Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Poznámka o číslech Hamiltonových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 3, 119--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122672

Poznámka o číslech Hamiltonových.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V právě vydaném 1. sešitu „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" Bd XIX. uvádí se na str. 80., že *M. James Hammond* sestavil „une certaine série de nombres qui figurent dans la théorie de la transformation Tschirnhausen" *) a že pro tuto řadu čísel, jejíž první členové jsou

$$2,\ 3,\ 5\ 11,\ 47,\ 923,\ 409619,\ 83763206255,\ \ldots,$$

vyvinul zvláštní vzorec rekurrentní, dle něhož pomocí členů předcházejících možná určiti členy následující. O těchto členech, jež v jiném pojednání, uveřejněném v Lond. Philos. Trans. CLXXVIII. pag. 285—312 od Sylvestra a Hammonda, slují „*Hamiltons numbers*," uvádí se pak dále, že plynou z jednoduché identičnosti

$$(1)\quad (1-t)^{e_0}+t(1-t)^{e_1}+t^2(1-t)^{e_2}+\ldots\equiv 1-2t,$$

značí-li tu e_k o 1 zvětšené k-té číslo Hamiltonovo, tedy

$$e_0=3,\quad e_1=4,\ e_2=6,\quad e_3=12,\ \ldots$$

Konečně pak se o této řadě (1) poznamenává, že pro $t=\frac{1}{2}$ levá strana stává se naprosto konvergentní, kdežto pravá strana se mění v nullu, což prý představuje „das paradoxe Ergebnis, dass die Summe einer Reihe von positiven Potenzen von $\frac{1}{2}$ (gleich) Null ist."

Aniž bychom tu vyšetřovali základ těchto čísel Hamiltonových, kterýžto postup by nás od Tschirnhausena vedl ku *Bringovi* (1786), *Jerrardovi* (1834) a *R. Hamiltonovi* (1837) hodláme zde jenom vzorec (1) transformovati tak, aby připomenuté „paradoxon" odpadlo, zároveň pak nahraditi jej jiným, čísla Hamiltonova přímo poskytujícím.

---

*) Uveřejněné v „Acta Eruditorum" r. 1683 co „Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione".

Vyvineme-li totiž ve vzorci (1) jednotlivé členy strany levé podlé binomické poučky, obdržíme velmi snadno, porovnávajíce koëfficienty stejně vysokých mocnin veličiny t,

$$1 - e_0 = -2, \text{ z čehož } e_0 = 3,$$

pak

$$1 - e_1 + (e_0)_2 = 0,$$
$$1 - e_2 + (e_1)_2 - (e_0)_3 = 0,$$
$$1 - e_3 + (e_2)_2 - (e_1)_3 + (e_0)_4 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

z čehož se konečně zjedná vzorec

$$(2) \qquad e_n - 1 \equiv h_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (e_{n-k})_{k+1},$$

kdež h_n značí n-té číslo Hamiltonovo, takže na př.

$$h_4 = (e_3)_2 - (e_2)_3 + (e_1)_4 - (e_0)_5 = 66 - 20 + 1 = 47.$$

Týž vzorec (1), jejž krátce vyjádřiti možná tvarem symbolickým

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k (1-t)^{e_k}}{1-2t} = 1,$$

promění se však, derivujeme-li čitatele i jmenovatele podle t, napřed ve vzorec

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} t^{k-1} (1-t)^{e_k - 1} [te_k - k(1-t)] = 2,$$

z něhož plyne opět rekurrentní vzorec (2), zároveň pak poskytuje pro $t = {}^1/_2$ řadu nekonečnou

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k - k}{2^{e_k + k - 1}} = 2,$$

nebo-li po součtovém rozvodu,

$$2 = \frac{e_0}{2^{e_0 - 1}} + \frac{e_1 - 1}{2^{e_1}} + \frac{e_2 - 2}{2^{e_2 + 1}} + \frac{e_3 - 3}{2^{e_3 + 2}} + \ldots,$$

takže první členové tu byvše dosazeni poskytují řadu

$$2=\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^7}+\frac{9}{2^{14}}+\frac{44}{2^{51}}+\ldots,$$

čímž „paradoxon“ jest odstraněno.

Poznámky k analytické theorii přímky.

Pro žáky středních škol napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Vyjádřují-li v pravoúhlých souřadnicích rovnice

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1x+b_1y+c_1=0,\\ U_2 &\equiv b_1x+a_1y+c_2=0,\\ U_3 &\equiv a_2x+a_2y+c_3=0 \end{aligned} \tag{1}$$

tři zvláštní přímky, vyskytují se u nich vlastnosti, jež zasluhují bližšího povšimnutí a vytknutí. Jestiť tu *modulem*, kterýmž se rovnice tyto uvádějí na tvar normalní

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0,$$

kdež α, β, p mají známý význam, pro

$$\begin{aligned} &\text{přímku prvou}\ \mu_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2},\\ &\quad\text{„ druhou}\ \mu_2=\sqrt{b_1^2+a_1^2}=\mu_1,\\ &\quad\text{„ třetí}\ \mu_3=\sqrt{a_2^2+a_2^2}=a_2\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

takže nazvati možná přímky U_1 a U_2 *unimodulárnými*, jakýmiž jsou též přímky *kolmo* na sobě stojící. Zároveň tu patrno, že úhly, jež tyto přímky po dvou svírají, určují se vzorci

$$\begin{aligned} \cos\sphericalangle_2^1 &= \cos\delta_3=\frac{a_1b_1+a_1b_1}{\mu_1\mu_2}=\frac{2\,a_1b_1}{\mu_1^2},\\ \cos\sphericalangle_3^2 &= \cos\delta_1=\frac{a_2b_1+a_1a_2}{\mu_1\mu_3},\\ \cos\sphericalangle_1^3 &= \cos\delta_2=\frac{a_1a_2+a_2b_1}{\mu_1\mu_3}=\cos\delta_1; \end{aligned} \tag{3}$$