Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

O jisté transformaci souřadníc

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, D361--D375

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122654

na označení bodov PP', QQ', RR', musí prechádzať aj bodmi $PP'S_{QR}S'_{QR}$. Celkove máme teda pre ňu 12 bodov $PP'QQ'RR'S_{PQ}S'_{PQ}S_{PR}S'_{PR}S_{QR}S'_{QR}$.

Poznámka. Body ${}^xH{}^xH'$ tvoria síce jednojednoznačnú príbuznosť na kubike k_H, ale nie sú pármi konjugovaných pólov vzhľadom na sieť.

Sur la cubique de Hesse du réseau de coniques. L'auteur montre une construction géométrique de la cubique plane qui est le lieu de points singuliers des coniques d'un réseau:

O JISTÉ TRANSFORMACI SOUŘADNIC.

Dr JAN SCHUSTER, Praha.

1. V následující práci se zabývám jistou transformací kosoúhlých souřadnic rovnoběžných v tetrametrické, kterou umožněn snadný přechod jedněch k druhým, a to hlavně od rovnoběžných k tetrametrickým.

Zásadní rozdíl proti obvyklým úvahám je v tom, že při přechodu od čtyrstěnové k soustavě rovnoběžné odpadá posun stěny čtyrstěnu do nekonečna, takže paralelní soustavu nepojímá za zvláštní případ čtyrstěnové. Učiníme totiž základem rovnoběžné soustavy kosoúhlý rovnoběžnostěn, a čtyrstěn jemu vepsaný, mající za hrany stěnové úhlopříčky rovnoběžnostěnu, zvolíme za základ druhé soustavy (viz obr.).

Další rozdíl proti obvyklé methodě je, že rovinové souřadnice neberu úměrné reciprokým úsekům rovin na souřadných osách, nýbrž úměrné plochám omezeným osami souřadnými a stopami roviny v souřadných rovinách.

Rovnoběžnostěn měj hrany d_a, d_b, d_c, které jsou zároveň délkovými jednotkami pro souřadnice bodu měřené od středu soustavy, jímž je společné těžiště obou základních těles.

Obecný bod M má tedy souřadnice xd_a, yd_b, zd_c.

Poloha téhož bodu M vzhledem na čtyrstěn ($1, 2, 3, 4$) určena poměrem objemů čtyrstěnů (λ, μ, ν, ξ), určených bodem M a stěnami základního čtyrstěnu, takže můžeme zvoliti

$$\lambda + \mu + \nu + \xi = 1. \tag{1}$$

Dělicí poměr bodu M vzhledem na pár protějších stěn rovnoběžnostěnu, na př. rovnoběžných k rovině (yz), je týž jako pro pár hran a, a', tedy

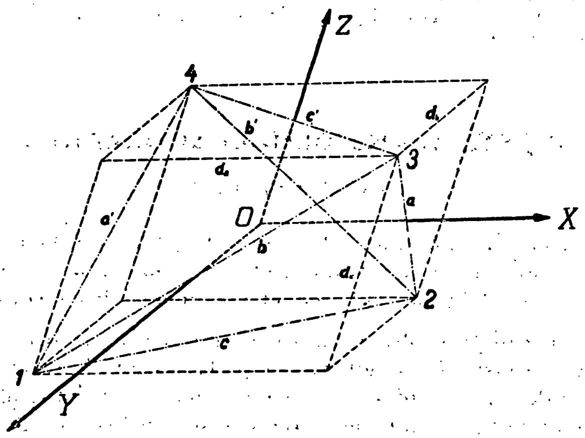
$$(xd_a + \tfrac{1}{2}d_a) : (xd_a - \tfrac{1}{2}d_a) = (x + \tfrac{1}{2}) : (x - \tfrac{1}{2}).$$

Týž poměr se vyjádří v souřadnicích tetrametrických, když sestrojíme hranami a, a' příčku jdoucí bodem M:

Příčka $\overline{3M}$, vedená vrcholem 3 a bodem M k protější stěně Δ_3 do bodu M_3, rozdělena v poměru

$$\overline{3M} : \overline{MM_3} = (\lambda + \mu + \xi) : \nu,$$

a podobně se příčka $\overline{2MM_2}$ rozdělí v poměru $\overline{2M} : \overline{MM_2} = (\lambda + \nu + \xi) : \mu$.



Body $2, 3, M$ určují řez čtyřstěnu o vrcholech $2, 3, M'$ (M' na hraně $\overline{41}$), a v něm má trojúhelník $2M'M$ vzhledem na trojúhelník $23M'$ poměrnou velikost $\frac{\nu}{\lambda + \mu + \nu + \xi}$, a trojúhelník $3MM'$ podobně $\frac{\mu}{\lambda + \mu + \nu + \xi}$. Zbývá tedy na trojúhelník $23M$ velikost $\frac{\lambda + \xi}{\lambda + \mu + \nu + \xi}$.

Z toho plyne, že poměr vzdáleností bodu M od hran $\overline{23} = a'$, $\overline{41} = a$ je

$$(\lambda + \xi) : (\mu + \nu).$$

Touž hodnotu získáme úsudkem: V trojúhelníku 241 průmět M_3 bodu M z vrcholu 3 určuje poměr

$$\overline{M'M_3} : \overline{M_3 2} = \mu : (\lambda + \xi),$$

a podobně v trojúhelníku 341 pro průmět M_2 bude

$$\overline{M'M_2} : \overline{M_2 3} = \nu : (\lambda + \xi).$$

Je-li dále L stopa příčky $\overline{M'M}$ na hraně $\overline{23}$, platí:

$$\overline{3L} : \overline{L2} = \mu : \nu.$$

Nyní dá Menelaova věta pro trojúhelník $LM'3$

$$\frac{\overline{M'M_2}}{\overline{M_2 3}} \cdot \frac{\overline{32}}{\overline{2L}} \cdot \frac{\overline{LM}}{\overline{MM'}} = 1 \quad \text{nebo} \quad \frac{\nu}{\lambda + \xi} \cdot \frac{\mu + \nu}{\nu} \cdot \frac{\overline{LM}}{\overline{MM'}} = 1,$$

z čehož $\overline{LM} : \overline{MM'} = (\lambda + \xi) : (\mu + \nu)$.

Ježto se poměr pro vnitřní bod čtyrstěnu bere kladně, ale dělicí poměr pro vnitřní bod úsečky k oběma koncovým bodům jejím záporně, plyne rovnice:

$$(\mu + \nu) : (\lambda + \xi) = (\tfrac{1}{2} + x) : (\tfrac{1}{2} - x)$$

a podobně dvě další:

$$\begin{aligned} (\nu + \lambda) : (\mu + \xi) &= (\tfrac{1}{2} + y) : (\tfrac{1}{2} - y) \\ (\lambda + \mu) : (\nu + \xi) &= (\tfrac{1}{2} + z) : (\tfrac{1}{2} - z). \end{aligned} \tag{2}$$

Ve všech úměrách je na obou stranách součet předů a sledů roven 1, a proto je:

$$\begin{aligned} \mu + \nu &= \tfrac{1}{2} + x, & \lambda + \xi &= \tfrac{1}{2} - x \\ \nu + \lambda &= \tfrac{1}{2} + y, & \mu + \xi &= \tfrac{1}{2} - y \\ \lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} + z, & \nu + \xi &= \tfrac{1}{2} - z. \end{aligned} \tag{2'}$$

Tyto rovnice dávají hledanou transformaci. Nadbytečné nejsou, neboť součet vždy dvou v jednom řádku vede na touž identitu. Řešení jejich dá jednak

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \tfrac{1}{2} - x + y + z \\ 2\mu &= \tfrac{1}{2} + x - y + z \\ 2\nu &= \tfrac{1}{2} + x + y - z \\ 2\xi &= \tfrac{1}{2} - x - y - z, \end{aligned} \tag{3}$$

jednak

$$\begin{aligned} 2x &= -\lambda + \mu + \nu - \xi \\ 2y &= \lambda - \mu + \nu - \xi \\ 2z &= \lambda + \mu - \nu - \xi. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Podobnou transformací možná přejít od tangenciálních souřadnic v soustavě paralelní k odpovídajícím v soustavě čtyrstěnové.

Jsou-li $\frac{u}{d_a}, \frac{v}{d_b}, \frac{w}{d_c}$ reciproké hodnoty úseků určených rovinou na souřadných osách, má rovnice roviny v kosoúhlé soustavě tvar:

$$ux + vy + wz = 1. \tag{5}$$

Podobně buďte $\eta, \vartheta, \iota, \varkappa$ tangenciální souřadnice tetrametrické, a tady platí stejně rovnice roviny:

$$\eta\lambda + \vartheta\mu + \iota\nu + \varkappa\xi = 0. \tag{6}$$

Dosadíme-li hodnoty (4) do (5), znásobené číslem 2, a uspořádáme-li podle bodových souřadnic, bude

$$\lambda(-u + v + w) + \mu(u - v + w) + \nu(u + v - w) + \xi(-u - v - w) = 2 = 2(\lambda + \mu + \nu + \xi),$$

kde poslední část odpovídá rovnici (1). Porovnáním této rovnice se (6) bude

$$\begin{aligned} \sigma\eta &= -u + v + w - 2 \\ \sigma\vartheta &= u - v + w - 2 \\ \sigma\iota &= u + v - w - 2 \\ \sigma\varkappa &= -u - v - w - 2 \end{aligned} \tag{7}$$

a sečtením

$$\eta + \vartheta + \iota + \varkappa = -\frac{8}{\sigma}, \tag{8}$$

kde σ je činitel úměrnosti.

S druhé strany dá dosazení z hodnot (3) do (6):

$$\tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta + \iota + \varkappa) + x(-\eta + \vartheta + \iota - \varkappa) + y(\eta - \vartheta + \iota - \varkappa) + \\ + z(\eta + \vartheta - \iota - \varkappa) = 0$$

a porovnáním s (5), hledíme-li k (8), vznikne

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sigma} u &= -\eta + \vartheta + \iota - \varkappa \\ \frac{4}{\sigma} v &= \eta - \vartheta + \iota - \varkappa \\ \frac{4}{\sigma} w &= \eta + \vartheta - \iota - \varkappa. \end{aligned} \tag{9}$$

Předmětem následujících úvah jest ukázat, jak tyto souřadnice poměrové, hodící se k vyjádření vztahů afinních nebo projektivních, přebráním koeficientů značících délky úseček nebo velikosti ploch, mohou vystihovat vztahy metrické.

3. Jako první příklad provedeme převod výrazu pro vzdálenost dvou bodů ze soustavy rovnoběžné ve čtyrstěnovou.

Označíme-li body souřadnicemi (x_1, y_1, z_1) resp. (x_2, y_2, z_2), platí pro vzdálenost:

$$r^2 = d_a^2(x_2 - x_1)^2 + d_b^2(y_2 - y_1)^2 + d_c^2(z_2 - z_1)^2 + 2d_bd_c\cos(d_bd_c)\,. \\ .\,(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) + 2d_cd_a\cos(d_cd_a)(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) + 2d_ad_b\,. \\ .\cos(d_ad_b)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Ale

$$2d_bd_c\cos(d_bd_c) = d_b^2 + d_c^2 - a^2 = \frac{a'^2 - a^2}{2}, \text{ atd.,}$$

neboť v rovnoběžníku je

$$d_b^2 + d_c^2 = \frac{a^2 + a'^2}{2} \text{ atd.,}$$

z čehož

$$4d_a^2 = -a^2 - a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2.$$

Máme tedy

$$4r^2 = \sum (-a^2 - a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)(x_2 - x_1)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{abc \\ xyz}} \frac{a'^2 - a^2}{2} (y_2 - y_1)(z_2 - z_1).$$

Na tento výraz užijeme rovnic (4). Určíme koeficienty při a^2 a při a'^2. První je:

$$\begin{aligned} &-(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) = \\ &= -(x_2 - x_1)^2 + [(y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)]^2 = -[(x_2 - x_1) + \\ &+ (y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)][(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)] = \\ &= -4(\mu_1 - \mu_2)(\nu_1 - \nu_2), \end{aligned}$$

a druhý:

$$\begin{aligned} &-(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) = \\ &= -(x_2 - x_1)^2 + [(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)]^2 = [-(x_2 - x_1) + \\ &+ (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)][(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)] = \\ &= -4(\lambda_2 - \lambda_1)(\xi_2 - \xi_1). \end{aligned}$$

Platí tedy pro vzájemnou vzdálenost dvou bodů

$$\begin{aligned} r^2 = a^2(\mu_2 - \mu_1)(\nu_2 - \nu_1) + b^2(\nu_2 - \nu_1)(\lambda_2 - \lambda_1) + c^2(\lambda_2 - \lambda_1)\,. \\ .\,(\mu_2 - \mu_1) + a'^2(\lambda_2 - \lambda_1)(\xi_2 - \xi_1) + b'^2(\mu_2 - \mu_1)(\xi_2 - \xi_1) + \\ + c'^2(\nu_2 - \nu_1)(\xi_2 - \xi_1). \end{aligned} \tag{10}$$

4. Určeme plochu p trojúhelníka s danými vrcholy $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ jako funkci průmětů na souřadné roviny.

Jsou-li q_a, q_b, q_c velikosti stěn základního rovnoběžnostěnu, platí

$$4\mathrm{p}^2 = q_a^2 \begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}^2 + q_b^2 \begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1 \\ 1, & z_2, & x_2 \\ 1, & z_3, & x_3 \end{vmatrix}^2 + q_c^2 \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ 2q_bq_c \cos(q_bq_c) \begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1 \\ 1, & z_2, & x_2 \\ 1, & z_3, & x_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} + 2q_cq_a \cos(q_cq_a)\,.$$

$$.\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} + 2q_aq_b \cos(q_aq_b) \begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1 \\ 1, & z_2, & x_2 \\ 1, & z_3, & x_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Znásobme každý determinant 4, a užijme formulí (4). Obdržíme na př.

$$|1, 2y_1, 2z_1| = |\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 + \xi_1, \lambda_1 - \mu_1 + \nu_1 - \xi_1, \lambda_1 + \mu_1 - \nu_1 - \xi_1|,$$

když jsme 1 v prvním sloupci nahradili dle rovnice (1). Zde píšeme pro úsporu místa jen prvn í řádky determinantů.

Přičteme-li první sloupec k ostatním v prvním determinantu, když pak činitele 2 z druhého a třetího sloupce vytkneme, a tyto oba odečteme od prvního obdržíme postupně

$$|\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 + \xi_1, 2(\lambda_1 + \nu_1), 2(\lambda_1 + \mu_1)| = 4|\xi_1 - \lambda_1, \lambda_1 + \nu_1, \lambda_1 + \mu_1|$$

a poslední determinant se dá rozložit na čtyři:

$$4\{|\xi_1, \lambda_1, \mu_1| + |\xi_1, \nu_1, \lambda_1| + |\xi_1, \nu_1, \mu_1| + |-\lambda_1, \nu_1, \mu_1|\}.$$

Zaveďme označení:

$$|\mu_1, \nu_1, \xi_1| = -\Lambda, \quad |\nu_1, \xi_1, \lambda_1| = M, \quad |\xi_1, \lambda_1, \mu_1| = -N, \quad |\lambda_1, \mu_1, \nu_1| = \Xi,$$

což jsou poměrné velikosti průmětů trojúhelníka ABC z rohů čtyrstěnu základního na protější jeho stěny. Máme tedy

$$\begin{aligned} |1, y_1, z_1| &= +\Lambda - M - N + \Xi, \\ |1, z_1, x_1| &= -\Lambda + M - N + \Xi, \\ |1, x_1, y_1| &= -\Lambda - M - N + \Xi. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (11), obdržíme jako koeficient při Ξ^2

$$q_a^2 + q_b^2 + q_c^2 + 2q_bq_c\cos(q_bq_c) + 2q_cq_a\cos(q_cq_a) + 2q_aq_b\cos(q_aq_b) = \\ = 2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - \Delta_4^2)$$

a podobně při ostatních čtvercích, kdežto při součinu $\Lambda\Xi$ bude

$$2[q_a^2 - q_b^2 - q_c^2 + 2q_bq_c\cos(q_bq_c)] = 2[2q_a^2 - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \\ + \Delta_4^2) + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta_4^2] = 4[q_a^2 - \Delta_1^2 - \Delta_4^2] = \\ = -8\Delta_1\Delta_4\cos\alpha',$$

a podobně ostatní dvojnásobné součiny. Zaveďme ještě $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 = 2K$. Když tedy dosadíme do rovnice (11), zkrátí se 4 a bude:

$$\begin{aligned} p^2 = (K - \Delta_1^2)\Lambda^2 + (K - \Delta_2^2)M^2 + (K - \Delta_3^2)N^2 + \\ + (K - \Delta_4^2)\Xi^2 - 2\Lambda\Xi\Delta_1\Delta_4\cos\alpha' - 2M\Xi\Delta_2\Delta_4\cos\beta' - \\ - 2N\Xi\Delta_3\Delta_4\cos\gamma' - 2MN\Delta_2\Delta_3\cos\alpha - 2N\Lambda\Delta_3\Delta_1\cos\beta - \\ - 2\Lambda M\Delta_1\Delta_2\cos\gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

5. Abychom ukázali účelnost transformace pro rovinové souřadnice, uvažujme rovnici koule. Nechť koule poloměru r opsána kolem počátku souřadnic. Vedeme-li tečnou rovinu ke kouli, vzniknou na souřadných osách úseky $\frac{d_a}{u}$, $\frac{d_b}{v}$, $\frac{d_c}{w}$. Úseky uťaté na souřadných rovinách jsou

$$q_a u = \frac{d_b d_c}{vw}\sin(d_b d_c), \text{ atd.},$$

tedy násobky ploch stěn základního rovnoběžnostěnu, jak slíbeno v odst. 1.

Je-li P objem základního rovnoběžnostěnu, E jeho rožný sinus, r vzdálenost tečné roviny od počátku, platí rovnice

$$\left(\frac{d_a d_b d_c}{uvw} E\right)^2 = r^2[\Sigma q_a{}^2 u^2 - 2\Sigma q_b q_c vw \cos(q_b q_c)] \frac{1}{u^2 v^2 w^2},$$

kde Σ značí součet tří členů, které vzniknou cyklickou substitucí prvků a, b, c, u, v, w.

Ježto $d_a d_b d_c E = P$ jest objem souřadného rovnoběžnostěnu, bude

$$\Sigma q_a{}^2 u^2 - 2\Sigma q_b q_c vw \cos(q_b q_c) = \frac{P^2}{r^2}. \tag{13}$$

Tato rovnice definuje kouli korelativně tečnými rovinami opsanou kolem počátku. Praví: Rovinové souřadnice tečných rovin koule opsané kolem počátku mají vektorový součet rovný objemu základního rovnoběžnostěnu, dělenému poloměrem koule.

Podobný vztah lze nalézt též v rovině. Když v soustavě rovnoběžných souřadnic je v ose x jednotka délková a, v ose y jednotka b, a je-li ω úhel os, zní rovnice kružnice, geometrického místa bodů stálého vektorového součtu souřadnic:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \cos\omega = r^2.$$

Táž kružnice má pak v tečnových souřadnicích $\frac{u}{a}, \frac{v}{b}$ rovnici v determinantním tvaru:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\omega, & \frac{u}{a} \\ \cos\omega, & 1, & \frac{v}{b} \\ \frac{u}{a}, & \frac{v}{a}, & \frac{1}{r^2} \end{vmatrix} = 0,$$

nebo

$$\frac{\sin^2\omega}{r^2} - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} + 2\frac{uv}{ab}\cos\omega = 0,$$

nebo

$$u^2b^2 + v^2a^2 - 2uvab \cos\omega = \frac{a^2b^2 \sin^2\omega}{r^2} = \frac{p^2}{r^2}.$$

Tedy vidíme, že vektorový součet tečnových souřadnic se rovná obsahu p základního rovnoběžníka, dělenému poloměrem kružnice.

Ovšem v rovině není možný přímý přechod od souřadnic rovnoběžných k trojúhelníkovým.

Výsledek odvozený přímo metricky pro kouli v naší soustavě rovnoběžné dá se odvodit též analyticky.

Rovnice koule je:

$$d_a^2x^2 + d_b^2y^2 + d_c^2z^2 + 2d_bd_cyz\cos(d_bd_c) + 2d_cd_azx\cos(d_cd_a) + \\ + 2d_ad_bxy\cos(d_ad_b) = r^2$$

a přechod k souřadnicím rovinovým dán zase determinantní rovnicí:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(d_ad_b), & \cos(d_ad_c), & \dfrac{u}{d_a} \\ \cos(d_bd_a), & 1, & \cos(d_bd_c), & \dfrac{v}{d_b} \\ \cos(d_cd_a), & \cos(d_cd_b), & 1, & \dfrac{w}{d_c} \\ \dfrac{u}{d_a}, & \dfrac{v}{d_b}, & \dfrac{w}{d_c}, & \dfrac{1}{r^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozvinutí tohoto výrazu obdržíme:

$$\sum \frac{u^2}{d^2_a}(1 - \cos^2(d_bd_c)) + 2\sum \frac{v}{d_b}\frac{w}{d_c}[\cos(d_bd_c) - \cos(d_ad_b)\cos(d_ad_c)] + \\ + \frac{1}{r^2}E^2 = 0$$

nebo

$$\sum \frac{u^2}{d_a^2}\sin^2(d_bd_c) - 2\sum \frac{v}{d_b}\frac{w}{d_c}\sin(d_ad_b)\sin(d_bd_c)\cos(q_aq_b) = \frac{1}{r^2}E^2.$$

Znásobme tuto rovnici součinem $d_a^2d_b^2d_c^2$. Ale ježto

$d_bd_c\sin(d_bd_c) = q_a$, $d_cd_a\sin(d_cd_a) = q_b$, $d_ad_b\sin(d_ad_b) = q_c$, $Ed_ad_bd_c = P$,

platí

$$\Sigma u^2q_a^2 - 2\Sigma q_bq_c\cos(q_bq_c)\,vw = \frac{P^2}{r^2},$$

což je zase rovnice (13).

Převeďme rovnici (13) na souřadnice rovinové tetrametrické. Znásobme rovnici číslem $\frac{16}{\sigma^2}$ a dosaďme hodnoty z (9). Pak obdržíme při η^2 koeficient:

$$q_a^2 + q_b^2 + q_c^2 + 2q_bq_c\cos(q_bq_c) + 2q_cq_a\cos(q_cq_a) + \\ + 2q_aq_b\cos(q_aq_b) = 4\Delta_1^2$$

a při členu $\eta\vartheta$ je koeficient

$$2(-q_a^2 - q_b^2 + q_c^2 + 2q_aq_b\cos(q_aq_b)) = 2[2q_c^2 - (q_a^2 + q_b^2 + q_c^2) + \\ + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta_4^2] = 4[q_c^2 - \Delta_1^2 - \Delta_4^2] = -8\Delta_1\Delta_4\cos\alpha',$$

takže po zkrácení číslem 4 zbude

$$\Sigma\Delta_1^2\eta^2 - 2\Sigma\Delta_1\Delta_4\eta\vartheta\cos\alpha' = \frac{P^2}{r^2}\frac{4}{\sigma}. \tag{14}$$

Zde první součet má 4 členy, druhý 6 členů.

6. Jako další příklad užití rovinových souřadnic určeme úhel dvou rovin (u, v, w) a (u_0, v_0, w_0).

Buď $\mathfrak{G}$ plocha trojúhelníka vyťatého souřadnými rovinami na první rovině, a podobně $\mathfrak{G}_0$ na druhé rovině. Uvažujme průmět všech stěn pětistěnu obsaženého mezi oběma danými rovinami a rovinami souřadnými.

Průmět všech stěn pětistěnu na stěnu $\mathfrak{G}$ vede na rovnici:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\cos(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0) + (u - u_0)\,q_a\cos(q_a\mathfrak{G}) + (v - v_0)\,q_b\cos(q_b\mathfrak{G}) + \\ + (w - w_0)\,q_c\cos(q_c\mathfrak{G}). \tag{15}$$

Ale čtyrstěn uťatý rovinou $\mathfrak{G}$ v soustavě souřadné dá:

$$\mathfrak{G}\cos(q_a\mathfrak{G}) = q_au - q_bv\cos(q_bq_c) - q_cw\cos(q_cq_a),\ \text{atd.} \tag{16}$$

Znásobme rovnici (15) veličinou $\mathfrak{G}$ a dosaďme

$$\mathfrak{G}^2 = q_a^2u^2 + q_b^2v^2 + q_c^2w^2 - 2q_bq_cvw\cos(q_bq_c) - 2q_cq_awu\cos(q_cq_a) - \\ - 2q_aq_bvu\cos(q_aq_b),$$

jakož i výrazy (16). Tím vznikne

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0\cos(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0) = \\ = u^2q_a^2 + v^2q_b^2 - 2q_bq_cvw\cos(q_bq_c) - 2q_cq_awu\cos(q_cq_a) + \\ + w^2q_c^2 - 2q_aq_bvw\cos(q_aq_b) - \\ - (u - u_0)[q_a^2u - q_aq_bv\cos(q_aq_b) - q_aq_c\cos(q_aq_c)\,w] - \\ - (v - v_0)[q_bq_au\cos(q_bq_a) + q_b^2v - q_bq_cw\cos(q_bq_c)] - \\ - (w - w_0)[-q_cq_au\cos(q_cq_a) - q_cq_bv\cos(q_cq_b) + q_c^2w].$$

V této rovnici se zruší vpravo první řádek a v ostatních řádcích všecky členy znásobené činitelem bez indexu nuly. Odtud

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0\cos(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_0) = \\ = q_a^2u_0u + q_b^2vv_0 + q_c^2ww_0 - q_bq_c(vw_0 + v_0w)\cos(q_bq_c) - \\ - q_cq_a(wu_0 + w_0u)\cos(q_cq_a) - q_aq_b(uv_0 + u_0v)\cos(q_aq_b). \tag{17}$$

Přitom utvořen výraz $\mathfrak{G}_0$ stejně jako $\mathfrak{G}$ souřadnicemi opatřenými indexem 0. Transformací (9) přejde výraz (15) v tento:

$$\mathfrak{G}^2 = 4[\Delta_1^2\eta^2 + \Delta_2^2\vartheta^2 + \Delta_3^2\iota^2 + \Delta_4^2\varkappa^2 - 2\Sigma(\Delta_2\Delta_3\cos\alpha'\vartheta\iota + \\ + \Delta_1\Delta_4\eta\varkappa\cos\alpha)]\tfrac{1}{64}\sigma^2 = \tfrac{1}{64}\sigma^2 \,.\, 4H^2.$$

Tedy platí $\mathfrak{G} = \frac{1}{4}\sigma H$, a podobně $\mathfrak{G}_0 = \frac{1}{4}\sigma H_0$.

Obdržíme tedy pro úhel Θ dvou rovin:

$$
\begin{gathered}
HH_0 \cos\Theta = \Delta_1^2\eta\eta_0 + \Delta_2^2\vartheta\vartheta_0 + \Delta_3^2\iota\iota_0 + \Delta_4^2\varkappa\varkappa_0 - \\
- 2(\vartheta_0\iota + \vartheta\iota_0)\,\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha' - 2(\iota_0\eta + \iota\eta_0)\,\Delta_3\Delta_1 \cos\beta' - \\
- 2(\eta_0\vartheta + \eta\vartheta_0)\,\Delta_1\Delta_2 \cos\gamma' - \\
- 2(\eta_0\varkappa + \eta\varkappa_0)\,\Delta_1\Delta_4 \cos\alpha - 2(\vartheta_0\varkappa + \vartheta\varkappa_0)\,\Delta_2\Delta_4 \cos\beta - \\
- 2(\iota_0\varkappa + \iota\varkappa_0)\,\Delta_3\Delta_4 \cos\gamma.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Vymizení pravé strany dává podmínku kolmosti obou rovin.

7. Určíme rovinu u, v, w kolmou ke dvěma rovinám, pro něž souřadnice určeny oběma rovnicemi (pro $i = 1, 2$):

$$
\begin{gathered}
uq_a[q_a u_i - q_b v_i \cos(q_a q_b) - q_c w_i \cos(q_a q_c)] + vq_b[- q_a u_i \cos(q_b q_a) + \\
+ q_b v_i - q_c w_i \cos(q_b q_c)] + wq_c[- q_a u_i \cos(q_a q_c) - q_b v_i \cos(q_c q_b) + \\
+ q_c w_i] = 0.
\end{gathered}
$$

Odtud plyne výsledek:

$$
\begin{gathered}
uq_a : \begin{vmatrix} - q_a u_1 \cos(q_b q_a) + q_b v_1 - q_c w_1 \cos(q_b q_c), \\ - q_a u_2 \cos(q_b q_a) + q_b v_2 - q_c w_2 \cos(q_b q_c), \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} - q_a u_1 \cos(q_c q_a) - q_b v_1 \cos(q_c q_b) + q_c w_1 \\ - q_a u_2 \cos(q_c q_a) - q_b v_1 \cos(q_c q_b) + q_c w_2 \end{vmatrix} = \\
vq_b : \begin{vmatrix} - q_a u_1 \cos(q_c q_a) - q_b v_1 \cos(q_c q_b) + q_c w_1, \\ - q_a u_2 \cos(q_c q_a) - q_b v_2 \cos(q_c q_b) + q_c w_2, \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} q_a u_1 - q_b v_1 \cos(q_a q_b) - q_c w_1 \cos(q_a q_c) \\ q_a u_2 - q_b v_2 \cos(q_a q_b) - q_c w_2 \cos(q_a q_c) \end{vmatrix} = \\
wq_c : \begin{vmatrix} q_a u_1 - q_b v_1 \cos(q_a q_b) - q_c w_1 \cos(q_a q_c), \\ q_a u_2 - q_b v_2 \cos(q_a q_b) - q_c w_2 \cos(q_a q_c), \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} - q_a u_1 \cos(q_b q_a) + q_b v_1 - q_c w_1 \cos(q_b q_c) \\ - q_a u_2 \cos(q_b q_a) + q_b v_2 - q_c w_2 \cos(q_b q_c) \end{vmatrix}.
\end{gathered}
$$

V těchto úměrách určeme nejprve jednodušší tvar determinantů. Při rozkladu v jednodušší tvary některé determinanty odpadnou, totiž vzniklé ze souhlasně položených sloupců.

První determinant dá:

$$
\begin{gathered}
q_b q_a \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} [\cos(q_c q_a) + \cos(q_c q_b) \cos(q_b q_a)] + \\
+ q_b q_c \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} (1 - \cos^2(q_c q_b)) + q_c q_a \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} [\cos(q_b q_a) + \\
+ \cos(q_c q_a) \cos(q_b q_c)].
\end{gathered}
$$

Podle polární věty cosinové lze nahradit závorky s cosiny stěnových úhlů siny, doplnit součiny obsahů stěn, takže

$$
q_a q_b q_c \left\{ \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} (-1) \frac{\sin(q_c q_b) \sin(q_a q_b) \cos(d_a d_c)}{d_a d_b \sin(d_a d_b)} + \right.
$$

$$+\begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} \frac{\sin^2(q_bq_c)}{d_bd_c\sin(d_bd_c)} + \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} (-1) \cdot \frac{\sin(q_aq_c)\sin(q_bq_c)\cos(d_ad_b)}{d_ad_c\sin(d_ad_c)} \Bigg\} =$$

$$= \frac{\sin(q_bq_c)\, q_aq_bq_c}{d_ad_bd_c} \frac{E}{E} \left\{ \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} (-1)\, d_c \cos(d_ad_c) + \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} d_a + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} (-1)\, d_b \cos(d_ad_b) \right\}.$$

Druhý determinant je roven

$$q_aq_b \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} [\cos(q_cq_a)\cos(q_aq_b) + \cos(q_bq_c)] +$$

$$+ q_cq_a \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} [1 - \cos^2(q_cq_a)] +$$

$$+ q_bq_c \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} [\cos(q_bq_c)\cos(q_cq_a) + \cos(q_aq_b)] =$$

$$= q_aq_bq_c \left\{ \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} (-1) \frac{\sin(q_cq_a)\sin(q_aq_b)\cos(d_bd_c)}{d_bd_c\sin(d_bd_c)} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} \frac{\sin^2(q_cq_a)}{d_ad_c\sin(d_cd_a)} + \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} (-1) \frac{\sin(q_bq_c)\sin(q_cq_a)\cos(d_ad_b)}{d_bd_c\sin(d_bd_c)} \right\} =$$

$$= q_aq_bq_c \frac{\sin(q_cq_a)}{d_ad_bd_c} \frac{E}{E} \left\{ \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} (-1)\, d_c \cos(d_bd_c) + \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix} d_b + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} (-1)\, d_a \cos(d_ad_b) \right\}.$$

Když převedeme součinitel q_a při u na pravou stranu, podobně q_b při v, vystoupí před výrazem vpravo činitel

$$\frac{\sin(q_bq_c)}{d_bd_c\sin(d_bd_c)} = \frac{E}{d_ad_bd_cE} d_a.$$

Ve všech poměrech je před závorkou pak společný činitel

$$\frac{q_aq_bq_c}{(d_ad_bd_c)^2} \frac{E^2}{E^2},$$

který možno v úměrách zkrátit. Převedeme-li pak d_a dovnitř závorky a přepíšeme-li výraz ve dvojité závorce v determinant trojřádkový, obdržíme pro poměr rovinových souřadnic roviny kolmé ke dvěma daným rovinám výraz:

$$u : v : w = \begin{vmatrix} d_a^2, & u_1, & u_2 \\ -d_ad_b\cos(d_ad_b), & v_1, & v_2 \\ -d_ad_c\cos(d_ad_c), & w_1, & w_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -d_ad_b\cos(d_ad_b), & u_1, & u_2 \\ d_b^2, & v_1, & v_2 \\ -d_bd_c\cos(d_bd_c), & w_1, & w_2 \end{vmatrix} : \tag{19}$$

$$: \begin{vmatrix} -d_ad_c\cos(d_ad_c), & u_1, & u_2 \\ -d_bd_c\cos(d_bd_c), & v_1, & v_2 \\ d_c^2, & w_1, & w_2 \end{vmatrix}.$$

Kdybychom stejně určili rovinu kolmou k rovinám 3, 4, mohli bychom z formulí (17) určit úhel osy rovin (1, 2) s osou rovin (3, 4).

Úměru (19), platnou pro souřadnice rovnoběžné, kosoúhlé, přepíšeme na čtyrstěnové. Platí:

$$d_b^2 + d_c^2 = \frac{a^2 + a'^2}{2}, \quad d_c^2 + d_a^2 = \frac{b^2 + b'^2}{2}, \quad d_a^2 + d_b^2 = \frac{c^2 + c'^2}{2},$$

$$2d_bd_c \cos(d_bd_c) = d_b^2 + d_c^2 - a^2 = \frac{a'^2 - a^2}{2}, \quad 2d_cd_a \cos(d_cd_a) =$$

$$= d_c^2 + d_a^2 - b^2 = \frac{b'^2 - b^2}{2}, \quad 2d_ad_b \cos(d_ad_b) = d_a^2 + d_b^2 - c^2 = \frac{c'^2 - c^2}{2}$$

Nyní dosadíme hodnoty z (19), píšíce pro krátkost

$$u : v : w = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3,$$

do (7), takže po zavedení $u = \dfrac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}$, atd., vznikne

$$\eta : \vartheta : \iota : \varkappa = (-3\delta_1 - \delta_2 - \delta_3) : (-\delta_1 - 3\delta_2 - \delta_3) :$$
$$: (-\delta_1 - \delta_2 - 3\delta_3) : -3(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3).$$

Výpočet trinomů vpravo se provede na prvních sloupcích a bude

$$-3d_a^2 + d_ad_b \cos(d_ad_b) + d_ad_c \cos(d_ad_c) = -\tfrac{3}{4}(-a^2 - a'^2 + b^2 + b'^2 +$$
$$+ c^2 + c'^2) + \tfrac{1}{4}(b'^2 - b^2 + c'^2 - c^2) = \tfrac{1}{4}(3a^2 + 3a'^2 - 2b'^2 - 4b^2 -$$
$$- 2c'^2 - 4c^2),$$

$$3d_ad_b \cos(d_ad_b) - d_b^2 + d_bd_c \cos(d_bd_c) = \tfrac{3}{4}(c'^2 - c^2) - \tfrac{1}{4}(a^2 + a'^2 - b^2 -$$
$$- b'^2 + c^2 + c'^2) + \tfrac{1}{4}(a'^2 - a^2) = \tfrac{1}{4}[-2a^2 + b^2 + b'^2 + 2c'^2 - 4c^2],$$

$$3d_ad_c \cos(d_ad_c) + d_bd_c \cos(d_bd_c) - d_c^2 = \tfrac{1}{4}[3b'^2 - 3b^2 + a'^2 - a^2 - a^2 -$$
$$- a'^2 - b^2 - b'^2 + c^2 + c'^2] = \tfrac{1}{4}[-2a^2 - 4b^2 + 2b'^2 + c^2 + c'^2]$$

a poslední vede na:

$$-3[d_a^2 - d_ad_b \cos(d_ad_b) - d_ad_c \cos(d_ad_c)] = -\tfrac{3}{4}[-a^2 - a'^2 + b^2 +$$
$$+ b'^2 + c^2 + c'^2 - c'^2 + c^2 - b'^2 + b^2] = \tfrac{1}{4}[3a^2 + 3a'^2 - 6b^2 - 6c^2].$$

$$\eta : \vartheta : \iota : \varkappa =$$

$$= \begin{vmatrix} 3a^2 - 3a'^2 - 2b'^2 - 4b^2 - 2c'^2 - 4c^2, & -\eta_1 + \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, & -\eta_2 + \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ -2a^2 + b'^2 + b^2 + 2c'^2 - 4c^2, & \eta_1 - \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, & \eta_2 - \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ -2a^2 + 2b'^2 - 4b^2 + c'^2 + c^2, & \eta_1 + \vartheta_1 - \iota_1 - \varkappa_1, & \eta_2 + \vartheta_2 - \iota_2 - \varkappa_2 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} -2b^2 + 2c'^2 - 4c^2 + a^2 + a^{2\prime}, & -\eta_1 + \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ 3b^2 - 3b'^2 - 2c'^2 - 4c^2 - 2a'^2 - 4a^2, & \eta_1 - \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ -2b^2 - c'^2 + c^2 + 2a'^2 - 4a^2, & \eta_1 + \vartheta_1 - \iota_1 - \varkappa_1, \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\eta_2 + \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 - \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 + \vartheta_2 - \iota_2 - \varkappa_2 \end{array}\right|$$

$$: \left|\begin{array}{llllll} -2c^2 & +a^2 & +a'^2 & +2b'^2 & -4b^2, & -\eta_1 + \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ -2c^2 & +2a'^2 & -4a^2 & +b^2 & -b'^2, & +\eta_1 - \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ 3c^2 - 3c'^2 & -2a'^2 & -4a^2 & -2b'^2 & -4b^2, & \eta_1 + \vartheta_1 - \iota_1 - \varkappa_1, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -\eta_2 + \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 - \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 + \vartheta_2 - \iota_2 - \varkappa_2 \end{array}\right|$$

$$: \left|\begin{array}{ll} 3a^2 + 3a'^2 - 6b^2 - 6c^2, & -\eta_1 + \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ 3b^2 + 3b'^2 - 6c^2 - 6a^2, & \eta_1 - \vartheta_1 + \iota_1 - \varkappa_1, \\ 3c^2 + 3c'^2 - 6a^2 - 6b^2, & \eta_1 + \vartheta_1 - \iota_1 - \varkappa_1, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} -\eta_2 + \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 - \vartheta_2 + \iota_2 - \varkappa_2 \\ \eta_2 + \vartheta_2 - \iota_2 - \varkappa_2 \end{array}\right|$$

8. Uvažujme vzdálenost bodu (x, y, z) od roviny (u, v, w).

Podle odst. 5 je vzdálenost roviny od počátku soustavy $r = P : \mathfrak{G}$. Veďme daným bodem k dané rovině rovnoběžnou rovinu, takže vzniknou na souřadných rovinách úseky podobné úsekům odťatým předešlou rovinou s poměrem podobnosti m, a obdržíme pro rovnoběžnou rovinu a její vzdálenost od počátku $r_1 = Pm : \mathfrak{G}$, při čemž $ux + vy + wz = m$.

Je tedy hledaná vzdálenost vzájemná obou rovin

$$d = r - r_1 = \frac{P}{\mathfrak{G}}(1 - m).$$

Umocnění dá:

$$d^2[q_a{}^2u^2 + q_b{}^2v^2 + q_c{}^2w^2 - 2q_bq_c \cos(q_bq_c)\, vw - 2q_cq_a \cos(q_cq_a)\, wu - \\ - 2q_aq_b \cos(q_aq_b)\, uv] = P^2[1 - ux - vy - wz]^2. \tag{20}$$

Transformací (9) vznikne vlevo $\frac{1}{4}\sigma^2H^2$, vpravo se výraz v hranaté závorce přepíše na

$$\frac{\sigma}{8}\left[1 \cdot \frac{8}{\sigma} - \frac{4}{\sigma} u \cdot 2x - \frac{4}{\sigma} v \cdot 2y - \frac{4}{\sigma} w \cdot 2z\right]$$

a pak užitím (4), (8), (9) vznikne

$$-(\lambda + \mu + \nu + \xi)(\eta + \vartheta + \iota + \varkappa) - (-\lambda + \mu + \nu - \xi) \cdot \\ \cdot (-\eta + \vartheta + \iota - \varkappa) - (\lambda - \mu + \nu - \xi)(\eta - \vartheta + \iota - \varkappa) + \\ -(\lambda + \mu - \nu - \xi)(\eta + \vartheta - \iota - \varkappa) = -4[\lambda\eta + \mu\vartheta + \nu\iota + \xi\varkappa],$$

takže posléze zbude

$$d \cdot H = -P(\lambda\eta + \mu\vartheta + \nu\iota + \xi\varkappa). \tag{21}$$

9. Naše methoda dává také přehledné určení osy dvou mimoběžek určených jako průsečnice dvou párů rovin.

Osa je příčka kolmá k oběma mimoběžkám, leží tedy v rovině kolmic k první mimoběžce a také v rovině kolmé ke druhé. Když tedy užijeme rovnic (19) a označíme α koeficient úměrnosti, platí pro rovinové souřadnice

$$u\alpha = U_{12},\ v\alpha = V_{12},\ w\alpha = W_{12},$$

značí-li U_{12}, V_{12}, W_{12} determinanty stojící vpravo v (19).

Podobně rovina kolmá ke druhé mimoběžce dána souřadnicemi:

$$u\beta = U_{34},\ v\beta = V_{34},\ w\beta = W_{34}.$$

Obě tyto roviny se musí protít na obou daných mimoběžkách, což vyžaduje vymizení determinantu z rovinových souřadnic:

$$\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & w_1, & 1 \\ u_2, & v_2, & w_2, & 1 \\ U_{12}, & V_{12}, & W_{12}, & \alpha \\ U_{34}, & V_{34}, & W_{34}, & \beta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_3, & v_3, & w_3, & 1 \\ u_4, & v_4, & w_4, & 1 \\ U_{12}, & V_{12}, & W_{12}, & \alpha \\ U_{34}, & V_{34}, & W_{34}, & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Řešením obou těchto rovnic dle α a β se určí rovinové souřadnice dosazením do předešlých rovnic.

10. Doplňky.

V tomto odstavci odvodíme několik formulí z theorie čtyrstěnu, jichž bylo výše užito. Značí-li α, β, γ stěnové úhly při hranách a, b, c, a podobně α', β', γ' při hranách a', b', c', dá promítnutí stěn na čtvrtou:

$$\begin{aligned} -\Delta_1 \quad &+ \Delta_2 \cos\gamma' + \Delta_3 \cos\beta' + \Delta_4 \cos\alpha = 0, \\ \Delta_1 \cos\gamma' &- \Delta_2 \quad + \Delta_3 \cos\alpha' + \Delta_4 \cos\beta = 0, \\ \Delta_1 \cos\beta' &+ \Delta_2 \cos\alpha' - \Delta_3 \quad + \Delta_4 \cos\gamma = 0, \\ \Delta_1 \cos\alpha &+ \Delta_2 \cos\beta + \Delta_3 \cos\gamma - \Delta_4 \quad = 0. \end{aligned}$$

Znásobením prvních tří rovnic veličinami Δ_1, resp. Δ_2, Δ_3 a sečtením, možná v součtu čtvrtých členů vytknout Δ_4 a zbylý mnohočlen nahradit hodnotou Δ_4 z poslední rovnice:

$$\Delta_4^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha' - 2\Delta_3\Delta_1 \cos\beta' - 2\Delta_1\Delta_2 \cos\gamma'.$$

Rozřešíme-li první tři rovnice téže soustavy na př. podle $\cos\alpha'$, bude

$$2\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha' - \Delta_2^2 - \Delta_3^2 + \Delta_4(\Delta_2 \cos\beta + \Delta_3 \cos\gamma - \Delta_1 \cos\alpha) + \\ + \Delta_1^2 = 0.$$

Výraz v kulaté závorce je podle čtvrté rovnice $\Delta_4 - \Delta_1 \cos\alpha$, a po úpravě můžeme psát:

$$\Delta_1^2 + \Delta_4^2 - 2\Delta_1\Delta_4 \cos\alpha = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha'.$$

Společnou hodnotu obou stran obdržíme promítnutím čtyrstěnu do roviny kolmé k hraně a, čímž vznikne trojúhelník o stranách $\frac{2\Delta_1}{a}$, $\frac{2\Delta_4}{a}$ a úhlu jimi sevřeném α, proti němuž leží strana $a' \sin\varphi_1$, t. j. průmět hrany a', je-li φ_1 úhel hran a, a'. Dá tedy cosinová věta

$$a'^2 \sin^2\varphi_1 = \frac{4\Delta_1^2}{a^2} + \frac{4\Delta_4^2}{a^2} - 2\,\frac{2\Delta_1}{a}\cdot\frac{2\Delta_4}{a}\cos\alpha.$$

Hrany a, a' jsou však úhlopříčky rovnoběžníka q_a, stěny rovnoběžnostěnu opsaného základnímu čtyrstěnu, a tedy je

$$2q_a = aa' \sin\varphi_1,$$

takže můžeme poslední rovnici přepsat na:

$$\Delta_1^2 + \Delta_4^2 - 2\Delta_1\Delta_4 \cos\alpha = q_a^2.$$

Takových rovnic je celkem šest, pro každý stěnový úhel jedna.

K určení úhlů stěn rovnoběžnostěnu se stěnami čtyrstěnu uvažujme pětistěn vzniklý rozříznutím čtyrstěnu řezem rovnoběžným k protějším hranám, na př. a, a', jenž půlí hrany b, b', c, c'. Vzniklé těleso má stěny:

$$\tfrac{1}{2}q_a,\ \tfrac{3}{4}\Delta_1,\ \tfrac{1}{4}\Delta_3,\ \tfrac{3}{4}\Delta_4,\ \tfrac{1}{4}\Delta_2.$$

Promítnutím čtyř stěn na pátou obdržíme:

$$\tfrac{3}{4}\Delta_4 = \tfrac{1}{2}q_a \cos(q_a\Delta_4) + \tfrac{3}{4}\Delta_1 \cos\alpha + \tfrac{1}{4}\Delta_3 \cos\gamma + \tfrac{1}{4}\Delta_2 \cos\beta,$$

kde $(q_a\Delta_4)$ značí úhel stěn q_a, Δ_4.

Oba poslední členy vpravo jsou dle základních rovnic $\tfrac{1}{4}(\Delta_4 - \Delta_1 \,.\, \cos\alpha)$, takže $2\Delta_4 = 2q_a \cos(q_a\Delta_4) + 2\Delta_1 \cos\alpha$, a po znásobení číslem Δ_4 bude

$$\cos(q_a\Delta_4) = \frac{\Delta_4^2 - \Delta_1^2 + q_a^2}{2q_a\Delta_4}.$$

Uvažujme čtyrstěn uťatý z rovnoběžnostěnu stěnou Δ_1 a vypočtěme stěnu $\tfrac{1}{2}q_a$:

$$\tfrac{1}{4}q_a^2 = \tfrac{1}{4}q_b^2 + \tfrac{1}{4}q_c^2 + \Delta_1^2 - 2\Delta_1 \,.\, \tfrac{1}{2}q_c \cos(\Delta_1 q_c) - 2\Delta_1 \,.\, \tfrac{1}{2}q_c \cos(\Delta_1 q_c) - \\ - 2 \,.\, \tfrac{1}{2}q_b \,.\, \tfrac{1}{2}q_c \,.\, \cos(q_b q_c).$$

Dosadíme-li sem hodnoty za $\cos(\Delta_1 q_b)$ a $\cos(\Delta_1 q_c)$, bude

$$\cos(q_b q_c) = \frac{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \frac{1}{2}(q_a^2 + q_b^2 + q_c^2)}{q_b q_c} = \frac{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1^2 - \Delta_4^2}{2q_b q_c}.$$

*

Sur une transformation des coordonnées. Le but de ce travail est d'introduire dans l'espace à trois dimensions un moyen simple permettant de passer des coordonnées parallèles aux coordonnées tétramétriques et inversement.