Josef Zahradníček

Měření gravitační konstanty

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, D17--D22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122726

Dr. JOSEF ZAHRADNÍČEK:

Měření gravitační konstanty.

Měření gravitační konstanty má jak pro fysiku vůbec, tak zvláště pro astronomii velikou důležitost; neboť znajíce konstantu tuto, můžeme určiti hmoty nebeských těles.

Newtonova konstanta gravitační určuje se tím způsobem, že se měří síla, kterou dvě hmoty se přitahují, a to buď přímo pomocí točivých vah, nebo vah vůbec, anebo nepřímo cestami jinými.[1])

Vážky točivé — torsní —, po prvé Coulombem (1785) ve fysikální praksi použité při měření sil působících mezi magnetickými, případně elektrickými množstvími, pozůstávají v podstatě z vahadla zavěšeného na jemném, pružném vlákně a otáčivého v rovině vodorovné. V rovnovážné poloze zaujímá vahadlo určitou polohu; působením síly — dvojice sil — stáčí se vahadlo z rovnovážné polohy o úhel, jehož velikost je přímo úměrna momentu působící dvojice.

Je-li délka vahadla $2l$, hmoty kuliček na koncích vahadla upevněných m, m, hmoty koulí ve vzdálenosti d od m umístěných M, M, pak můžeme silové působení hmot v prvním přiblížení vyjádřiti těmito vztahy:

moment dvojice přitažlivé

$$D_1 = S \,.\, 2l, \qquad S = k\frac{Mm}{d^2},$$

moment torse závěsného vlákna

$$D\alpha,$$

[1]) Historický přehled řešení této úlohy podal Vlad. Novák v »Časopisu pro pěstování mat. a fys.« 29, 10, 1900. — Pro školní praksi pokusil se sestrojiti první váhy gravitační Weinhold r. 1889 (viz Physikalische Demonstrationen, 6. vyd., 128, 1921, Annalen der Physik 6, 641, 1901). Známí autorové Rosenberg a Grimsehl neuvádějí ve svých učebnicích gravitačních vah, pochybujíce o možnosti provedení takového pokusu na střední škole. V posledních letech opakují se snahy zavésti jednoduché váhy gravitační i do prakse středoškolské. Uvádím zde autory, jichž zajímavé články otištěny jsou v »Zeitschrift für den physikalischen und chem. Unterricht«: Nagele 33, 81, 1920, Wulf 35, 153, 1922, Nickel 36, 42, 1923, Keefer 37, 1, 1924. V práci Nagelově a Keeferově je měřena úchylka statická, v druhých dvou je měřena doba kyvu a amplitudy, jež přemísťováním hmot M v patřičných intervalech dají se sesíliti — resonance. Popsané přístroje jsou vesměs sestaveny ve fysikálních kabinetech středních škol a tedy tím zajímavější. K vůli podrobnostem odkazuji na originální práce.

kde direkční síla D jest obsažena ve výrazu pro dobu kyvu torsního kyvadla [2])

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

moment setrvačnosti je přibližně [3])

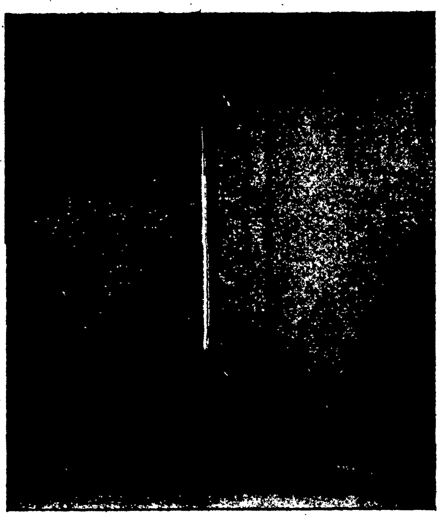
$$K = 2ml^2.$$

V případě rovnováhy jsou oba momenty sobě rovny, t. j.

$$D_1 = D\alpha.$$

Odčítáme-li dalekohledem na stupnici o a *cm* od zrcátka vzdálené, jest odečtení na stupnici

$$n = 2a\alpha.$$



Odtud vypočteme konstantu gravitační

$$k = \frac{\pi^2 d^2 ln}{2 T^2 aM}.$$

Popíši nyní jednoduché torsní vážky gravitační, které byly sestaveny ve fysikálním ústavu našem k účelům demonstračním v úpravě patrné z hořejšího obrazce.

---

[2]) Na tomto místě jest vhodno připomenouti, že vzorec tento jest obecně platným, pokud jde o dobu kyvu netlumeného, ať už kyvy systému konány jsou v silovém poli gravitačním

$$D = mgl,$$

nebo magnetickém

$$D = \mu Hl,$$

nebo elastickém

$$D = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{l} F,$$

Na křemenném vlákně délky 54 *cm*, tloušťky asi 0·02 *mm* — od firmy Haereus, Hannau, prostřednictvím pražské firmy dr. Veit — jest upevněna tenká trubička skleněná délky 14 *cm*, průměru 0·7 *mm*, nesoucí jednak zrcátko 1 *cm* v průměru, jednak příčné vahadlo — trubičku skleněnou 20 *cm* délky a 0·7 *mm* v průměru s olověnými kuličkami $m = 1{\cdot}19$ *g* na koncích. Skleněné trubičky spojeny byly vzájemně pomocí lístečku staniolu a lepidla rychle schnoucího — roztok celuloidu v acetonu — a podobně připojeno bylo vlákno křemenné jak na hlavici závěsu, tak na trubičku, na níž nasunuta objímka z tepaného aluminia nesoucí zrcátko. Celé vážky umístěny jsou ve skřínce dřevěné, délky 24 *cm*, tloušťky 2·3 *cm* a výšky 7 *cm*, kryté na dvou protějších stěnách skly 24 *cm* × 7 *cm*. Na svrchní stěně skřínky jest upevněna skleněná trubice 68 *cm* délky, 2·1 *cm* v průměru s hlavicí pro závěs. Skřínka s torsními vážkami je postavena na trojúhelníkové konsole v rohu experimentální síně. Hmoty olověné $M = 10140$ *g* posunují se po dvou vodorovných tyčích 13 *mm* v průměru, upevněných vzájemně rovnoběžně a ke skřínce vah souměrně ve vzájemné vzdálenosti 13·47 *cm* tak, že $d = 7{\cdot}38$ *cm*.[4])

Justace vah provedena jednak stavěcími šrouby v desce 36 *cm* × 17 *cm*, jež s celou skříňkou vah je pevně spojena, jednak hlavicí nesoucí vlákno, jež stáčena tak dlouho, až vahadlo v rovnovážné poloze při oddálených velkých koulích bylo v ose skřínky, což dalekohledem se škálou dá se dobře zjistiti.

Koule umístěny vždy tak, aby spojnice středů hmotných d byla k ose skřínky kolmá a na tyčích upevněny zarážky pro fixaci těchto poloh; koule dány buď do polohy v obrazci vyznačené anebo přesunuty. Až se váhy ustálily, což se stane v našem případě asi po 16 minutách, odečte se poloha vahadla n_1 a koule se přesunou do polohy druhé; nová rovnovážná poloha jest n_2. V našem případě jest pak

$$n_1 - n_2 = 2n;$$

n ve výrazu pro k je čítáno od rovnovážné polohy vahadla — při odstraněných koulích. Pro $a = 200$ *cm* podává měření $2n$ tabulka:

---

kde F jest modul pružnosti vlákna v torsi, l jeho délka, r poloměr. V prvních dvou případech platí vzorec pro dobu kyvu jen v případě amplitud malých, v případě torsních kyvů je doba T na amplitudě nezávislou, jak také vysvítá z příslušných rovnic pohybových.

3) V tomto případě zanedbáváme hmotu vahadla.

4) Kuliček m o větší hmotě není radno použíti, protože váhy pak dlouho kývají a jsou příliš citlivé na všechny otřesy v jich blízkosti. Koule M jsou vysoustruhovány z válců litých do forem plechových $2r = v = 13$ *cm*; v ose válce byla zalita mosazná trubice o vnitřním průměru 13 *mm*.

n_1	n_2	$n_1 - n_2$
66·12	58·93	7·19
11	84	27
09	85	24
13	87	26
11	87	24
		střed 7·24

Odečtení byla prováděna v tomto případě po intervalech hodinových, aby zaručeno bylo ustálení polohy vahadla. Protože pak přítomnost pozorovatele u vah působí — byť i malou — změnu v poloze vahadla, je nutno odečtení prováděti s největší opatrností.

Pohyb našeho torsního kyvadla je tlumený a proto byla měřena doba kyvu tímto způsobem: Koule M, M byly přesunuty do druhé polohy krajní a sledován byl v dalekohledu pohyb kyvadla. Když vahadlo přešlo do druhé krajní polohy a dosáhlo bodu obratu, přesunuty byly obě koule opětně; když kyvadlo procházelo rovnovážnou polohou $(n_1 + n_2)/2$, byly spuštěny stopky. Jakmile dosáhlo kyvadlo dalšího bodu obratu, koule byly opět přesunuty, při průchodu polohou rovnovážnou prvé stopky byly zastaveny a druhé spuštěny atd. K vůli kontrole chodu vahadla zaznamenány byly i body obratu, což vše může jeden pozorovatel po krátkém cviku provésti. Následující tabulka podává jednu řadu měření doby kyvu; snadno se tu dalo docíliti přesnosti pod 1%:

doba průchodu polohou rovnovážnou				rozdíly $6T$		$\pm \Delta$	Δ^2
min.	sek.	min.	sek.	min.	sek.	sek.	
0	0	28	24	28	24	8	64
4	41	33	0		19	3	9
9	31	37	47		16	0	0
14	7	42	21		14	2	4
18	53	47	8		15	1	1
23	34	51	42		8	8	64
				střed 28	16		

$$T = 283 \text{ sek} \pm 0{\cdot}2 \text{ sek}$$

Doba kyvu $2T$ byla také měřena jako doba, jež uplyne mezi třemi po sobě následujícími průchody rovnovážnou polohou n_1 nebo n_2, když koule byly přesunuty. Hodnoty takto získané souhlasí úplně s předešlými.

Z horních dat plyne pro hodnotu gravitační konstanty

$$k = 6{\cdot}23 \,.\, 10^{-8} \text{ abs. jedn.},$$

což je hodnota poněkud malá.[5]) Přesnějšího výsledku měření dosáhneme naším přístrojem, zavedeme-li jednak do počtu působení hmot M na vzdálenější m a jednak moment setrvačnosti vahadla. Jest pak

$$D_1 = (S_1 - S_2 \sin \delta)\, 2l,$$

při čemž

$$\sin \delta = \frac{d}{\sqrt{4l^2 + d^2}},\ S_1 = k\frac{Mm}{d^2},\ S_2 = k\frac{Mm}{4l^2 + d^2}.$$

Dále jest

$$K = 2ml^2 + \mu\varrho^2,$$

kde μ je hmota vahadla ($= 0{\cdot}225\ g$) a ϱ poloměr setrvačnosti

$$\varrho^2 = \frac{1}{4}\left(R^2 + r^2 + \frac{(2l)^2}{3}\right).$$

Čtverce poloměrů jsou zanedbatelně malé proti čtverci délky ($2R \doteq 2r = 0{\cdot}07\ cm$, $2l = 20{\cdot}8\ cm$) a je tedy

$$\varrho^2 \doteq \frac{l^2}{3}.$$

Zavedeme-li tyto hodnoty do vztahu $D_1 = Da$, dostáváme rovnici

$$k\,\frac{Mm\,2l}{d^2}\,(1 - \varepsilon) = \frac{n}{2a}\,\frac{\pi^2\, 2ml^2}{T^2}\,(1 + \eta),$$

kde

$$\varepsilon = \frac{d^3}{(4l^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \eta = \frac{\mu}{m}\cdot\frac{\varrho^2}{2l^2} = \frac{\mu}{6m}.$$

Odtud pak plyne přibližně

$$k = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{d^2 l n}{T^2 a M}\,(1 + \varepsilon + \eta).$$

Hodnoty korekčních členů jsou v našem případě

$$\varepsilon = 0{\cdot}037_7,\quad \eta = 0{\cdot}033$$

a tedy

$$k = 6{\cdot}66\,.\,10^{-8}\ \text{abs. j.}$$

V tomto případě nebyl ještě vzat zřetel k momentu setrvačnosti svislé trubičky — 14 cm — a zavěšeného na ní zrcátka (viz nahoře); korekce vyššího řádu.

---

[5]) Geiger-Scheelův Handbuch der Physik 1926 uvádí hodnotu $6{\cdot}65\,.\,10^{-8}$ abs. j. — je to střed hodnot, jež točivými vážkami zjednali Boys a Braun; ve Wien-Harmsově Handbuch der Experimentalphysik uvádí Haas-Mechanik str. 130, Lipsko 1926 jako nejpravděpodobnější hodnotu $k = 6{\cdot}68\,.\,10^{-8}$ abs. j. Je to střední hodnota z měření vykonaných jak vážkami točivými (Boys, Braun), tak obyčejnými (Poynting, Richarz, Krigar-Menzel).

Uvedené měření může býti zařaděno do praktických cvičení fysikálních, užijeme-li pak objektivního odčítání zrcadlového, je to pěkný pokus školní stejně jednoduchý jako pokus se zrcadlovým galvanometrem.

V další práci bude popsán podobný přístroj, jímž určuje se gravitační konstanta z doby kyvu torsních vážek v silovém poli gravitačním — metoda dynamická oproti předešlé statické.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně, v červnu 1926.

Řady aritmetické.

Ukázka ze sbírky řešených příkladů Dra. *Arnošta Dittricha.*

1. Sečtěte čísla od 1 do 5 za sebou následující!

$$\begin{aligned} s_5 &= 1+2+3+4+5=15 \\ s_5 &= 5+4+3+2+1 \\ \hline 2s_5 &= 6+6+6+6+6 \\ s_5 &= 5\,.\,6:2 \end{aligned}$$

2. Sečtěte sudá čísla od 2 do 8 za sebou následující!

Obdobně jako 1. Učitel neustále užívá označení řada, diference, součet řady, první člen, poslední člen.

3. Obecný člen řady sudých a lichých čísel

$$\begin{aligned} &1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots n\ldots \\ &2,\ 4,\ 6,\ 8, 10\ldots 2n\ldots \\ &1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\ldots 2n-1 \end{aligned}$$

Obecný člen přirozené řady čísel jest n-tý. Obecný člen řady sudých čísel jest zase n-tý. Píše se proto pod »n« v prvém řádku. Co se tam napíše, odvodíme indukcí. Podobně s řadou lichých čísel, kterou odvodíme z hořejších sudých ubráním jednotky.

Zkouška: Odvoďme člen »$n+1$«-ní řady sudých i lichých čísel, jednak vzorcem, jednak úvahou! Člen »$n+1$«-ní podle vzorce jest

v řadě čísel sudých: $2(n+1)=2n+2$
v řadě čísel lichých: $2(n+1)-1=2n+1$.

Členy za rovnítkem lze však odvoditi také úvahou tím, že n-té členy obou řad zvětšíme o jejich diferenci 2.

Teprve touto zkouškou, jež sluje důkazem z »n« na »$n+1$«, jsou vzorce pro obecné liché a sudé číslo zabezpečeny. Úplná indukce zakládá se na tom, že vzorec odvozený ze začátečních členů zabezpečí se i pro sousední vyšší člen. Pak platnost pro první člen zajišťuje jí až do nekonečna.