Jak by vypadalo řešení, kdyby v poslední rovnici přímkové stálo $+2y$ místo $-2y$?

O vyhledávání číselných skupin dvojmocninové stejnosti.

Pro žáky středních škol napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V XVII. sv. časopisu „Bulletin de la Société mathématique de France" uveřejnil *Michal Frolov* pojednání o skupinách čísel celistvých

$$\begin{array}{l} a_1, \; a_2, \; a_3, \ldots, a_n, \\ b_1, \; b_2, \; b_3, \ldots, b_n, \\ c_1, \; c_2, \; c_3, \ldots, c_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

vyhovujících podmínkám dvěma a sice nejen

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \Sigma b_k = \Sigma c_k = \ldots,$$

nýbrž mimo to ještě

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \Sigma b_k^2 = \Sigma c_k^2 = \ldots,$$

což znamená, že nejen součty prvých, nýbrž i druhých mocnin se tu sobě rovnají, což vyznačuje symbolem

$$a_1, \ldots, a_n \perp b_1 \ldots b_n \perp c_1, \ldots, c_n \perp \ldots,$$

poznamenávaje, že takovéto skupiny představují „une égalité à deux degrés", což vyjádřeno slovy „číselné skupiny dvojmocninové stejnosti." *)

---

* O pojednání tomto byla již obsažná, byť i jen krátká zpráva podána v 1. sešitě tohoto ročníku na str. 46., takže vracejíce se k němu tímto článkem, máme na zřeteli pouze přání četných našich čtenářů na středních školách, jimž takovéto výklady rázu skoro zábavného jsou často vítány. *Red.*

Aniž bychom se pouštěli do rozboru pojednání jeho, uvedeme zde pouze pravidlo trochu pozměněné a zevšeobecněné, jak možná si rychle zjednati dvě i více skupin takových.

Především tu patrno, že každá skupina čísel poskytuje se sebou stejnost dvojmocninovou, takže

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_n \perp a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_n\,,$$

což se i nemění, zavedeme-li do druhé skupiny jiný pořádek, jelikož tu velikost součtu nezávisí na pořádku, v jakém jdou sčítanci po sobě. I bude tedy na př. i

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n \perp a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots,\ a_n,\ a_1\,.$$

Zjednáme-li si nyní rozdíly stejnolehlých členů, obdržíme

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_1 - a_2 &= d_1\,, \\ a_2 - a_3 &= d_2\,, \\ &\ldots\ldots \\ a_{n-1} - a_n &= d_{n-1}\,, \\ a_n - a_1 &= d_n\,, \end{aligned}$$

z čehož patrno, že tu platí

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{n} d_k = 0\,;$$

a znásobíme-li vzorce soustavy (3), jak po sobě jdou, libovolnými čísly celistvými

$$(5)\qquad kr_1\,,\ kr_2\,,\ \ldots,\ kr_{k-1},\ kr_n\,,$$

musí býti — a tu spočívá podstata celého zjevu —

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{n} d_k r_k = 0,$$

aby skupina čísel, povstávající tím, že se k jednotlivým členům připočtou příslušná čísla řady (5), v níž vyhovují r podmínce (6), byla stejnosti dvojmocninové, aby tedy o ní platilo

$$(a_1+kr_1),\,(a_2+kr_2)\ldots(a_n+kr_n) \perp (a_2+kr_1),\,(a_3+kr_2)\ldots(a_1+kr_n).$$

Jak na první pohled patrno, platí zajisté dle podmínky (1) v této skupině odvozené

$$\Sigma a_k + k\Sigma r_k = \Sigma a_k + k\Sigma r_k;$$

co se však součtu čtverců týče, jest tu nutno, aby se vyhovělo podmínce (2), aby tedy bylo

$$(a_1+kr_1)^2+\ldots+(a^n+kr_n)^2$$
$$=(a_2+kr_1)^2+(a_3+kr_2)^2+\ldots+(a_1+kr_n)^2$$

aneb provedeme-li dvojmocnění a spojíme-li pak zdvojené součiny na levé straně, majíce na zřeteli soustavu (3)

$$\Sigma a_k^2 + 2k\Sigma d_k r_k + k^2\Sigma r_k^2 = \Sigma a_k^2 + k^2\Sigma r_k^2,$$

čemuž se vyhoví, zvolíme-li libovolné činitele

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$$

tak, aby povstalo

$$\Sigma d_k r_k = 0 \text{ a tedy i } 2k\Sigma d_k r_k = 0,$$

jakož bylo vzorcem (6) žádáno.

Zjednáme-li si tedy řadu čísel r podmínce (6) vyhovujících, sestavíme si konečně pomocí libovolného činitele k taktéž snadno i příslušné násobky.

Že k vůli zjednodušení možná jedno z čísel r, dejme tomu r_1, vzíti za nullu, netřeba podotýkati.

Jestli na př. skupina trojčlenná — s dvojčlennou nelze takto vůbec naložiti —

$$1, 3, 4 \perp 3, 4, 1,$$

bude patrně platiti

$$d_1 \equiv 1-3 = -2,$$
$$d_2 \equiv 3-4 = -1,$$
$$d_3 \equiv 4-1 = 3,$$

a podmínka (6) zníti

$$-2r_1 - r_2 + 3r_3 = 0,$$

takže položíme-li $r_1 = 0$, nutno r_2 a r_3 tak zvoliti, aby

$$r_2 = 3r_3,$$

což patrně nejjednodušeji se stane, jestli

$$r_2 = 3, \quad r_3 = 1,$$

čímž vznikne nová skupina 0, 3, 1; i bude tu

$$\begin{array}{lc}
 & 1,\ 3,\ 4 \perp 3,\ 4,\ 1 \\
\text{a připojíme-li} & \underline{0,\ 3,\ 1 \perp 0,\ 3,\ 1} \\
\text{též} & 1,\ 6,\ 5 \perp 3,\ 7,\ 2 \\
\text{a připojíme-li} & \underline{0,\ 3,\ 1 \perp 0,\ 3,\ 1} \\
\text{též} & 1,\ 9,\ 6 \perp 3,\ 10,\ 3 \ \text{ a t. d.}
\end{array}$$

Jestli na př. daná skupina čtyř čísel

$$2,\ 3,\ 5,\ 8 \perp 5,\ 8,\ 2,\ 3,$$

zjednejme si napřed

$$\begin{aligned}
d_1 &\equiv 2 - 5 = -3, \\
d_2 &\equiv 3 - 8 = -5, \\
d_3 &\equiv 5 - 2 = 3, \\
d_4 &\equiv 8 - 3 = 5,
\end{aligned}$$

načež podmínka (6) bude zníti

$$-3r_1 - 5r_2 + 3r_3 + 5r_4 = 0$$

anebo v případě jednodušším, kde $r_1 = 0$,

$$5r_2 = 3r_3 + 5r_4 \quad \text{neboli} \quad 5(r_2 - r_4) = 3r_3\,;$$

a této podmínce vyhovují nejmenší positivní čísla

$$r_2 = 4, \ r_3 = 5, \ r_4 = 1,$$

takže odvozená skupina čísel dvojmocninové stejnosti bude

$$2,\ 3+4k,\ 5+5k,\ 8+k \perp 5,\ 8+4k,\ 2+5k,\ 3+k$$

a tedy pro $k = 1$

$$2,\ 7,\ 10,\ 9 \perp 5,\ 12,\ 7,\ 4$$

pro $k = 2$ pak

$$2,\ 11,\ 15,\ 10 \perp 5,\ 16,\ 12,\ 5 \ \text{ a t. d.}$$