Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Antonín Zelenka

Konstrukce kuželosečky z pěti dvojic bodů sdružených

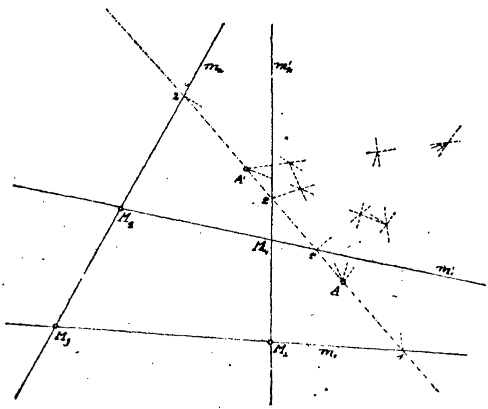
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, 86--89

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122722

Konstrukce kuželosečky z pěti dvojic bodů sdružených.

Antonín Zelenka, prof. r. g. v Kroměříži.

Úloha tato řeší se poměrně snadno pomocí Steinerovy kvadratické involuční transformace. Steinerova involuce je v rovině určena svazkem kuželoseček, jehož základní body tvoří samodružné prvky uvedené transformace, a jehož společný polární trojúhelník tvoří hlavní trojúhelník transformace. Naopak každá Steinerova involuce



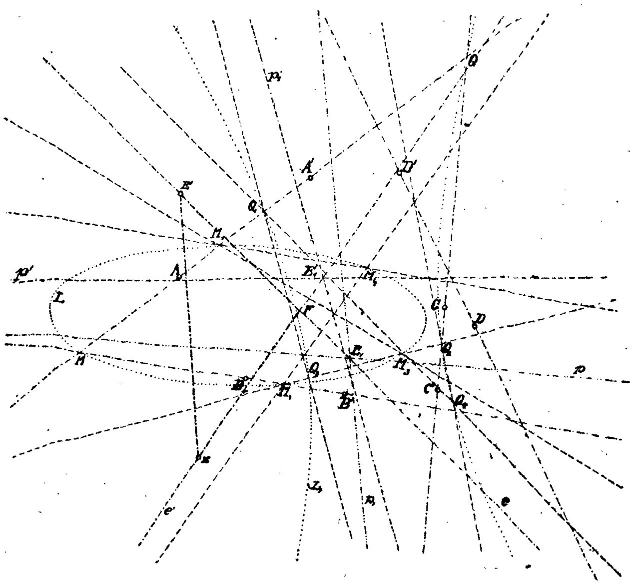
Obr. 1.

definuje nám určitý svazek kuželoseček, totiž svazek, pro nějž jsou samodružné body základními. Dvojice bodů sobě odpovídajících ve Steinerově involuci jest pak dvojicí bodů polárně sdružených vzhledem ke svazku kuželoseček takto stanovenému.

Steinerova involuce je dána čtyřmi dvojicemi bodů sobě odpovídajících v obecné poloze. Jest tak ihned patrno na příklad z toho, že čtyřmi dvojicemi bodů sdružených v obecné poloze jest určen svazek kuželoseček, což jest analyticky takřka samozřejmé.

Budiž dána kuželosečka K pěti dvojicemi AA', BB', CC', DD', EE' bodů polárně sdružených. Vyberme prvé čtyři dvojice; ty — jak uvedeno — stanoví svazek Σ. Jedná se o to, nějakým vhodným způsobem určiti tento svazek některým z obvyklých způsobů. Za tím účelem vyjdeme z velmi jednoduché konstrukce, která řeší úlohu:

Je dán svazek kuželoseček třemi body základními M_1, M_2, M_3 a jednou dvojicí bodů AA' polárně sdružených. Stanoviti je čtvrtý základní bod M_4. (Obr. 1.) Úloha tato je totožná s úlohou sestrojení čtvrtého bodu samodružného ve Steinerově involuci, známe-li tři body samodružné a dvojici bodů sobě přiřaděných. Hledaný bod M_4 určíme pomocí rozpadlých křivek svazku. Jedna rozpadá se v přímku $m_1 \equiv \overline{M_2M_3}$ a v další část m'_1, jdoucí bodem M_1 a jsoucí body AA' harmonicky oddělenou od m_1. $[m_1 \times \overline{AA'} \equiv 1,\ (AA'\,1\,1') = -1,\ \overline{1'M_1} \equiv m_1]$. Stejně určíme další rozpadlou kuželosečku svazku, jejíž jednu součást tvoří přímka $m_2 \equiv \overline{M_3\,M_1}$ a druhou přímka m'_2, jdoucí



Obr. 2.

bodem M_2 a jsoucí oddělenou harmonicky body AA' od m_2. Průsečík $m'_1 \times m'_2 \equiv M_4$ je hledaný čtvrtý základní bod.

Této konstrukce užijeme k tomu, abychom určili dvě kuželosečky L a L_1 svazku Σ stanoveného vytčenými dvojicemi bodů sdružených. (Obr. 2.)

Aby kuželosečka svazku byla určena, můžeme pro ni vytknouti ještě jednu podmínku, kterou ovšem vhodně volíme. Žádejme, aby kuželosečka L šla bodem $M \equiv \overline{AA'} \times \overline{BB'}$. Pak můžeme ihned konstruovati pro ni další dva body M_1 a M_2 ze vztahů $(AA'MM_1) = -1$, $(BB'MM_2) = -1$. Čtvrtý bod její M_3 sestrojíme konstrukcí dříve uvedenou. Stačí uvážiti, že pro kuželosečku L jsou body CC' polárně sdruženy, a že tedy L musí obsahovati čtvrtý základní bod M_3

svazku daného základními body M, M_1, M_2 a dvojicí bodů sdružených CC'.

Poslední bod M_4, potřebný k určení kuželosečky L, sestrojíme opět jako čtvrtý základní bod svazku kuželoseček daného body M, M_1, M_2 a dvojicí DD' bodů sdružených. Tím kuželosečka L určena body M, M_1, M_2, M_3, M_4, není však třeba skutečně ji rýsovati. (V obr. 2. za účelem větší přehlednosti je L narýsována.)

Stejně stanovíme další kuželosečku L_1 svazku Σ a to tak, že žádáme, aby šla bodem $Q \equiv \overline{AA'} \times \overline{CC'}$. Ze vztahů $(AA'QQ_1) = -1$ a $(CC'QQ_2) = -1$ určíme body Q_1 a Q_2; další dva body Q_3, Q_4 konstruujeme známým způsobem z dvojic BB' a DD'. Kuželosečku L_1 opět není třeba rýsovati. (V obr. 2. opět i L_1 je vyznačena.) Svazek Σ jest nyní stanoven svými dvěma křivkami L a L_1.

Úloha nyní jest: Ve svazku Σ, daném křivkami L a L_1 jest stanoviti kuželosečku K, pro niž body EE' jsou polárně sdruženy. Hledejme poláru e bodu E vzhledem ke křivce K. Polára e obsahuje jednak bod E', jednak bod E_1, odpovídající bodu E ve Steinerově involuci stanovené svazkem Σ. Bod E_1 určíme pak jako průsečík polár p a p_1 bodu E vzhledem ke kuželosečkám L a L_1, tedy konstrukcemi lineárními. Stejně sestrojíme poláru e' bodu E' vzhledem ke křivce K jako spojnici bodu E s bodem E'_1, který v uvedené příbuznosti odpovídá bodu E'. Průsečík $F \equiv e \times e'$ je pólem přímky EE', takže pro hledanou kuželosečku K známe polárný trojúhelník $EE'F$.

Opakujme celou úvahu znova, ale vyjděme od dvojic BB', CC', DD' a EE'. Tyto čtyři dvojice opět stanoví jiný svazek Σ', a tomuto svazku musí kuželosečka K taktéž náležeti. Svazek Σ' jako před tím svazek Σ určíme pomocí dvou křivek jemu náležejících, z nich pak a z dvojice AA' určíme další polárný trojúhelník křivky K. Těmito dvěma polárnými trojúhelníky — které ovšem nejsou na sobě nezávislé — jest určena polární soustava, která nám definuje kuželosečku K. Tím daná úloha rozřešena a to konstrukcemi vesměs lineárními.

Jedná-li se skutečně o zakreslení kuželosečky K, t. j. o konstrukci jednotlivých jejích bodů, jest nutno použíti konstrukcí kvadratických; neboť sestrojovati její body znamená vyhledati samodružné body v involučních přímých řadách sdružených pólů.

Pro tento případ, kdy jest nutno skutečně křivku K rýsovati, jest výhodno spokojiti se jediným polárným trojúhelníkem $EE'F$, určeným dříve uvedenou konstrukcí a pokračovati dále takto:

Všechny kuželosečky, které mají $\triangle\, EE'F$ za polárný a dvojici bodů AA' za body polárně sdružené, tvoří svazek, jehož body základními jsou samodružné body Steinerovy involuce, která má v bodech $EE'F$ své body hlavní a ve dvojici AA' pár bodů sobě odpovídajících. Samodružné elementy příbuznosti určíme snadno na základě vlastnosti, že páry bodů sobě v příbuznosti odpovídající promítají se z každého bodu hlavního paprskovou involucí, jejímž jedním párem jest pár promítající zbývající dva body hlavní. Je ihned patrno, že samodružné body St. involuce promítají se samodružnými paprsky uvedeného svazku. Z toho ihned plyne jednoduchá konstrukce. Z bodu hlavního F promítneme páry EE' a AA', v involuci dané těmito dvěma dvojicemi paprsků určíme samodružné elementy m, m'. Stejně nalezneme samodružné paprsky n, n' involuce, která z bodu E promítá dvojice $E'F$ a AA'. Body $X_1 \equiv m \times n$, $X_2 \equiv m' \times n$, $X_3 \equiv m \times n'$, $X_4 \equiv m' \times n'$ jsou hledané body samodružné. Kdybychom vyhledali ještě samodružné elementy p, p' třetí involuce, která z hlavního bodu E' promítá dvojice EF a AA', šly by tyto přímky p, p' taktéž body X_1, X_2, X_3, X_4, tvořice s páry m, m' a n, n' úplný čtyrroh $X_1X_2X_3X_4$. Důkaz jest okamžitý, uvážíme-li, že všechny tři involuce, které z bodů hlavních promítají páry bodů sdružených, jsou involuce spiaté. Z toho ihned plyne, že aspoň jedna z nich jest hyperbolická. Jsou tedy body X_1, X_2, X_3, X_4 buď všechny reálné, nebo po dvou imaginárně sdružené. V tomto druhém případě jsou dostatečně stanoveny involucemi, které obě involuce eliptické vytínají na samodružných paprscích třetí involuce hyperbolické.

Úloha nyní jest: stanoviti kuželosečku svazku daného základními body X_1, X_2, X_3, X_4 a dvojicí bodů polárně sdružených BB', což jest úloha již zcela elementární i v případě, že ony body základní nejsou reálné.

*

Construction d'une conique déterminée par cinq couples de points conjugués.

(Extrait de l'article précédent.)

Si l'on fait usage d'une simple construction du quatrième point de base d'un faisceau de coniques, déterminé par trois points de base et par un couple de points conjugués par rapport aux coniques, on résout le problème indiqué ci-dessus de la manière suivante: Quatre couples de points conjugués, soit AA', BB', CC', DD', déterminent un faisceau dont on construit deux coniques L, L_1 en choisissant, d'une manière convenable, un point de chacune. On prend, pour ce point, le point d'intersection de deux droites dont chacune contient un couple de points conjugués. Les deux coniques déterminent un faisceau Σ auquel appartient la conique K à construire, laquelle possède un cinquième couple de points conjugués EE'. On construit son triangle autopolaire $EE'F$ en construisant les polaires e, e' des points E, E' par rapport à la courbe K à l'aide des points E_1, E_1' correspondant, respectivement, aux points E, E' dans l'involution quadratique déterminée par le faisceau Σ. Si l'on répète ce procédé en partant d'un autre groupe de quatre couples, on obtient un second triangle autopolaire de la conique à construire (qui n'est pas, bien entendu, indépendant du premier). Ces deux triangles déterminent un système polaire du plan dont la conique cherchée est la courbe directrice.