Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

O zvláštních determinantech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 534--545

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122686`

V bodě B přestává absolutní minimum podél první i druhé, poněvadž bod nalézající se na př. na prodloužení úsečky AB za bod B jest blíže bodu A_1 než bodu A.

Tvar čáry p mění se s polohou bodu A; kdyby na př. bod A splynul s vrcholem H, skládala by se čára p ze tří úseček spojujících střed protilehlé stěny (h) s jejími vrcholy.

Na obrazci verifikujeme následující větu, která dle Poincaréa platí vůbec pro konvexní plochy: Vychází-li z nějakého bodu čáry p několik nejkratších geodetických čar k bodu A, vychází z něho několik větví čáry p, kterými jsou půleny úhly sevřené dvěma konsekutivními nejkratšími čarami.

Studium geodetických čar na mnohostěnech ve smyslu právě uvedeného jednoduchého příkladu má ten význam, že si jím lze učiniti představu o průběhu čáry p na různých konvexních plochách; neboť ku každému (konvexnímu) mnohostěnu lze sestrojiti konvexní plochu, která se od něho velmi málo liší a na níž mají geodetické čáry zcela podobný průběh.

O zvláštních determinantech.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, assistent české techniky v Brně

1. *Úvod.*

Uvažujme zvláštní quadratickou matici, která má tvar:

$$a = \left\| \begin{array}{cccccc} a_0 & p_0 \cdot b_0 & * & * & \cdots & * & * \\ b_0 & a_0 & (p_0 - 1) \cdot b_0 & * & \cdots & * & * \\ * & 2 \cdot b_0 & a_0 & (p_0 - 2) \cdot b_0 & \cdots & * & * \\ * & * & 3 \cdot b_0 & a_0 & \cdots & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ * & * & * & * & \cdots & a_0 & b_0 \\ * & * & * & * & \cdots & p_0 \cdot b_0 & a_0 \end{array} \right\|$$

kde a_0, b_0 jsou opět určité quadratické matice a p_0 určité, celé, kladné číslo. Způsob psaní $p_0 \cdot b_0$, $(p_0 - 1) \cdot b_0$ atd. znamená, že každý prvek matice b_0 jest násoben číslem p_0, $(p_0 - 1)$, ... atd. Hvězdičky znamenají quadratické matice, které jsou sestaveny vesměs z null.

Matice a_0 a b_0 mají opět týž typ jako matice a, prvky těchto matic a_0 a b_0 jsou opět maticemi našeho typu a tak můžeme stále pokračovati, až přijdeme k maticím, jejichž prvky můžeme již pokládati za prosté prvky.

Jako jednoduchý příklad pro naše quadratické matice uvedeme následující jednoduchou matici M:

$$M = \left\| \begin{matrix} A & 2.B & * \\ B & A & B \\ * & 2.B & A \end{matrix} \right\|$$

kde jest:

$$A = \left\| \begin{matrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{matrix} \right\|$$

a

$$B = \left\| \begin{matrix} c & 3d & 0 & 0 \\ d & c & 2d & 0 \\ 0 & 2d & c & d \\ 0 & 0 & 3d & c \end{matrix} \right\|$$

Má tedy matice M tvar:

$$M = \left\| \begin{matrix} a & 3b & 0 & 0 & 2c & 6d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 & 2d & 2c & 4d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & a & b & 0 & 4d & 2c & 2l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3b & a & 0 & 0 & 6d & 2c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 3d & 0 & 0 & a & 3b & 0 & 0 & c & 3d & 0 & 0 \\ d & c & 2d & 0 & b & a & 2b & 0 & d & c & 2d & 0 \\ 0 & 2d & c & d & 0 & 2b & a & b & 0 & 2d & c & d \\ 0 & 0 & 3d & c & 0 & 0 & 3b & a & 0 & 0 & 3d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c & 6d & 0 & 0 & a & 3b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d & 2c & 4d & 0 & b & a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4d & 2c & 2d & 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6d & 2c & 0 & 0 & 3b & a \end{matrix} \right\|$$

V následujícím ukážeme, že determinanty těchto matic dají se rozložiti v lineární faktory, a tyto faktory stanovíme.

2. *Determinanty Cayley-Sylvestrovy a Puchta-Noetherovy jakožto zvláštní případ.*

Determinanty, se kterými se zabývali Cayley a Sylvestr,*) mají tvar:

$$
\begin{vmatrix}
a & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & a & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 2 & a & n-2 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & a & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & & a & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & n & a
\end{vmatrix}
$$

I vidíme, že jsou specielním případem determinantů našich matic.

Pro vytvoření determinantů Puchta-Noetherových (viz Pascal-Leitzmann: Die Determinanten, pag. 80) jest charakteristickou matice

$$
M = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & A \end{Vmatrix}
$$

kde A a B jsou matice, které jsou vytvořeny týmže způsobem jako matice M. Determinanty Puchta-Noetherovy mají obecně 2^n řádků a sloupců. Tak pro $n = 3$ dostaneme následující determinant:

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_8 & a_7 \\
a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & a_5 & a_6 \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
a_6 & a_5 & a_8 & a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\
a_7 & a_8 & a_5 & a_6 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\
a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1
\end{vmatrix}
$$

Patrno jest, že determinanty našich matic stávají se determinanty Puchta-Noetherovými, když všechna p položíme $p = 1$.

*) Cayley (Quart. Journ. of Math. Vol. II., p. 163. Sylvestr (Nouv. Ann. de Math. XIII., p. 305).

3. *Definice našich matic.*

Po předchozích vysvětleních můžeme přikročiti k důkladnější definici našich matic. Takovou matici budeme definovati následující rekurrentní formulí:

$$M_n = \left\| \begin{array}{cccccc} M_{n-1} & p_n \,.\, N_{n-1} & * & \ldots & * & * \\ N_{n-1} & M_{n-1} & (p_n - 1) \,.\, N_{n-1} & \ldots & * & * \\ * & 2 \,.\, N_{n-1} & M_{n-1} & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & & M_{n-1} & N_{n-1} \\ * & * & * & & p_n \,.\, N_{n-1} & M_{n-1} \end{array} \right\|$$

kde posléze

$$M_0 = a_1.$$

Matice M_{n-1} a N_{n-1} jsou téhož typu a téhož řádu; $p_n \,.\, N_{n-1}$, $(p_n - 1) \,.\, N_{n-1}, \ldots$ znamená, že každý prvek matice N_{n-1} jest násoben číslem p_n, $(p_n - 1) \ldots$ atd. Hvězdičky znamenají quadratické matice sestavené vesměs z null.

Tu máme:

$$M_0 = a_1$$
$$N_0 = a_2$$

$$M_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & p_1 a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & (p_1 - 1)\, a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_1 a_1 & a_1 \end{array} \right\| .$$

$$N_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} a_3 & p_1 a_4 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & (p_1 - 1)\, a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2a_4 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_1 a_4 & a_3 \end{array} \right\|$$

a můžeme dále pokračovati, až dospějeme k matici M_n.

Pro determinanty našich matic zavedeme označení D_0, $D_1 \dots D_n$ anebo obšírněji vzhledem ku prvkům těchto determinantů:

$$
\begin{aligned}
D_0 &= D_0\,(a_1)\\
D_1 &= D_1\,(a_1,\ a_2;\ p_1)\\
D_2 &= D_2\,(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ p_1,\ p_2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
D_n &= D_n\,(a_1,\ a_2,\ a_3, \dots a_{2n};\ p_1,\ p_2 \dots p_n)
\end{aligned}
$$

Snadno lze nahlédnouti, že počet sloupců resp. řádků determinantu D_n jest dán součinem:

$$(p_1 + 1)\,(p_2 + 1) \dots (p_n + 1).$$

Jako zvláštní případ našeho označení uvedeme determinant zvláštní matice M, kterou jsme dříve byli sestavili. Označení toho determinantu bude:

$$D_2\,(a,\ b,\ c,\ d;\ 3,\ 2).$$

Cayley-Sylvestrovy determinanty by pak měly označení:

$$D_1\ (a,\ 1;\ n)$$

a Puchta-Noetherovy:

$$D_n\ (a_1,\ a_2,\ a_3, \dots a_{2n};\ \underbrace{1,\ 1, \dots 1}_{n}).$$

4. *Důkaz, že naše determinanty se dají rozložiti v lineární faktory.*

Máme-li dvě matice a a b:

$$
a = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix},\quad
b = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{Vmatrix}
$$

a utvoříme-li z nich matici c způsobem:

$$c = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1} & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn} \end{Vmatrix}$$

tu jest patrno, že matice c jest téhož typu jako matice a a b v případě, že matice a a b mají týž typ. Pro takto utvořenou matici c zavedeme si vzhledem na matice a a b označení:

$$c = [a + b].$$

Abychom dostali hodnotu determinantu matice M_n, přeměníme matici M_n v jinou matici, při kteréž přeměně hodnota determinantu této matice zůstane nezměněna. Tu přeměnu provedeme nejprve na určité matici specielní. Totiž na matici M_n, kde $p_n = 3$, pišme pak ještě v této matici $M_{n-1} = a$, $N_{n-1} = b$. Máme tedy matici:

$$\begin{Vmatrix} a & 3\,.\,b & * & * \\ b & a & 2\,.\,b & * \\ * & 2\,.\,b & a & b \\ * & * & 3\,.\,b & a \end{Vmatrix}$$

Ježto a, b znamenají opět quadratické matice, máme v této matici čtyři skupiny řádků a čtyři skupiny sloupců. Přičítejme nyní v této matici ku první skupině řádků postupně následující skupiny. jejichž všecky prvky jsou násobeny postupně čísly 3, 3, 1. Podobně přičítejme ku druhé skupině řádků následující dvě skupiny, jichž prvky jsou postupně násobeny čísly 2, 1. Posléze přičtěme ku třetí skupině řádků skupinu čtvrtou. Dostáváme tedy potom matici, která má tvar:

$$\begin{Vmatrix} [a + 3\,.\,b] & 3\,.\,[a + 3\,.\,b] & 3\,[a + 3\,.\,b] & [a + 3\,.\,b] \\ b & [a + b + 3\,.\,b] & [2\,.\,a + 2\,.\,b + 3\,.\,b] & [a + 2\,.\,b] \\ * & 2\,.\,b & [a - b + 2\,.\,2\,.\,b] & [a + b] \\ * & * & 3\,.\,b & a \end{Vmatrix}$$

Nyní odečítejme postupně první skupinu sloupců, jejíž všecky elementy jsou násobeny postupně čísly 3, 3, 1, od všech následujících skupin sloupců, pak odečítejme druhou skupinu sloupců, násobenou postupně čísly 2, 1, od skupiny třetí a pak od čtvrté skupiny sloupců. Posléze odečítejme třetí skupinu sloupců od poslední skupiny sloupců.

Dostáváme potom quadratickou matici tvaru:

$$\begin{Vmatrix} [a+3\,.\,b] & * & * & * \\ b & [a+b] & * & * \\ * & 2\,.\,b & [a-b] & * \\ * & * & 3\,.\,b & [a-3\,.\,b] \end{Vmatrix}$$

Zcela týmže způsobem, kterým jsme tuto matici přeměnili, aniž by se hodnota jejího determinantu změnila, přeměníme matici našeho determinantu obecného, totiž matici M_n, jak jsme ji uvedli na počátku odstavce 3. Matice M_n jest patrně rozdělena v (p_n+1) skupin řádků a právě v tolik skupin sloupců. Přičítejme nyní postupně k prvkům první, druhé, třetí atd. až (p_n-1) a p_n-té skupiny řádků vždy všecky následující skupiny řádků, které postupně jsou vždy násobeny čísly:

$$\begin{array}{cccccc} \binom{p_n}{1}, & \binom{p_n}{2}, & \binom{p_n}{3} & \ldots & \binom{p_n}{p_n-1}, & \binom{p_n}{p_n} \\ \binom{p_n-1}{1}, & \binom{p_n-1}{2} & & \ldots & \binom{p_n-1}{p_n-2}, & \binom{p_n-1}{p_n-1} \\ & \binom{p_n-2}{1} & & \ldots & \binom{p_n-2}{p_n-3}, & \binom{p^n-2}{p_n-2} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 2, & 1, \\ & & & & & 1. \end{array}$$

Po té odečítejme postupně prvky první, druhé, třetí atd. až p_n-té skupiny sloupců, které jsme postupně byli násobili čísly:

$$\begin{array}{ccc} \binom{p_n}{1} & \ldots & \binom{p_n}{p_n} \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & & \binom{p_n-p_n+1}{1} \end{array}$$

ode všech následujících skupin sloupců.

Pak obdržíme matici:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} [M_{n-1}+p_n . N_{n-1}] & * & * & \dots & * & * \\ N_{n-1} & [M_{n-1}+(p_n-2) . N_{n-1}] & * & \dots & * & * \\ * & 2 . N_{n-1} & [M_{n-1}+(p_n-4) . N_{n-1}] & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & & [M_{n-1}-(p_n-2) . N_{n-1}] & * \\ * & * & * & & p_n . N_{n-1}, & [M_{n-1}-p_n . N_{n-1}] \end{array} \right\|$$

Determinant této matice má opět hodnotu D_n jako determinant matice M_n, a znamená-li nyní výraz $[D_n+(p_n-k) . E_{n-1}]$ determinant matice $[M_{n-1}+(p_n-k) N_{n-1}]$, můžeme dle Laplaceovy věty o rozkladu determinantů psáti:

$$D_n = \prod_{k=0}^{p_n} [D_{n-1}+(p_n-2k) E_{n-1}].$$

Pišme nyní vzhledem ku prvkům našich determinantů:

$$\begin{aligned} D_n &= D_n (a_1, a_2, a_3, \dots a_{2^n}; p_1, p_2, \dots p_n) \\ D_{n-1} &= D_{n-1} (a_1, a_2, a_3, \dots a_{2^{n-1}}; p_1, p_2, \dots p_{n-1}) \\ E_{n-1} &= D_{n-1} (a_{2^{n-1}+1}, a_{2^{n-1}+2}, a_{2^{n-1}+3}, \dots a_{2^n}; p_1, p_2, \dots \\ & \quad p_{n-1})\text{*)}. \end{aligned}$$

Pak můžeme ale psáti dle vysvětlení, které jsme podali na počátku tohoto odstavce o maticích téhož typu:

$$[D_{n-1}+(p_n-2k) E_{n-1}] = D_{n-1} (a_1+(p_n-2k) a_{2^{n-1}+1}, \dots \\ \dots a_{2^{n-1}}+(p_n-2k) a_{2^n}; p_1 \dots p_{n-1}).$$

Obdržíme tedy následující formuli pro rozklad našich determinantů:

$$D_n (a_1, a_2, \dots a_{2^n}; p_1 \dots p_n) = \\ \prod_{k=0}^{p_n} D_{n-1} (a_1+[p_n-2k] a_{2^{n-1}+1}, \dots a_{2^{n-1}}+[p_n-2k] a_{2^n}; \\ p_1 \dots p_{n-1}) \qquad \text{(R)}$$

Tuto formuli pro rozklad můžeme dále applikovati na determinanty D_{n-1}, a když tak dále pokračujeme, dospějeme posléze k součinu lineárních faktorů. Tím jest tedy naše tvrzení doká-

---

*) Píšeme místo E_{n-1} opět $D_{n-1}(\dots)$ poněvadž matice determinantů D_{n-1} a E_{n-1} jsou téhož typu.

záno. Na ukázku budeme applikovati tuto formuli na speciální determinant D_2 $(a, b, c, d;\ 3, 2)$, jehož matici jsme již dříve napsali.

Máme pak:

$$D_2\,(a, b, c, d;\ 3, 2) =$$
$$D_1\,(a + 2c, b + 2d;\ 3)\,.\,D_1\,(a, b;\ 3)\,.\,D_1\,(a - 2c, b - 2d;\ 3),$$

dále máme:

$$D_1\,(a + 2c, b + 2d;\ 3) = (a + 2c + 3b + 6d)\,.$$
$$(a + 2c + b + 2d)\,.\,(a + 2c - b - 2d)\,.\,(a + 2c - 3b - 6d);$$

když pak tímto způsobem ustanovíme ještě determinanty

$$D_1\,(a, b;\ 3) \text{ a } D_1\,(a - 2c, b - 2d;\ 3),$$

tu posléze dostáváme již hodnotu našeho determinantu:

$$\begin{aligned} D_2\,(a, b, c, d;\ 3, 2) = {} & (a + 2c + 3b + 6d)\,(a + 2c + b + 2d) \\ & (a + 2c - 6 - 2d)\,(a + 2c - 3b - 6d) \\ & .\,(a + 3b)\,(a + b)\,(a - b)\,(a - 3b) \\ & (a - 2c + 3b - 6d)\,(a - 2c + b - 2d)\,(a - 2c - b + 2d) \\ & (a - 2c - 3b + 6d). \end{aligned}$$

5. *O determinantu D $(a, b;\ n)$ a determinantech příbuzných.*

Uvažujme nyní determinant D $(a, b;\ n)$, matice tohoto determinantu jest

$$M = \left\| \begin{array}{cccccc} a & nb & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b & a & (n-1)\,b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2b & a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & nb & a \end{array} \right\|.$$

Naše formule pro rozklad v předešlém odstavci udává hned hodnotu determinantu D této matice:

$$D = (a + nb)\,(a + [n-2]\,b)\,(a + [n-4]\,b) \ldots (a - nb) \quad (A)$$

anebo při sudém n:

$$D = a\,(a^2 - 4b^2)\,(a^2 - 16b^2)\,(a^2 - 36b^2) \ldots (a^2 - n^2b^2)$$

a při lichém n:

$$D = (a^2 - b^2)(a^2 - 9b^2)(a^2 - 25b^2)\dots(a^2 - n^2b^2).$$

Uvažujme dále jiný, podobně sestavený determinant, který si označíme $D'(a, b; n)$, který však není determinantem našeho typu. Matice tohoto determinantu M' mějž tvar:

$$M' = \left\| \begin{array}{cccccc} a & nb & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & (n-1)b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -nb & a \end{array} \right\|$$

Tuto matici M' označíme si co *matici druhého typu*, matici pak M dříve uvažovanou a rovněž tak matici obecnou M_n budeme označovati co *matici prvého typu.*

Zvláště pak budeme takové dvě matice, jednu prvého a jednu druhého typu, které mají tytéž prvky, liší se však pouze znaménky těchto prvků, nazývati *maticemi si odpovídajícími.* Tak jsou na př. M a M' dvě si odpovídající matice.

Násobme nyní v hoření matici M' řádky této matice druhou řádkou počínaje postupně čísly:

$$-i,\ (-i)^2,\ (-i)^3,\ \dots (-i)^{n-1},\ (-i)^n,$$

kde i znamená imaginární jedničku.

Současně násobme sloupce druhým sloupcem počínaje čísly:

$$i,\ i^2,\ i^3,\ \dots i^{n-1},\ i^n.$$

Determinant $D'(a, b; n)$ při této proměně matice M' zůstane nezměněn, matice M' přechází však v matici jinou $\overline{M}$, totiž v matici:

$$\overline{M} = \left\| \begin{array}{cccccc} a & inb & 0 & \dots & 0 & 0 \\ ib & a & i(n-1)b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2ib & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & ib \\ 0 & 0 & 0 & \dots & inb & a \end{array} \right\|.$$

Matice tato $\overline{M}$ jest však, jak patrno, maticí prvního typu a můžeme tedy hodnotu jejího determinantu $D'(a, b; n)$ snadno stanoviti dle rozkladné formule (R) v odstavci předešlém odvozené. Máme tedy pro determinant $D'(a, b; n)$ matice M' hodnotu:

$$D' = (a + inb)(a + i[n-2]b)(a + i[n-4]b) \ldots (a - inb) \quad (B)$$

anebo pro sudé n:

$$D' = a(a^2 + 4b^2)(a^2 + 16b^2)(a^2 + 36b^2) \ldots (a^2 + n^2b^2)$$

a pro liché n:

$$D' = (a^2 + b^2)(a^2 + 9b^2)(a^2 + 25b^2) \ldots (a^2 + n^2b^2)$$

Utvořme si nyní následující matici M'' druhého typu:

$$M'' = \left\| \begin{array}{cccccc} a & inb & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -ib & a & i(n-1)b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -i2b & a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & ib \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -inb & a \end{array} \right\| .$$

Ze vzorce (A), odvozeného pro hodnotu determinantu D, vidíme, *že determinant matice M' prvního typu rovná se součinu ze součtů prvků v řádcích odpovídající matice druhého typu M'.* Dále vidíme ze vzorce (B) pro hodnotu determinantu matice M', *že tato rovná se součinu ze součtu prvků v řádcích matice M''.* A naopak snadno můžeme poznati, *že determinant matice M'' rovná se součinu ze součtu prvků v jednotlivých řádcích matice M'.* Jest totiž matice M'' téhož typu jako matice M' a proto můžeme hodnotu jejího determinantu ihned stanoviti a tak se přesvědčiti o správnosti právě vyslovené věty.

6. *Obecné matice druhého typu.*

Když prvky matice M' v předešlém odstavci sestavené pokládáme opět za quadratické matice typu M', a když dále prvky těchto matic a a b opět za quadratické matice druhého typu považujeme a když tak libovolně dále pokračujeme, tu obdržíme daleko obecnější matice než M' a ty budeme nazývati obecnými maticemi druhého typu nebo kratčeji maticemi druhého typu. Takové matice druhého typu definujeme pak následující rekurrentní formulí:

$$M'_n = \begin{Vmatrix} M'_{n-1} & p_n \,.\, N'_{n-1} & * & \dots * & * \\ -N'_{n-1} & M'_{n-1} & (p_n - 1) \,.\, N'_{n-1} & \dots * & * \\ * & -2 \,.\, N'_{n-1} & M'_{n-1} & \dots * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & M'_{n-1} & N'_{n-1} \\ * & * & * & -p_n \,.\, N'_{n-1} & M'_{n-1} \end{Vmatrix}$$

kde posléze:

$$M'_0 = a_1, \qquad N'_0 = a_2.$$

Matice M'_{n-1} a N'_{n-1} jsou opět vždy téhož typu a téhož řádu. Užitá symbolika má zde opět týž význam jako v odstavci třetím při definici matic prvního typu.

Nepůsobilo by pražádných obtíží dokázati, že též determinanty těchto matic se rovnají součinu lineárních faktorů. Utvořili bychom z matice M'_n určitou matici $\overline{M}^n$ zcela dle téhož způsobu, jako jsme v předešlém odstavci z matice M' utvořili matici $\overline{M}$. Matice $\overline{M}_n$ jest však maticí prvního typu a tedy bychom mohli na její determinant, determinant to zároveň matice M'_n, applikovati naši rozkladnou formuli (R). Též věty uvedené v předešlém odstavci o determinantech specielních matic M, M' a M'' můžeme beze všeho vysloviti o determinantech obecných matic M_n, M'_n a M''_n.

Zákon lineární funkce chyb.

F. Čuřík.

Gaussův exponenciálný zákon vyvodil Sommerfeld z elementárních chyb geometrickým názorem, postupuje od prostoru dvou dimensí k n-dimensionálnému. Podobného motivu použijeme k stanovení zákona, jímž se řídí lineární funkce neodvislých chyb; chtějíce však vésti důkaz zcela jednoduše, bez použití Dirichletova přetržitého faktoru, omezíme se na prostor tří rozměrů.