František Josef Studnička

O rychlém odvození některých řad trigonometrických. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 3, 113--116

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122671`

O rychlém odvození některých řad trigonometrických.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V rozličných oborech mathematických, zejména pak v integrálním počtu třeba jest často užiti některé řady trigonometrické, kteráž právě není na snadě aneb jejíž odůvodnění není hned odjinud známo, což tím hojněji se vyskytuje, čím vzácnější bývá dnešního dne důkladná a obšírná průprava elementární pro moderní výzkumy vyšší analyse. A předc jest třeba hlavně při ústních výkladech a přednáškách míti všechny praemissy, jichž se vyžaduje při některém výpočtu, v plné souvislosti na mysli, aby závěrek nejposlednější, k němuž celé počítání směřuje, vynikl co nejjasněji a nejpřirozeněji.

Pokud jest snadno v průběhu dedukce odvolávati se k té neb oné poučce, urychluje se početní postup co nejvíce; avšak smí se tak díti jen s poučkami takovými, jež nejsou všeobecně vyloučeny z kruhu obvyklého výkladu školního. V posledním případě tomto pak nezbývá nežli spůsobem poznámky doplniti, čeho k úplnosti celé argumentace se nedostává. Čím kratší pak jsou takovéto poznámky, tím méně přerušují hlavní průběh příslušného počtu, tím jsou vítanější.

Že se však při všeliké dedukci mathematické přijde rychleji k cíli, užívá-li se při ní praemiss výše stojících, v jisté řadě souvislých pravd mathematických dále se nacházejících, jest známo taktéž co zvláštní stránka tak zvaného *ducha mathematického* *), z čehož plyne, že ku poznámkovým odvozováním

*) Srovnej „*Studnička,* O duchu mathematickém a některých jeho zjevech.“ Časop. roč. II. str. 57 et seqq.

radno voliti cestu nejkratší, pokud možno, a širokou jen pokud nutno.

Příklady takového spůsobu odvozování poskytuje následující stanovení některých vzorců trigonometrických.

Abychom vyšetřili

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \cos k\alpha \text{ a } \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \sin k\alpha,$$

můžeme postupovati rozličně; nejkratčeji však přijdeme k cíli, užijeme-li jednoduché identičnosti na algebraickém dělení založené

$$(1) \quad e^{\alpha i} \frac{1}{1 - xe^{\alpha i}} = e^{\alpha i} [1 + xe^{\alpha i} + x^2 e^{2\alpha i} + x^3 e^{3\alpha i} + \ldots]$$

a pak identičnosti taktéž jednoduché

$$\frac{e^{\alpha i}}{1 - xe^{\alpha i}} = \frac{1}{e^{-\alpha i} - x} = \frac{e^{\alpha i} - x}{(e^{\alpha i} - x)(e^{-\alpha i} - x)},$$

načež obdržíme, majíce na zřeteli, že pro $i = \sqrt{-1}$ platí

$$e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

porovnáním obou identičností

$$\frac{\cos \alpha - x + i \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \cos k\alpha + i \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \sin k\alpha;$$

a z toho plyne dle známého závěrku

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \cos k\alpha = \frac{\cos \alpha - x}{1 - 2x \cos \alpha + x^2},$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \sin k\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2},$$

ze kterýchžto dvou vzorců možná celou řadu jiných odvoditi, na př. tím, že se dosadí $-x$ místo x, pak 1 místo x a sečítáním i odčítáním řad si odpovídajících pak se přiměřeným spůsobem postupuje dále.

Podobně obdržíme ze vzorce (1) napřed

$$\int_0^x \frac{e^{\alpha i}\,dx}{1-xe^{\alpha i}} = -l(1-xe^{\alpha i}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} e^{k\alpha i},$$

a uvážíme-li, že tu možná psáti podlé známého vzorce*)

$$l(1-xe^{\alpha i}) = l(1-x\cos\alpha - ix\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\,l(1-2x\cos\alpha + x^2) - i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha},$$

konečně rozloučením části realné a imaginarné

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\cos k\alpha = l\,\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\alpha + x^2}},$$

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\sin k\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha},$$

ze kterýchžto dvou vzorců taktéž možná odvoditi celou řadu jiných.

Ze vzorce (5) obdrží se na př. pro $x = -1$ přímo, jakož známo,

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{arctg}\,\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

a tedy, což i odjinud známo, pro $0 < \alpha < \pi$

$$(6)\qquad \frac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha - \ldots$$

A podobně obdržíme pro $x = 1$ z téhož vzorce (5)

---

*) Že všeobecně platí

$$l(\xi + \eta i) = \frac{1}{2}\,l(\xi^2+\eta^2) + i\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\eta}{\xi} + k\pi\right),$$

nutno pokládati za vzorec známý, jelikož tím dán *výměr* logaritmu čísla soujemného vůbec; při tom značí k číslo $\left\{\begin{matrix}\textit{sudé}\\ \textit{liché}\end{matrix}\right\}$ jestli $\xi \left\{\begin{matrix}\textit{positivní}\\ \textit{negativní}\end{matrix}\right\}$.

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{arctg} \left(\cot \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

takže bude podobně pro $0 < \alpha < \pi$

$$(7) \qquad \frac{\pi - \alpha}{2} = \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \ldots, ^{*)}$$

z čehož plyne pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ známá řada Leibnitzova

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

kteráž plyne i ze vzorce všeobecnějšího spojením řady (6) a (7) povstávajícího, totiž

$$(8) \qquad \frac{\pi}{4} = \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \sin 5\alpha + \ldots$$

Co se konečně týče konvergence těchto řad nekonečných, není tu třeba o ní se zmiňovati, jelikož úkolem naším bylo pouze vyvinouti řadu; ostatně patrno, že platí vesměs pro $1 > x > -1$ a ve zvláštních případech pro $x = \pm 1$.

---

*) Porovnej *Studnička* „O počtu differencialním" II. vyd. pag. 117 a pro takovéto řady vůbec: *Lobatto* „Lessen over de hoogere Algebra, Tweede Druk, pag. 320 et seqq. nebo *Schlömilch* „Handbuch der algebraischen Analysis" IV. Aufl. pag. 258 et seqq. anebo *Herr* „Lehrbuch der höheren Mathematik" I. Bd. pag. 114 et seqq., kdež vesměs různé vyskytují se obraty.