Josef Hervert

Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 4, 186--194

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122705

a zní tudíž rovnice asymptot

$$\Big/^{\frac{y}{x}=\alpha} \frac{\xi(2xy^2)+\eta(2x^2y+4y^3)+2by^3}{x^3}=0$$

aneb

$$\Big/^{\frac{y}{x}=\alpha}\left[\xi\left(\frac{y}{x}\right)^2+\eta\left[\left(\frac{y}{x}\right)+2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]+b\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]=0.$$

Vyloučíme-li *všem* členům společného činitele $\left(\frac{y}{x}\right)$, pak rovnice zní, píšeme-li α místo $\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$\xi\alpha+\eta(1+2\alpha^2)+b\alpha^2=0.$$

Pro $\alpha=0$ (dvakráte) obdržíme

$$\eta=0,$$

z čehož soudíme, že osa x zastupuje dvě asymptoty a že tudíž nekonečně vzdálený bod na ose x považovati dlužno za bod úvratu naší konchoidy.

Pro $\alpha=\pm i$ máme pro zbývající dvě (pomyslné) asymptoty rovnici

$$\pm i\xi+\eta(1-2)-b=0$$

aneb

$$\mp i\xi+\eta+b=0.$$

Tyto dvě pomyslné asymptoty protínají se v *reálném* bodě osy y, neb obdržíme pro obě $\eta=-b$, položíme-li $\xi=0$. Reálný průsek jest tudíž bod A, kterýmž procházejí přímky P. Jak známo jest bod ten dvojným bodem křivky. Tečny jeho jsou reálné, je-li $a>b$, splývají, je-li $a=b$, a stanou se pomyslnými, je-li $a<b$.

Dioptrika se stanoviska vyšší geometrie.

(Podává *Josef Hervert.*)

(Dokončení.)

Dle tohoto pravidla i ku každému obrazci, jak přímotak i křivočarému, nechť jej za předmět aneb za obraz pojímáme, přiřaděný obrazec sestrojiti můžeme a zároveň přesvědčiti se o dvojatém přiřadění předmětu a obrazu, ač-li paprsky světelné stále týž směr mají na př. z ústředí řidšího do hustšího, jakož i o vzájemném vztahu, který se jeví mezi obrazem a předmětem, jest-li jednou exponent lomu n, podruhé exponent $\frac{1}{n}$ modul kollineace stanoví, neboť obdržíme v tomto případě k danému obrazci vždy tentýž homologický útvar, nechť jeden neb druhý za předmět aneb za obraz pojímáme. K tomu však nevyhnutelně třeba znáti, co učí vyšší geometrie o křivkách kollinearných v poloze perspektivické, poněvadž věty ty i zde platnost mají, pokud světelné body a paprsky na blízku osy lámavé plochy leží a protož tuto některé z nich uvésti chci, jichž pravdivost i bez dalších důvodů jasna jest.

Jestliže jedna z kollinearných čar je křivka, je přiřaděná čára také křivkou. Každý homologický paprsek, který prostupuje jednu křivku ve dvou bodech, seče i přiřaděnou čáru ve dvou homologických bodech a onen homologický paprsek, který se jedné křivky dotýká, je společně i tečnou přiřaděné křivky v homologickém bodu a naopak; mají-li dvě křivky v poloze persp. společnou tečnu, jde tato středem homologie. Seče-li osa homologie A jednu křivku ve 2 bodech, protíná přiřaděnou křivku v týchž bodech, jsouc oběma společnou tětivou; jestliže však jedné z nich se dotýká, je zároveň i k druhé tečnou v témž tečníku.

Je-li jedna z kollinearných křivek uzavřena (na př. kružnice), stanoví úběžnice její soustavy tvar homologické křivky a sice: leží-li centrálná osa mimo křivku, je i přiřaděná křivka uzavřena (pro uvedený příklad všeobecně ellipsa). Prostupuje-li však jedna křivka úběžnici ve dvou bodech, má homologická čára dva úběžné body, sestává tudíž z dvou ramen, kteráž na dvě strany do nesmírnosti sahají a tečny v průsečících křivky s úběžnicí jeví se u kollinearné křivky jakožto tečny v úběžných bodech dotyčných čili asymptoty křivky, která v onom příkladu je tedy hyperbolou.

Dotýká-li se křivka úběžnice, má kollinearná čára jeden úběžný bod a úběžnou asymptotu, tudíž je to parabola.

Dle těchto pravidel sestrojen jest obr. 67. pro exponent lomu $n = {}^{13}/_{10}$ pro přechod světla ze vzduchu do ledu. Je-li daný předmět kruh, jehož střed leží na ose v bodu o a jenžto se dotýká centralné osy v bodu f, je přiřaděný obraz parabola, jejížto vrchol p' přiřaděn jest bodu p u kruhu a kterážto souměrně leží vůči ose lámavé plochy. Tečny, které se obou obrazců v sdružených bodech m, m'; k, k' dotýkají, jsou homologické paprsky. Jestliže však kruh za obraz pojímáme a příslušný k němu předmět hledáme, nalezneme ellipsu ležící mezi úběžnicí F a osou homologie A, a sice jest střed její na ose lámavé plochy, její velká osa přísluší co homologická průměra kruhu rs a její malá osa průměru pf. Paprsky homologické, které se dotýkají kruhu v bodech k, m, jsou též tečnami ellipsy v přiřaděných bodech l, n. Jiný příklad ukazuje obr. 69., který sestrojen jest pro exponent lomu $\frac{1}{n} = {}^3/_4$ pro přechod světla z vody do vzduchu. Leží-li totiž řidší ústředí na vnitřní straně kulové plochy, mají úběžnice obrácenou polohu vůči bodům a, c. Je-li opět předmětem kruh, který prochází středem homologie a prostupuje osu homologie v bodech α, β, obdržíme co obraz jeho ellipsu E, jejížto velká osa stojí kolmo na ose lámavé plochy a která zároveň s kruhem prochází body α, β a c. Dále jsou bodům kruhu K: p, k, m přiřaděny u ellipsy E body, o, l, n, které se známým již spůsobem sestrojiti dají a jelikož 5 bodů k stanovení kuželosečky dostačuje, je jimi i hledaný obrazec určen. Jestliže však pojímáme kruh co obraz hledajíce homologický mu tvar co předmět, najdeme ellipsu E', jejíž malá osa kolmo stojí na ose lámavé plochy a kteráž taktéž prostupuje body α, β, c.. Body n', l' přiřaděné bodům kruhu m, k sestrojiti se dají pomocí centrálné osy F a středu homologie c.

Ještě snadnější jest sestrojování přímočárných obrazců, jak ukazuje příklad v obr. 68., sestrojený pro exponent $n = \frac{11}{8}$ pro přechod světla ze vzduchu do tresti. Čtverci $klmn$ přiřaděn jest co obraz lichoběžník $k'l'm'n'$. Paprskům k ose kolmým $\overline{kn}$, $\overline{lm}$ přiřaděny jsou v druhém ústředí opět paprsky k ose kolmé $\overline{k'n'}$, $\overline{l'm'}$; kdežto paprskům $\overline{kl}$, $\overline{nm}$ rovnoběžným s osou lámavé plochy přísluší co zlomené paprsky $\overline{k'l'}$, $\overline{m'n'}$ procházející úběžníkem f'. Je-li však čtverec $klmn$ obrazem, přísluší mu co předmět lichoběžník $k''l''m''n''$ a sice jsou opět paprskům k ose kolmým takové též paprsky přiřaděny, paprskům pak s osou rovnoběžným družny jsou paprsky jdoucí centrálným bodem f.

To, co až potud o vztazích předmětu a obrazu v rovině pověděno bylo, nechá se zvšeobecniti i na prostor. Myslíme-li si osou homologie A proloženou rovinu kolmo k ose lámavé plochy O (obr. 66.) a pohybuje-li se $\triangle$ $m\mu\nu$ tak v prostoru, aby strana $\mu\nu$ stále ležela v rovině A, bude míti bod m ve všech polohách touž vzdálenost od roviny A a vytvoří tedy rovinu k ose kolmou. Sestrojíme-li pro každou polohu jeho k dopadajícím paprskům M, N... paprsky zlomené M', N'... bude obrazec $\mu\nu\beta f'$ jimi vytvořený pokaždé rovný lichoběžník, v kterém se poměr rovnoběžných stran, jakož i vzdálenost ‖ rovin, v kterých se tyto strany nacházejí, nemění. Tudíž bude i průsečík m' paprsků M', N'... v každé poloze míti stejnou vzdálenost od roviny A a geometrické místo všech jeho poloh jest opět rovina k ose kolmá a s A rovnoběžná.

Jelikož ale pokaždé bod m' přiřaděný bodu m na témž paprsku středem c procházejícím čili homologickém leží, můžeme říci: všem bodům, kteréžto leží v rovině k ose kolmé, přiřaděny jsou co homologické opět body v rovině kolmé k ose lámavé plochy a sice jsou obě persp. vůči středu homologie c. Otáčí-li se jeden dopadající paprsek na př. N kolem druhého M, vytvoří paprskový svazek v prostoru v podobě kužele o vrcholi m a jestliže pro každou polohu jeho $N\,N_,\,N_{,,}$... sestrojíme zlomené paprsky $N'N'_,N'_{,,}$..., tvořiti budou tyto taktéž paprskový svazek v prostoru o vrcholi m', ač-li bod m takovou vzdálenost má od osy a lámavé plochy, že paprsky od něho vysílané i v druhém ústředí homocentrickými zůstávají a sice jsou oba svazky kollinearné v poloze persp. vůči rovině A co jich persp. ose a paprsek oběma společný prochází středem homologie c. Za tou příčinou můžeme zákon lomu rozšířený i na prostorné útvary vysloviti v tomto znění: *„Jsou-li dvě rozličně hutná ústředí oddělena od sebe kulovou plochou a vycházejí-li od jakéhosi předmětu jednoho ústředí světelné paprsky a lámajíce se na rozhraní vytvořují v druhém ústředí obraz jeho, jsou předmět a obraz dva homologické útvary dvou kollinearných prostorných soustav, kteréžto jsou v poloze persp.*

vůči středu kulové plochy c co středu homologie a vůči tečné rovině A kulové plochy jakožto ose homologie, an modul kollineace je exponent lomu n obou prostředí."

Jak patrno, jsou nyní F a F', jakož centrálné osy rovinné přiřaděny úběžným rovinám obou kollinearných soustav. Je-li daný předmět rovina, musí obraz co útvar homologický také rovinou býti, kdežto křivé ploše jakožto předmětu zase křivá plocha co obraz přidružena jest. Je-li předmět útvar, který leží v rovině s osou A rovnoběžné, jest obraz jeho útvar prostírající se cele v rovině taktéž s osou rovnoběžné a sice jsou oba útvary sobě podobny, jelikož homologické rozměry jejich v témž stálém poměru jsou, kterýž se rovná podílu vzdáleností obou rovnoběžných rovin od středu homologie c. Obrazem trojúhelníku jest tudíž zase trojúhelník onomu podobný, obrazem čtverce zase čtverec, obrazem kruhu opět kruh atd. To však neplatí tehdáž, když předmět a obraz leží v rovinách, které nestojí kolmo na ose lámavé plochy aneb když jsou to útvary, které se v prostoru vůbec rozsáhají. Je-li na př. centrálná osa F před kulovou plochou a dána-li co předmět koule, jejížto střed leží na ose lámavé plochy a kteráž se osy F v jednom bodu dotýká, přísluší jí co obraz v druhém ústředí paraboloid, jehož vrchol za centralnou osou F' taktéž na ose O leží a jehož průřez na osu O kolmý je kružnice. Jest-li však pro týž směr paprsků z jednoho ústředí do druhého a tedy pro tentýž exponent lomu kouli tu za obraz považujeme, přísluší jí co předmět ellipsoid mezi osami F a A, jejíž průřez na osu kolmý opět jest kruhovitý.

Zvláštního pozoru hoden jest ten případ, kde tvoří rozhraní obou ústředí rovina, o němž tuto blíže pojednati chci. Pravidla, jimiž se lom světla za touto okolností řídí, lze snadno vyvoditi z oněch, kteréž platí pro kulovou plochu co mez, položíme-li poloměr $ac = \infty$, pojímáme-li tudíž střed homologie c jakožto bod úběžný. Tu mění se svazek paprsků homologických v osnovu, tak že každá družina bodů příslušných leží na paprscích na lámavé rovině kolmo stojících. Jsou-li p a o takové dva body přiřaděné k sobě jako předmět a obraz, mění se tuto dvojpoměr:

$$(capo) = \frac{cp}{ap} : \frac{co}{ao} = n,$$

jelikož $cp = co = \infty$, v poměr jednoduchý

$$\frac{ao}{op} = n,$$

je-li p svítící bod v řidším ústředí, o jeho obraz a n exponent lomu pro postup světla z ústředí řidšího do hustšího. Je-li však p' svítící bod v hustším ústředí a o' jeho obraz, vyjadřuje následný výraz vztah mezi oběma:

$$\frac{ao'}{ap'} = \frac{1}{n} \text{ čili } \frac{ap'}{ao'} = n,$$

t. j. poměr vzdálenosti dvou homologických bodů p, o od příslušného bodu základního a jest stálý a sice se rovná exponentu lomu n. Uvažujeme-li na některém homologickém paprsku P jednotlivé body jeho co svítící a hledáme-li pro každou polohu bodu co předmětu přidružený mu bod co obraz, můžeme opět pojímati paprsek P jakožto dvé souběžných a soumístných řad bodových, kteréž však v tomto případě ve zvláštním vztahu jsou, jejž geometrie polohy určitým jmenem charakterisuje, nazývajíc dvé takových řad, jichž úběžné body si přísluší, podobnými. V našem případě jest to střed homologie c, jenž co nekonečně vzdálený bod sobě samu přísluší, elementem samodružným jest. Co se týče centrálných bodů obou řad čili ohnisk, padají tyto zde taktéž do nesmírnosti, jelikož $\varphi = \varphi' = \infty$. Tyto podobné řady bodové, jaké se při lomu paprsků světelných u rovinných mezí vyskytují, mají ještě tu zvláštnost, že každá družina bodů p, o po téže straně základního bodu leží, jelikož poměr n positivným jest. Z toho vysvítá, že paprsky, kteréž vycházejíce ze svítícího bodu p jednoho ústředí v druhém ústředí se lámou, sběžný bod o vždy v témž ústředí mají, v kterém bod p leží; jsou tudíž všechny obrazy, kteréž tuto povstávají, virtuelné a sice leží v řidším ústředí svítící bod mezi obrazem a bodem základním, v hustším ústředí však obraz o mezi předmětem p a bodem a.

Svrchu uvedený poměr udává nám též prostředek, jakým k danému bodu aneb paprsku přiřaděný element sestrojiti lze, jak z několika následujících konstrukcí zřejmo bude.

Pojímáme-li však předmět a obraz co homologické útvary dvou kollinearných soustav, shledáme, že se zde jeví zvláštní druh homologie, jejž geometrie polohy příbuzností čili affinitou zove a jenž touto zvláštností vyniká.

Jsou-li p, p', o'; p'', o'' ... družiny bodů přiřaděných vůči základním bodům a, a', a'' ... ležícím v ose homologie A, kteráž se zde osou příbuznosti jmenuje, a n exponent lomu, je:

$$\frac{ao}{ap} = \frac{a'o'}{a'p'} = \frac{a''o''}{a''p''} = \ldots = n,$$

z čehož plyne:

$$\frac{ao}{a'o'} = \frac{ap}{a'p'};\ \frac{ao}{a''o''} = \frac{ap}{a''p''} \ldots$$

V tomto případě lze tudíž zákon lomu takto vysloviti:

„Jsou li dvě rozličně hutná ústředí oddělena od sebe rovinou, jsou předmět a obraz útvary příbuzné. Hraničná rovina je osou příbuznosti, směr paprsků homologických čili k oné rovině kolmých je směrem příbuznosti, kdežto modul příbuznosti určuje exponent lomu n.“

Protož zde nalézají upotřebení věty, jež geom. polohy o příbuzných soustavách učí, totiž: „Ku každému bodu úběžnému v jednom útvaru náleží úběžný bod homologický v útvaru druhém, jelikož centrálné osy v nesmírnosti leží.

K osnově paprsků náleží opět osnova a k svazku paprsků svazek homologický, kdežto přímka úběžná sama sobě přísluší. Dva příbuzné obrazce mají jen stejnorodé rozměry, náleží tedy ku každé křivce konečné opět konečná křivka homologická a každé křivce nekonečné opět nekonečná křivka homologická. Poněvadž v příbuzných soustavách homologické paprsky v bodech osy se stýkají, nejsou rovnoběžny a tudíž nejsou ni úhly jimi uzavřené stejny.“

Podle těchto pravidel dá se snadno k danému útvaru sestrojiti homologický. Je-li na př. v obr. 70. dán kruh co předmět a hledáme-li pro exponent lomu $\frac{1}{n} = {}^3/_4$ pro přechod světla z vody do vzduchu sdružený mu útvar tím spůsobem, že ku každému bodu: $p\,p_1\,p_2 \ldots$ co předmětu sestrojíme přidružený bod $o\,o_1\,o_2 \ldots$ co obraz, dle poměru

$$\frac{ap}{ao} = \frac{a_1p_1}{a_1o_1} = \frac{a_2p_2}{a_2o_2} = \ldots = {}^4/_3,$$

nalezneme co obraz ellipsu, jejíž velká osa α se rovná průměru daného kruhu a jejíž malá osa β určena jest poměrem $\beta = {}^3/_4\alpha$. Z toho vysvitá, že i ploské obsahy obou obrazců jsou k sobě v poměru jednoduchém určeném exponentem lomu n. Neboť jest $K = \alpha^2\pi$, $E = \alpha\beta\pi = {}^3/_4\ \alpha^2\pi$ a tudíž $E = {}^3/_4K$; $\frac{K}{E} = n$.

Je-li daný útvar přímočárý na př. trojúhelník abc, je i příbuzný útvar přímočárý (obr. 71.). Pro exponent lomu $n = {}^3/_2$ pro přechod světla ze vzduchu do skla, obdržíme k trojúhelníku abc jakožto předmětu trojhran $a'b'c'$ co obraz. Zároveň viděti jest, že se homologické strany v týchž bodech α, β, γ osy A sekou. I zde jsou ploské obsahy obou přiřaděných obrazců v jednoduchém poměru stanoveném exponentem lomu n, což se snadno dá takto dokázati:

$$\triangle\gamma Aa : \triangle\gamma Aa' = Aa : Aa' \text{ a podobně}$$
$$\triangle\gamma Bb : \triangle\gamma Bb' = Bb : Bb',$$

z čehož plyne, že, jelikož $\frac{Aa}{Aa'} = \frac{Bb}{Bb'} = n$ i

$$\triangle\gamma Aa : \triangle\gamma Aa' = \triangle\gamma Bb : \triangle\gamma Bb' \text{ aneb}$$
$$\triangle\gamma Aa : \triangle\gamma Bb = \triangle\gamma Aa' : \triangle\gamma Bb'.$$

Z této srovnalosti dá se odvoditi následující:

$$\triangle\gamma Aa : (\triangle\gamma Bb - \triangle\gamma Aa) = \triangle\gamma Aa' : (\triangle\gamma Bb' - \triangle\gamma Aa')$$

a dále

$$\triangle\gamma Aa : ABba = \triangle\gamma Aa' : ABb'a' \text{ čili}$$
$$\triangle\gamma Aa : \triangle\gamma Aa' = ABba : ABb'a'.$$

a tudíž jest: $ABba : ABb'a' = Aa : Aa'$.

Stejným spůsobem dají se i následující dvě srovnalosti vyvoditi:

$$BCcb : BCc'b' = Aa : Aa'$$
$$ACca : ACc'a' = Aa : Aa'.$$

Z těchto tří srovnalostí dá se konečně vyvoditi hledaný poměr:

$$\triangle abc : \triangle a'b'c' = Aa : Aa' \text{ čili}$$
$$\frac{\triangle a'b'c'}{\triangle abc} = {}^3/_2 = n,$$

t. j. poměr ploských obsahů dvou příbuzných trojhranů rovná se modulu příbuznosti čili exponentu lomu *n*. Příbuzné mnohostrany a obrazce dají se rozložiti v příbuzné trojhrany, platí o nich tedy totéž.

Z těchto uvedených vztahů mezi předmětem a obrazem dají se i mnohé úkazy z obecného života známé vysvětliti, jako na př. že dno jezera *mcn* zvýšeným se našemu oku objevuje jakožto *mc'n* (obr. 72.), že tyč *bc* do vody ponořená u *a* zlomená a skrácená co *ac'* se spatřuje, že do vody ponořený kruhovitý válec se co elliptický, koule co ellipsoid a p. ukazuje.