Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

# Odraz vln.

Žákům napsal prof. **Alois Ždímal** v Telči.

Odraz vln záleží v tom, že vlna postupující řadou bodovou dojdouc na konec řady se vrací zpětným směrem a interferuje s vlnou původní. Výklad tohoto úkazu provádí se obyčejně na základě grafického znázornění; dodati mu lze však jakéhosi doplnění a objasnění, připojí-li se jednoduché úvahy mathematické, které ovšem platí pro známé dva krajní případy: pro odraz vln na rozhraní s ústředím nekonečně řídkým a na rozhraní s ústředím nekonečně hustým.

I. *Odraz vln na rozhraní s ústředím nekonečně řídkým.* Rozkmitejme příčně první bod řady bodové, jejíž délka budiž $d$; kmitavý pohyb nezůstane omezen na onen bod, nýbrž sdělí se postupně dalším a dalším bodům jistou rychlostí, kterou označme $c$. Je-li $T$ kmitová perioda jednotlivých bodů, pak za každé toto $T$ počítané od rozkmitání prvního bodu postoupí pohyb o dráhu

$$\lambda = c \,.\, T, \tag{1}$$

která nazývá se *délkou vlny.* Konečně rozkmitá se i poslední bod čili celá řada bodová se rozvlní; hned však vlnění ke druhému konci dospěvší se tu odrazí o ústředí nekonečně řídké, postupuje zpět, kříží se s vlněním proti němu postupujícím a dává vlnění výsledné.

Úlohou naší je, nalézti rovnici výsledného vlnění a podati zároveň její rozbor. Za tím účelem zvolme si v řadě bodové *libovolný* bod $M$, jenž od prvního bodu je vzdálen na $x$ a od posledního tedy na $(d - x)$. Poněvadž bod ten je libovolný, budou úvahy o jeho pohybu vedené platiti pro každý jiný bod a tedy pro celou řadu bodovou.

Uplynula-li od okamžiku, kdy první bod přišel do pohybu, doba $t$, je patrně v tomto okamžiku elongace krajního bodu

$$y_0 = r \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{2}$$

kdež $r$ znamená kmitovou amplitudu. Poněvadž vlnění od prvního bodu vycházející dospělo do bodu $M$ později, a to o dobu, kterou potřebovalo k proběhnutí dráhy $x$ rychlostí $c$, tedy o dobu $\frac{x}{c}$, čili poněvadž bod $M$ začal o dobu $\frac{x}{c}$ později kmitati nežli bod krajní, je v týmž okamžiku elongace bodu $M$

$$y_1 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

což vzhledem k rovnici (1) lze psáti též ve formě

$$y_1 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Ale bodem $M$ prochází také vlnění odražené, které sem dospělo za dobu, již potřebovalo, aby rychlostí $c$ proběhlo dráhu $d + (d - x)$, tedy za dobu $\frac{2d - x}{c}$; o tuto dobu je pohyb bodu $M$ proti pohybu bodu prvního pozadu, a proto elongace následkem vlnění odraženého v daném okamžiku jest

$$y_2 = r \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2d - x}{c}\right)$$

čili

$$y_2 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2d - x}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Bod $M$ má míti současně elongaci $y_1$ a $y_2$, proto jeho výsledná elongace bude

$$y = y_1 + y_2$$

čili po dosazení (3) a (4) a po úpravě

$$y = 2r \cos 2\pi \frac{d - x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right). \tag{5}$$

To je rovnice pro pohyb onoho libovolného bodu $M$ a tedy pro pohyb celé řady bodové, čili: to je rovnice vlnivého pohybu řady. Na pravé její straně vyskytují se dvě proměnné — čas $t$ a vzdálenost od prvního bodu $x$ —, z čehož je patrno, že elongace $y$ je netoliko pro různá $x$, nýbrž také pro různá $t$ různá, jinými slovy: elongace $y$ mění se jednak od místa k místu, jednak s časem.

Rozbor její provedeme tím způsobem, že zodpovíme několik otázek, z rozboru pak a souhrnu výsledků vynikne povaha pohybu výsledného.

*Otázka* 1. Které body jsou neustále v klidu? — Neustále jsou v klidu ony body, jichž elongace $y = 0$ v libovolném okamžiku, ať tedy $t$ je jakékoli, t. j. ať *sinus*, v němž proměnný čas jest obsažen, má hodnotu jakoukoliv, tedy body, pro které

$$\cos 2\pi \, . \frac{d - x}{\lambda} = 0$$

čili jichž vzdálenost od konce řady

$$d - x = (2k - 1) \frac{\lambda}{4} \tag{6}$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$

První takový bod $(k = 1)$ čili *uzel* je na čtvrt vlny vzdálen od druhého konce, druhý $(k = 2)$ na tři, třetí $(k = 3)$ na 5 čtvrtvln atd., krátce: první uzel je vzdálen od konce na čtvrtvlnu a každý následující o půlvlnu dále.

*Otázka* 2. Které body mají stále největší rozkmity? — Ty body, pro něž elongace má maximální hodnotu v libovolném okamžiku (při libovolné hodnotě *sinusu*), pro něž tedy má *cosinus* krajní hodnoty $\pm 1$; tu patrně

$$2\pi \, . \frac{d - x}{\lambda} = (2k - 2) \frac{\pi}{2}$$

čili

$$d - x = (2\,k - 2) \frac{\lambda}{4}. \tag{7}$$

Ze vzorce tohoto, jenž udává vzdálenost bodů největších rozkmitův od konce, je patrno, že prvním z těch bodů $(k = 1)$ je koncový bod sám, druhý $(k = 2)$ že je vzdálen na půlvlnu, třetí ($k = 3$) na celou vlnu atd.; body nejvíce kmitající jsou navzájem od sebe na půl vlny a leží uprostřed mezi dvěma a dvěma sousedními uzly.

*Otázka* 3 Jakou podobu má v určitém okamžiku rozvlněná řada bodová? — V určitém okamžiku, t. j. při určitém $t$ — tehdy má *sinus* určitou hodnotu a proměnlivý je jen druhý činitel — *cosinus*, z čehož vyplývá, že elongace v různých místech jsou různé (všeobecně); poněvadž jsou velikosti jich vázány tímto činitelem, má řada bodová v kterémkoliv okamžiku tvar kosinusoidy, která, jak známo, má touž formu jako sinusoida, je však proti této pošinuta. V sousedních polích, omezených dvěma a dvěma sousedními uzlovými body, jsou tedy elongace opačné, což lze i početně zjistiti. *)

*Otázka* 4. Kdy všecky body procházejí rovnovážnou polohou č. ve kterých okamžicích má řada bodová tvar přímky? —

To je tehdy, když pro všecky body $y = 0$. Pro všecky! To znamená: ať jest $x$ jakékoliv, ať tedy *cosinus* má hodnotu jakoukoli; v tomto případě musí

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) = 0$$

čili

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) = k\pi,$$

z čehož plyne:

$$t = \frac{d}{c} + k \cdot \frac{T}{2}.$$

Doba tato počítána jest od okamžiku, kdy první bod přišel do pohybu; počítáme-li ji však od momentu, kdy vlnění rych-

---

*) Dejme tomu, že bod na $(d - x)$ od konce vzdálený má elongaci

$$y = 2r \cos 2\pi \frac{d - x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right).$$

V témž okamžiku má bod nacházející se o půl vlny dále elongaci

$$y' = 2r \cdot \cos 2\pi \frac{d - x \pm \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) = -y,$$

tedy obrácenou.

lostí $c$ proběhlo celou řadou a na konci se odrazilo, tedy od okamžiku o $\frac{d}{c}$ pozdějšího, dostaneme

$$t' = k \, . \, \frac{T}{2}. \tag{8}$$

Jednodušší tento vzorec nám praví, že řada bodová nabývá tvaru přímky vždy po uplynutí každé půlperiody počítané od okamžiku, kdy vlnění prošedší řadou odrazilo se na druhém konci.

*Otázka* 5. Kdy všecky body nacházejí se v krajních polohách č. kdy je řada bodová nejvíce rozvlněna? —

Řada bodová je nejvíce rozvlněna, když všecky body její, ať vzdálenost jejich $x$ od bodu prvního je jakákoli, mají maximálné elongace, a to je tehdy, když při libovolné hodnotě cosinusu obsahujícího $x$ má *sinus* krajní hodnoty $\pm$ 1, tedy když

$$2\pi \, . \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) = (2k - 1)\frac{\pi}{2}.$$

Z toho vyplývá

$$t = \frac{d}{c} + (2k - 1)\,\frac{T}{4}.$$

Doba tato jest opět počítána od okamžiku, v němž vlnění vyšlo od krajního bodu; počítáme-li ji však zas od okamžiku, v němž nastal odraz, obdržíme jako v odstavci 4.

$$t'' = (2k - 1)\,\frac{T}{4}, \tag{9}$$

z čehož jde, že řada bodová je nejvíce rozvlněna vždy po uplynutí lichého počtu čtvrtperiod. Body uprostřed mezi uzly se nacházející mají tu patrně elongace $\pm$ $2r$.

Ze všech těchto úvah vyplývá, že vlnění výsledné je *stojatým.*

II. *Odraz vln na rozhraní s ústředím nekonečně hustým.* Zcela obdobnou cestou jako v otázce odrazu o ústředí nekonečně řídké lze postupovati i v tomto druhém případě, nutno však uvážiti, že se při odrazu o ústředí nekonečně husté obrátí fáse a tedy i elongace a že tudíž elongace bodu $M$ následkem vlnění postupujícího zůstane sice

$$y_1 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

elongace způsobená vlněním odraženým je však

$$y_2 = - r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2d - x}{\lambda}\right).$$

Výsledná elongace

$$y = 2r \,.\, \sin 2\pi \,.\, \frac{d - x}{\lambda} \,.\, \cos 2\pi \,.\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) \tag{10}$$

Rovnice tato je zároveň rovnicí výsledného vlnění celé řady bodové.

Rozbor její vede k větám:

1. Uzlové body jsou rozloženy tak, že první je na konci řady a každý následující o půlvlnu dále.
2. Body nejvíce kmitající leží uprostřed mezi dvěma a dvěma sousedními uzly.
3. Řada bodová má ve kterémkoliv okamžiku tvar sinusoidy.
4. Tvar přímky pak má po uplynutí lichého počtu čtvrtperiod a
5. nejvíce rozvlněna je po uplynutí každé půlperiody, počítáno v obou posledních případech od okamžiku, kdy nastal odraz.
6. Vlnění výsledné je stojaté.

Rozumí se samo sebou, že vše, co řečeno o vlnění *příčném*, podržuje také platnost pro případ, že je řada rozvlněna *podélně*. Tu ovšem směr kmitání jednotlivých bodů spadá do směru řady, elongace, které se při vlnění transversálném počítají kladně (vzhůru), kladou se tu do směru kladného, tedy v pravo, záporné pak místo dolů — v levo. Místo vrchův a důlů je tu zhuštění a zředění, a to vždy při uzlových bodech tak, že je-li kolem jednoho v určitém okamžiku řada zhuštěna, je kolem uzlů sousedních zředěna. V okamžicích, kdy při vlnění příčném je řada nejvíce rozvlněna, nastávají při vlnění longitudinálném kolem jednotlivých uzlů střídavě největší zhuštění a zředění; v okamžicích pak, kdy řada příčně rozvlněná se vzpřímuje, není při vlnění podélném ani zhuštění ani zředění, jednotlivé body jsouce ve svých rovnovážných polohách jsou aequidistantně rozloženy.