Karel Petr

Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 556--558

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122677

Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova.

Napsal **K. Petr.**

Ve článku stejného nadpisu, uveřejněném na str. 398 n. tohoto ročníku Časopisu, podal p. prof. Dr. *Láska* přímé odvození integrálu Poissonova z integrální formule Cauchyovy. Odvození toto zdá se pisateli těchto řádků neúplným a následkem toho těžko srozumitelným.

V následujícím podáno jiné zcela jednoduché odvození přímé integrálu Poissonova, používající toliko formule Cauchyovy. Buďtež k tomu cíli z, ζ komplexní proměnné a značme hodnoty jim komplexně sdružené z_1, ζ_1; t. j. klademe

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad z_1 = x - iy, \quad \zeta_1 = \xi - i\eta,$$

kdež x, y, ξ, η jsou čísla reálná. Budiž dále $f(z)$ funkce analytická v kruhu K (včetně jeho obvodu), jehož střed jest v počátku a jehož poloměr jest R. Pak, je-li bod z uvnitř kruhu toho, jest dle integrální formule Cauchyovy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{1}$$

při čemž integrační čára $\overline{K}$ jest obvod daného kruhu. Kdybychom do integrálu právě napsaného dosadili místo z nějakou hodnotu komplexní, jež jest dána bodem vně daného kruhu ležícím, dostali bychom nullu. Tak zejména dostaneme nullu, píšeme-li místo z tam $\dfrac{R^2}{z_1}$; neboť absolutní hodnota tohoto čísla jest větší než R (jest totiž $|z_1| = |z| < R$). Jest tedy

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \dfrac{R^2}{z_1}}\, d\zeta.$$

Jelikož hodnota ζ v integrále se vyskytující jest bod na obvodě kruhu, jest $\zeta \,.\, \zeta_1 = |\zeta|^2 = R^2$ a můžeme tudíž poslední rovnici psáti též ve tvaru

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overline{K}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_1 - z_1} \cdot \frac{z_1}{\zeta}\, d\zeta. \tag{2}$$

Sečtením (1) a (2) dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\zeta\zeta_1 - zz_1}{(\zeta - z)(\zeta_1 - z_1)} . f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

a to jest již integrál Poissonův. Neboť klademe-li

$$\zeta = Re^{i\varphi}, \quad \zeta_1 = Re^{-i\varphi}; \quad z = re^{i\psi}, \quad z_1 = re^{-i\psi},$$
$$d\zeta = iRe^{i\varphi}\,d\varphi = i\zeta\,d\varphi,$$

změní se ihned ve tvar

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2} f(\zeta)\,d\varphi. \tag{3}$$

Píšeme-li ještě vyznačujíce při $f(z)$ část reálnou a imaginárnou

$$f(z) = u(r, \psi) + iv(r, \psi),$$
$$f(\zeta) = u(R, \varphi) + iv(R, \varphi),$$

dostaneme porovnáním reálných i imaginárných částí rovnice (3) na obou stranách

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\varphi,$$

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R, \varphi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\varphi.$$

Kdybychom, místo abychom rovnice (1) a (2) sčítali, je odčítali a od rozdílu odečetli ještě rovnici

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$$

z (1) kladením $z = 0$ plynoucí, obdrželi bychom rovnici

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta_1 z - \zeta z_1}{(\zeta - z)(\zeta_1 - z_1)} f(\zeta)\,.\,d\varphi,$$

ze které plynou dva vztahy další, na př.

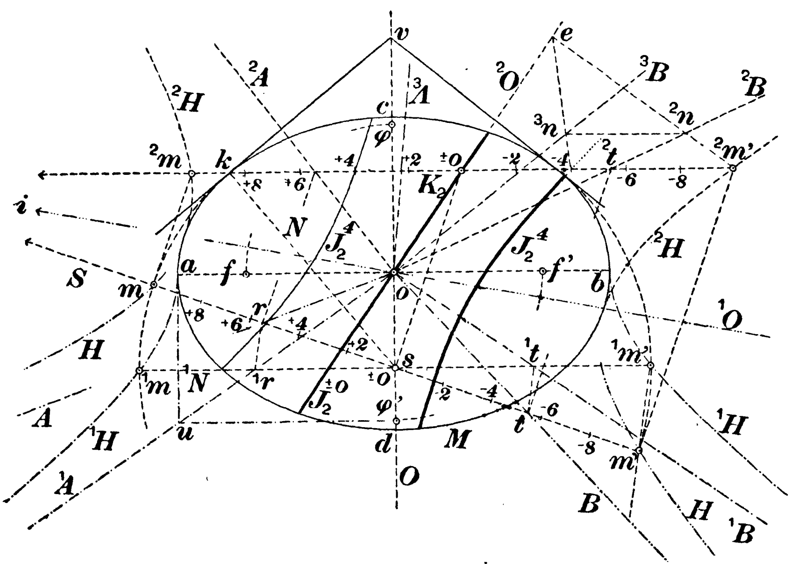
$$v(r, \psi) = v_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\frac{2Rr\sin(\varphi - \psi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\,d\varphi,$$

při čemž (u_0, v_0) jsou reálná čísla daná hodnotou funkce $f(z)$ v bodě $z = 0$, $f(0) = u_0 + v_0 \, . \, i$. Známý tento vztah vyjadřuje funkci $v(r, \psi)$ pomocí hodnot funkce $u(R, \varphi)$ daných na obvodě kruhu K.

O isofotách rotačních ploch 2. stupně.

Napsal Dr. **F. Kadeřávek.**

Isofoty ploch 2° jsou, jak známo, prostorové křivky 4°, zcela elementárný důkaz toho pro rotační plochy 2° jest obsahem tohoto článku.



Budiž úlohou sestrojiti isofoty rotační plochy 2° **P**, dané meridiánem M a osou O v nárysně (v. obr.) pro paprsek S s nárysnou ν rovnoběžný. Abychom sestrojili na kružnici K popisované bodem k meridiánu body intensitní, sestrojme v bodě