Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 3, 157--167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122669

Úlohy.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal p. *Václav Chmelař,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Kladné kořeny rovnice dané

$$ax + by = 620$$

buďtež $x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad \ldots \quad x_{10}, y_{10}.$

Součet těchto 10ti kladných hodnot x jest 455 a součet příslušných y rovná se 335, dle podmínek úlohy jest tedy

$$455a + 335b = 6200.$$

Krátíce, obdržíme rovnici

$$91\,a + 67\,b = 1240,$$

která má jediné kladné celistvé řešení, totiž

$$a = 7, \quad b = 9.$$

Rovnice hovící podmínkám úlohy jest tudíž

$$7x + 9y = 620$$

a kladná její řešení jsou:

$$x = 5,\ 14,\ 23,\ 32,\ 41,\ 50,\ 59,\ 68,\ 77,\ 86;$$
$$y = 65,\ 58,\ 51,\ 44,\ 37,\ 30,\ 23,\ 16,\ 9,\ 2.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jos. Bartoš* z VIII. tř. a *Ant. Kraus* ze VII. tř. g. v Č. Budějovicích, *J. Černý* z VIII. tř. g., *Břet. Tolman* ze VII. tř. r. a *Em. Hlavatý* ze VI. tř. r. v Hr. Králové, *Václav Grunt* a *Stanislav Bambas* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Frant. Berounský* a *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české v. real. v Praze, *Frant. Šoreys, Jan V. Kubíček* a *Frant. Hradilík* z VIII. tř. a *Boh. A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Václav Felix, Jar. Chloupek* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Ant. Mimra* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. a *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *M. V. Popper* ze VII. tř. g. v Písku a *Josef Novák*, stud. v Praze.

Řešení úlohy 9.

(Zaslal p. *Gothard Nehasil*, stud. VI. tř. č. vyšší r. v Praze.)

V trojúhelníku buďtež strany

$$a,\ b = a + d,\ c = a + 2d$$

a úhly

$$\alpha,\ \beta = \alpha + \delta,\ \gamma = \alpha + 2\delta.$$

Proti nejmenší straně a leží nejmenší úhel α, proti straně $a + d$ úhel $\alpha + \delta$ a proti největší straně $a + 2d$ největší úhel $\alpha + 2\delta$. Jelikož jest

$$\alpha + \beta + \gamma = 3(\alpha + \delta) = 180^0,$$

jest

$$\beta = \alpha + \delta = 60^0;$$

tudíž by mělo býti

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - ac$$

čili

$$(a + d)^2 = a^2 + (a + 2d)^2 - a(a + 2d).$$

Z rovnice této najdeme $d = 0$, kterýž výsledek praví, že *není trojúhelníka žádané vlastnosti*, leda bychom trojúhelník rovnostranný takým prohlásiti chtěli.

Řešení úlohy této podali pp.: *Jaroslav Friedrich* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Frant. Hradilík* a *Frant. Šoreys* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jan Černý* z VIII. tř. g., *Břetislav Tolman* a *Václav Chmelař* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Josef Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Václav Felix*, *Jar. Chloupek* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. a *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v N. Bydžově.

Řešení úlohy 10.

(Zaslal p. *Stanislav Bambas*, stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Poznamenáme-li plochy jednotlivých trojúhelníků posloupně $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, bude

$$p_1 = \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha,\ p_2 = \frac{a^2}{2}\sin 4\alpha, \ldots, p_n = \frac{a^2}{2}\sin 2n\alpha,$$

a že plocha každého trojúhelníku musí býti kladná, nutno, aby bylo $n < \frac{\pi}{2\alpha}$ a celistvé. Proto jest pro $\alpha = 4^0$ nanejvýše $n = 22$ trojúhelníků a plocha posledního

$$p_n = \frac{a^2}{2}\sin 176^0 = \frac{a^2}{2}\sin 4^0 = 2{\cdot}2323\ cm^2.$$

Plocha všech trojúhelníků

$$P = \frac{a^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \ldots + \sin 44\,\alpha)$$
$$= \frac{a^2 \sin 22\alpha \sin 23\alpha}{2\sin\alpha}$$

čili

$$P = \frac{a^2 \sin 88^0 \sin 92^0}{2\sin 4^0} = \frac{a^2 \cos 2^0 . \cos 2^0}{4\sin 2^0 \cos 2^0} = \frac{a^2}{4}\cot 2^0 = 458{\cdot}18\ cm^2.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Václav Felix*, *Jar. Chládek* a *Jar. Chloupek* z VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. a *J. Záhorský* ze VII. tř. g. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze, *Břetislav Kunc* ze VI. tř. r. v Rakovníku, *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v N. Bydžově, *Frant. Šoreys* a *Frant. Hradílík* z VIII. tř. a *Bohuslav A. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Vincenc Vodička* ze VII. tř. a *Gothard Nehasil* ze VI. tř. české vyšší r. v Praze, *Arnošt Porteš*, *Jan Černý* z VIII. tř. g., *Václav Chmelař*, *Břetislav Tolman* ze VII. tř. r. a *Em. Hlavatý* ze VI. tř. r. v Hr. Králové, *Ant. Mimra* ze VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, *Josef Novák*, stud. v Praze, *Václav Pavlík* z VIII. tř. a *M. V. Popper* ze VII. tř. g. v Písku.

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *Jan V. Kubíček,* stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

a) V základně kužele danou tětivou

$$\overline{ab} = p = 2r \sin \alpha$$

položme rovinu rovnoběžnou k rovině dotýkající se obliny podél přímky $\overline{ct} = s$. Touto rovinou vznikne řez parabolický, jehož ploský obsah

$$P = \frac{2}{3} pq,$$

kdež

$$q : s = (r + r \cos \alpha) : 2r.$$

Jest tedy

$$P = \frac{2}{3} rs \sin \alpha (1 + \cos \alpha). \tag{1}$$

b) Řezem vedeným dělí se kužel daný v díly K_1, K_2, z nichž K_1 budiž ten, který přímku $\overline{ct}$ obsahuje. Díl tento skládá se opět ze dvou částí: z kužele, který základnou má kruhovou úseč Q *acb* a výšku *v* rovnou výšce kužele daného, pak z kužele, jehož základnou jest řez parabolický a výškou vzdálenost v' roviny sečné od temene *t*. Ježto jest

$$v' = \frac{rv}{s}(1 - \cos \alpha),$$

$$K_1 = \frac{1}{3}(Pv' + Qv),$$

obdržíme snadným počtem

$$K_1 = \frac{\pi r^2 v \alpha}{540} - \frac{r^2 v}{18}(3 \sin 2\alpha - 4 \sin^3 \alpha) \tag{2}$$

a podobně

$$K_2 = \frac{\pi r^2 v (180 - \alpha)}{540} + \frac{r^2 v}{18}(3 \sin 2\alpha - 4 \sin^3 \alpha). \tag{3}$$

Výrazům těmto lze dáti též podobu

$$K_1 = \frac{\pi r^2 v\alpha}{540} + \frac{r^2 v}{9} \sin\alpha (2 + \cos\alpha)(1 - 2\cos\alpha),$$

$$K_2 = \frac{\pi r^2 v(180 - \alpha)}{540} - \frac{r^2 v}{9} \sin\alpha (2 + \cos\alpha)(1 - 2\cos\alpha).$$

Poznámka. Obsah řezu P dosahuje maxima při $\alpha = 60^0$, načež jest

$$P_{max} = \frac{rs\sqrt{3}}{2};$$

mimo to bude pak

$$K_1 = \frac{\pi r^2 v}{9}, \quad K_2 = \frac{2\pi r^2 v}{9},$$

z čehož patrno, že *maximalným řezem parabolickým dělen jest kužel v poměru 1 : 2.*

V řešení tuto podaném uvažovali jsme řez vzniklý rovinou, která též výšku kužele seče. Kdybychom stanovili řez parabolický, jehož rovina výšku neprotíná, přišli bychom k výsledkům obdobným.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Josef Novák*, stud. v Praze, *Václav Felix*, *Jar. Chloupek* a *Jaroslav Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Fr. Šoreys* a *Frant. Hradilík* z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Vincenc Vodička* ze VII. tř. české vyšší r. v Praze, *Jos. Bartoš* z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích, *Václav Grunt* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Jan Černý* z VIII. tř. g. v Hr. Králové, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku a *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v N. Bydžově.

Řešení úlohy 12.

(Zaslal p. *Břetislav Tolman*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Jest známo, že každému čtyrúhelníku lze vepsati nekonečně mnoho rovnoběžníků, jichž strany jsou rovnoběžny s úhlopříčnami jeho. Abychom vyšetřili geom. místo středů všech těchto rovnoběžníků, zvolme úhlopříčny daného čtyrúhelníka osami soustavy souřadnic rovnoběžných. Vrcholy čtyrúhelníka buďte určeny souřadnicemi

$$A(a, o),\quad B(o, b),\quad C(c, o),\quad D(o, d).$$

V stranách AB, BC, CD, DA zvolme body

$$M(x_1, y_1),\ N(x_2, y_1),\ P(x_2, y_2),\ Q(x_1, y_2)$$

tak, že jest

$$NM \parallel PQ \parallel X,\quad QM \parallel PN \parallel Y.$$

Souřadnice bodů těch vyhovují rovnicím stran

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1,\qquad \frac{x_2}{c} + \frac{y_1}{b} = 1,$$

$$\frac{x_2}{c} + \frac{y_2}{d} = 1,\qquad \frac{x_1}{a} + \frac{y_2}{d} = 1.$$

Střed S rovnoběžníka MNPQ má souřadnice

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

které dle rovnic předcházejících takto lze vyjádřiti:

$$x = \frac{(a + c)x_1}{2a},\quad y = \frac{(b + d)y_1}{2b}.$$

Ze vzorců těchto a z rovnice strany AB vylučme proměnné x_1, y_1; tím obdržíme rovnici hledaného místa

$$\frac{2x}{a + c} + \frac{2y}{b + d} = 1.$$

Rovnice tato náleží patrně přímce spojující středy úhlopříčen daného čtyrúhelníka.

Správné řešení úlohy této podali pánové: *Václav Chmelař* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Hradilík* a *Fr. Šoreys* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Arnošt Rosa* ze VII. tř. a *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku, *Jar. Chloupek* a *Václav Felix* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Václav Felix*, stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.)

Dána-li ellipsa rovnicí

(1) $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

jest rovnice normaly bodu (x_1, y_1)

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Průsečík její s osou velkou má souřadnice

$$y = 0$$

(2) $$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1$$

a s osou malou

$$x = 0$$

(3) $$y = \frac{b^2 - a^2}{b^2} y_1.$$

Rovnice (2), (3) jsou již rovnicemi kolmic, o nichž v úloze se mluví. Obdrží se tudíž g. m. jich průsečíků, jestliže z (1), (2), (3) vyloučíme x_1, y_1. Nejsnáze toho dojdeme, řešíce (2), (3) podle x_1 a y_1 a do (1) dosadíce. Vychází tu hned

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2} + \frac{y_2}{\left(\frac{a^2 - b^2}{b}\right)^2} = 1$$

jako rovnice g. místa.

Jest to ellipsa s danou soustředná a jí podobná; podobné však osy jsou střídavě k sobě kolmy.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Frant. Palata* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Šoreys* a *Jan V. Kubíček* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Jar. Friedrich* z VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Václav Felix* a *Jar. Chládek* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku a *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Jaroslav Friedrich*, stud. VIII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.)

Realný průsečík daných křivek má souřadnice

$$x_1 = \frac{q^2}{\sqrt[3]{2pq^2}}, \qquad y_1 = \sqrt[3]{2pq^2}.$$

Tečna paraboly v bodě tomto má rovnici

$$y_1 y = px + px_1,$$

tečna hyperboly v témž bodě určena rovnicí

$$y_1 x + x_1 y = 2q^2;$$

průsečíky tečen těch s osou X mají úsečky

$$x' = -x_1, \quad x'' = 2x_1.$$

Obsah trojúhelníka omezeného těmito tečnami a osou X jest proto

$$\triangle = \frac{1}{2}(x'' - x')y_1 = \frac{3}{2}q^2,$$

tudíž vskutku neodvislý od parametru p.

Tečna hyperboly omezuje s osou Y trojúhelník, jehož obsah

$$\triangle' = 2q^2;$$

jest tedy

$$\triangle = \frac{3}{4}\triangle'.$$

Řešení úlohy této podali pp.: *Stanislav Bambas* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Fr. Palata* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Šoreys* z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Jaroslav Chládek* a *Václav Felix* z VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Václav Pavlík* z VIII. tř. g. v Písku a *Arnošt Rosa* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *Břetislav Tolman*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Kružnice K vepsaná do trojúhelníka abc přináleží žádané ploše kulové; položíme-li přímkou D libovolně rovinu ϱ, jež by protínala kružnici K ve dvou bodech, na př. u, v, bude průsekem roviny ϱ s plochou kulovou kružnice L, jež procházejíc body u, v dotýká se přímky D. Sestrojíme-li střed této kružnice L dle známé konstrukce planimetrické v rovině ϱ a postavíme-li pak v středech kružnic K, L na roviny jejich $(abc) \equiv \pi a \varrho$ kolmice, bude průsečík obou kolmic s středem a spojnice $\overline{su}$ poloměrem žádané plochy kulové. Ježto pak body u, v procházejí dvě kružnice dotýkající se paprsku D, obdržíme dvě plochy kulové. Jsou-li však paprsky A, B, C neomezeny, lze k nim sestrojiti v rovině $(ABC) \equiv \pi$ čtyři kružnice tečné, a každá dá s tečnou čtvrtou D dvě plochy kulové; lze tedy sestrojiti obecně *osm* ploch kulových ze čtyř daných tečen.

Poznámka. Vedeme-li z bodu e ke kružnici K tečnu dotýkající se této v bodě g a přeneseme-li na přímku D délky $ed = ed' = eg$, jsou body d a d' ony, ve kterých se hledané plochy kulové paprsku D dotýkají.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Viktorin Šulc, Vincenc Vodička* ze VII. tř. české vyšší r. v Praze, *Karel Rosa* ze VI. tř. g. v Novém Bydžově a *Arnold Wolf* z V. tř. r. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze.

Správné řešení úlohy 1., 3., 4. a 5. zaslal též p. *Otta Ladislav*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úlohy 1., 2., 3., 4., 5., 6. a 7. p. *Fr. J. Rybka*, stud. VI. tř. r. v Brně a úlohy 5. p. *Václav Felix*, stud. VIII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Úloha 16.

Řešiti jest rovnici

$$4^{2\sin^2 x+1} + 4^{2\cos^2 x-1} = 10.$$

Red.

Úloha 17.

Tři skupiny obsahují dohromady 23 prvky, 86 amb a 210 teren. Kolik prvků jest v každé skupině?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 18.

Vně kruhu poloměru $r = 29$ *cm* dán jest bod mající od středu vzdálenosť $v = 60$ *cm*. Jaká jest pravděpodobnosť, že sečna bodem tím vedená obsahuje tětivu delší než 24 *cm*?

Týž.

Úloha 19.

Přímkami vedenými vrcholem trojúhelníka rozdělena jest základna na n sobě rovných a příčka spojující jeden konec podstavy se středem protější strany na tolikéž různých dílů. V jakém poměru jest r-tý tento dílec a_r k následujícímu a_{r+1}?

Prof. Vavřinec Jelínek.

Úloha 20.

Příčkou rovnoběžnou s půdicemi a, b lichoběžníka rozděliti tento ve dva lichoběžníky vzájemně podobné. Jak dlouhá jest část této příčky obsažená mezi uhlopříčnami?

Prof. A. Strnad.

Úloha 21.

Dán jest trojúhelník abc úhlů α, β, γ. Na půdici jeho ab přenesme $ac = aa_1$ (směrem ab), $bc = bb_1$ (směrem ba). Týmž spůsobem, jakým z trojúhelníka abc vznikl trojúhelník $a_1 b_1 c_1$ odvoďme z tohoto trojúhelník $a_2 b_2 c$, z tohoto opět $a_3 b_3 c$ a t. d. Jest vypočítati úhly trojúhelníka $a_n b_n c$ a dokázati, že při n rostoucím do nekonečna blíží se trojúhelník tento trojúhelníku rovnostrannému.

Týž.

Úloha 22.

Krychle, jejíž úhlopříčna stojí kolmo na určité rovině, promítnuta do této roviny nejprve kolmo, potom šikmo ve směru jiné z tělesných úhlopříčen. V kterém poměru jsou ploské obsahy obou průmětů? *Prof. A. Strnad.*

Úloha 23.

Do kružnice

$$K \equiv x^2 + y^2 - 34x - 12y = 0$$

vepsán jest čtyrúhelník, jehož úhlopříčny protínají se v bodě m (20, 10) a mají od bodu p (14, 2) vzdálenosť $v = 5\sqrt{2}$. Ustanoviti ploský obsah tohoto čtyrúhelníka. *Týž.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Roční zpráva vyšších realných škol v Rakovníce za školní rok 1888—89 obsahuje stať *O periodických řadách Lagrange-ových (Fourier-ových)*, již napsal *V. J. Hübner*. Stran 16.

V nápisu zaráží dvojitý titul uvažovaných řad. Spisovatel není sice prvý, který jej užívá, ale vždy tak se činí jen z nedorozumění, které, myslím, vyvoláno bylo Poissonem. Týž, podávaje totiž zprávu Akademii o prvé práci Fourierově o teple, ze známé rivality vůči tomuto přeceňuje význam dotyčných prací Lagrangeových, jak zvláště vyznačil Riemann v rozboru téže otázky, obsaženém v historickém úvodu jeho habilitační práce *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe,* vydané po smrti autorově Dedekindem v *Abhandlungen* Göttingenských (13. sv.). Zmíněná práce Fourierova obsahuje právě větu rozhodující pro podstatu a význam dotyčných řad trigonometrických, že každá *graficky* libovolná funkce dá se těmito vyjádřiti.

Pan autor vyvozuje řady Fourierovy a důsledné z nich vztahy cestou Cauchyho dle běžných německých kompendií; zastavuje se u podmínek sbíhavosti a vyvozuje některé vztahy Lejeune-Dirichletovy cestou poněkud odchylnou od oné, jaké užil původce. Spojitost při čtení ruší nepřehledně vložená „poznamenání“, z nichž 2. na str. 15. již samo také naznačuje, že Lagrange hlavně zakončené tvary a Fourier nekonečné řady svého jména uvažoval. *Jos. Beneš.*