A_4 = \frac{120}{5!\,135135} = \frac{1}{135135};$$

$$B_0 = \frac{2 \cdot 80640}{135135}, \quad B_2 = \frac{2 \cdot 23040}{3!\,135135}, \quad B_4 = \frac{2 \cdot 3840}{5!\,135135}$$

$$R_4 = -\frac{f^{(16)}(\xi)}{16!} \; \frac{2^9}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}.$$

*

Remarque sur le calcul numérique des intégrales définies.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur établit une formule fournissant la valeur approximative d'une intégrale définie, si l'on connaît les valeurs de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre k, aux points donnés par les limites de l'intégrale et par le centre de l'intervalle d'intégration.