Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Medek

Syntetické vytvoření Hesseho kubiky sítě kuželoseček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, D358--D361

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122652

SYNTETICKÉ VYTVORENIE HESSEHO KUBIKY SIETE KUŽELOSEČIEK.

VÁCLAV MEDEK, Bratislava.

Uvažujme tri kužeľosečky o rovniciach ${}^ik = 0$, ktoré neprislúchajú tomu istému sväzku kužeľosečiek. Potom všetky kužeľosečky

$$k \equiv \sum_i {}^i\alpha\, {}^ik = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

tvoria sieť kužeľosečiek.

Dohovor. Budeme hovoriť, že tri páry bodov PP', QQ', RR' tvoria združenú trojicu, ak $R \equiv \overline{PQ} \times \overline{P'Q'}$ a $R' \equiv \overline{PQ'} \times \overline{P'Q}$, pričom body RR' môžeme navzájom vymeniť.

1. pomocná veta. Nech PP', QQ', RR' sú tri páry bodov, ktoré netvoria združenú trojicu; potom všetky kužeľosečky, pre ktoré sú páry bodov PP', QQ', RR' pármi konjugovaných pólov, tvoria sieť kužeľosečiek.

Dôkaz. Nech súradnice bodov PP', QQ', RR' sú postupne p_i, p_i'; q_i, q_i'; r_i, r_i' $(i = 1, 2, 3)$. Zvoľme ďalšie tri body ${}^iA$ o súradniciach ${}^ia_j$. Bodmi ${}^iA\,{}^kA$ a pármi konjugovaných pólov PP', QQ', RR' je pri obecnej polohe bodov ${}^iA$ určená jediná kužeľosečka ${}^jk$. Dostávame tak tri kužeľosečky ${}^jk$, ktoré neprislúchajú jednému sväzku. Platia vzťahy

$$\sum_{i,j} {}^ka_{ij}p_ip_j' = 0, \ \sum_{i,j} {}^ka_{ij}q_iq_j' = 0, \ \sum_{i,j} {}^ka_{ij}r_ir_j' = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

kde ${}^ka_{ij}$ sú koeficienty rovníc kužeľosečiek ${}^kk = 0$. Potom platia ale aj vzťahy

$$\sum_{i,j,k} {}^k\alpha\,{}^ka_{ij}p_ip_j' = 0, \ \sum_{i,j,k} {}^k\alpha\,{}^ka_{ij}q_iq_j' = 0, \ \sum_{i,j,k} {}^k\alpha\,{}^ka_{ij}r_ir_j' = 0, \tag{1}$$

čiže páry bodov PP', QQ', RR' sú pármi konjugovaných pólov vzhľadom na každú kužeľosečku $k \equiv \sum_i {}^i\alpha\,{}^ik = 0$.

Ak naopak platia vzťahy

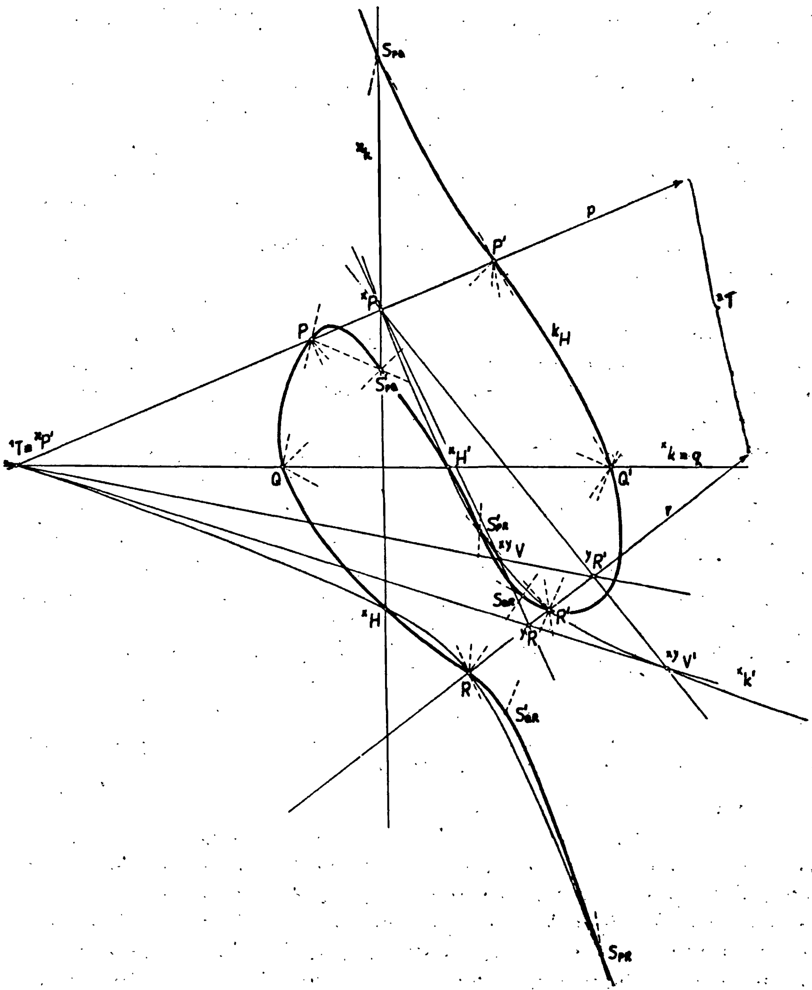
$$\sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j' = 0, \ \sum_{i,j} a_{ij}q_iq_j' = 0, \ \sum_{i,j} a_{ij}r_ir_j' = 0,$$

môžeme vždy, za predpokladu uvedeného vo vete, nájsť tri lineárne nezávislé riešenia ${}^ka_{ij}$ týchto troch rovníc. Všetky ostatné riešenia dostaneme potom vo tvare $\sum_k {}^k\alpha\,{}^ka_{ij}$. Pre každé ${}^k\alpha$ platia vzťahy (1), čiže pre každú kužeľosečku $k \equiv \sum_{i,j,k} {}^k\alpha\,{}^ka_{ij}x_ix_j = 0$ sú páry bodov PP', QQ', RR' pármi konjugovaných pólov. Tým je veta dokázaná.

Body PP', QQ', RR' nech ležia na priamkach p, q, r a nech na nich určujú, ako samodružné elementy, involúcie ${}^pI$, ${}^qI$, ${}^rI$. Nech body ${}^xP\,{}^xP'$

sú jedným pevným párom involúcie ^pI. Body $^vQ^vQ'$ nech tvoria involúciu ^qI. Potom platí

2. pomocná veta. Diagonálne vrcholy $^{xv}U^{xv}U'$ štvorrohov $^xP^xP'^vQ^vQ'$ (neuvažujúc triviálny bod $^1T \equiv p \times q$) vyplnia kužeľosečku ^xk, ktorá prechádza bodmi QQ' a diagonálnymi bodmi $S_{PQ}S'_{PQ}$ štvorrohu $PP'QQ'$ (neuvažujúc zas bod ^1T).



Dôkaz. Involúcia ^qI je vytvorená dvoma súmiestnymi projektívnymi radmi bodov $(^vQ\ldots)\ \pi\ (^vQ'\ldots)$ na priamke q. Tieto dva rady bodov sa premietajú z bodov $^xP^xP'$ dvoma projektívnymi sväzkami priamok;

priesečíky priamok odpovedajúcich si v tejto projektivite, vytvoria kuželosečku ${}^xk$.

Body QQ' sú samodružné body involúcie ${}^qI$, musia teda prislúchať kuželosečke ${}^xk$. Z bodov S_{PQ}, resp. S'_{PQ} sa premieta involúcia ${}^pI$ do involúcie ${}^qI$. Preto vždy existuje také číslo ${}^1y$, resp. ${}^1y'$, že sa body ${}^{1y}Q^{1y}Q'$, resp. ${}^{1y'}Q^{1y'}Q'$ premietajú z bodu S_{PQ}, resp. S'_{PQ} do bodov ${}^xP^xP'$. Preto body $S_{PQ}S'_{PQ}$ tiež prislúchajú kuželosečke ${}^xk$. Okrem toho kuželosečka ${}^xk$ prechádza samozrejme i bodmi ${}^xP^xP'$.

Body $S_{PQ}S'_{PQ}QQ'$ nezávisia na voľbe bodov ${}^xP^xP'$. Preto všetky kuželosečky ${}^xk$ tvoria sväzok Σ o základných bodoch $S_{PQ}S'_{PQ}QQ'$. Pre každé číslo x dostávame jednu kuželosečku tohoto sväzku. Kuželosečky ${}^xk$ sú dôležité z toho dôvodu, že z každého ich bodu sa premietajú príslušné body ${}^xP^xP'$ na priamku q do bodov, ktoré prislúchajú involúcii ${}^qI$.

Uvažujme teraz namiesto bodov ${}^yQ^yQ'$ body ${}^yR^yR'$, ktoré tvoria involúciu ${}^rI$. Potom diagonálne vrcholy ${}^{xy}V^{xy}V'$ štvorrohov ${}^xP^xP'{}^yR^yR'$ (s výnimkou bodu ${}^2T \equiv p \times r$) vyplnia, podľa predchádzajúcej vety, kuželosečku ${}^xk'$, ktorá prislúcha sväzku $\Sigma' \equiv S_{PR}S'_{PR}RR'$ a prechádza bodmi ${}^xP^xP'$. Z každého bodu kuželosečiek ${}^xk'$ sa premietajú príslušné body ${}^xP^xP'$ na priamku r do nejakých bodov ${}^yR^yR'$, ktoré prislúchajú involúcii ${}^rI$.

Pre každý pár ${}^xP^xP'$ involúcie ${}^pI$ dostávame tak dve kuželosečky ${}^xk^xk'$. Tieto sa pretínajú, okrem bodov ${}^xP^xP'$, ešte vo dvoch bodoch ${}^xH^xH'$. Pretože body ${}^xH^xH'$ ležia na kuželosečke ${}^xk$, premietajú sa z nich body ${}^xP^xP'$ na priamku q do bodov, ktoré patria involúcii ${}^qI$. Pretože ale ležia aj na kuželosečke ${}^xk'$, premietajú sa z nich body ${}^xP^xP'$ na priamku r tiež do bodov, ktoré patria involúcii ${}^rI$. A pretože body ${}^xP^xP'$ sú párom involúcie ${}^pI$, premietajú sa z bodov ${}^xH^xH'$ páry bodov PP', QQ', RR' pármi jednej jedinej involúcie. Inými slovami povedané, každým bodom ${}^xH$, resp. ${}^xH'$ prechádzajú dve priamky (samodružné priamky uvedenej involúcie), ktoré oddeľujú harmonicky páry bodov PP', QQ', RR' a sú to teda degenerované kuželosečky siete kuželosečiek určenej pármi konjugovaných pólov PP', QQ', RR'. Potom platí veta:

Body ${}^xH^xH'$ vyplnia kubiku.

Zistíme to tak, že tieto body dostávame v priesečíkoch dvoch kuželosečiek ${}^xk^xk'$ dvoch sväzkov Σ a Σ', ktoré sú si jednojednoznačne priradené. Výtvorom je krivka štvrtého stupňa. Pretože ale vždy dve sebe odpovedajúce kuželosečky majú spoločné body ${}^xP^xP'$, rozpadá táto krivka v priamku p a krivku tretieho stupňa k_H. Táto kubika je geometrickým miestom vrcholov degenerovaných kuželosečiek siete, čiže Hesseho kubikou.

Z výtvarného zákona kubiky k_H vyplýva, že musí prechádzať základnými bodmi sväzkov Σ a Σ'. Pretože ale jej tvar nemôže závisieť na označení bodov PP', QQ', RR', musí prechádzať aj bodmi $PP'S_{QR}S'_{QR}$. Celkove máme teda pre ňu 12 bodov $PP'QQ'RR'S_{PQ}S'_{PQ}S_{PR}S'_{PR}S_{QR}S'_{QR}$.

Poznámka. Body ${}^xH^xH'$ tvoria síce jednojednoznačnú príbuznosť na kubike k_H, ale nie sú pármi konjugovaných pólov vzhľadom na sieť.

Sur la cubique de Hesse du réseau de coniques. L'auteur montre une construction géométrique de la cubique plane qui est le lieu de points singuliers des coniques d'un réseau:

O JISTÉ TRANSFORMACI SOUŘADNIC.

Dr JAN SCHUSTER, Praha.

1. V následující práci se zabývám jistou transformací kosoúhlých souřadnic rovnoběžných v tetrametrické, kterou umožněn snadný přechod jedněch k druhým, a to hlavně od rovnoběžných k tetrametrickým.

Zásadní rozdíl proti obvyklým úvahám je v tom, že při přechodu od čtyrstěnové k soustavě rovnoběžné odpadá posun stěny čtyrstěnu do nekonečna, takže paralelní soustavu nepojímá za zvláštní případ čtyrstěnové. Učiníme totiž základem rovnoběžné soustavy kosoúhlý rovnoběžnostěn, a čtyrstěn jemu vepsaný, mající za hrany stěnové úhlopříčky rovnoběžnostěnu, zvolíme za základ druhé soustavy (viz obr.).

Další rozdíl proti obvyklé methodě je, že rovinové souřadnice neberu úměrné reciprokým úsekům rovin na souřadných osách, nýbrž úměrné plochám omezeným osami souřadnými a stopami roviny v souřadných rovinách.

Rovnoběžnostěn měj hrany d_a, d_b, d_c, které jsou zároveň délkovými jednotkami pro souřadnice bodu měřené od středu soustavy, jímž je společné těžiště obou základních těles.

Obecný bod M má tedy souřadnice xd_a, yd_b, zd_c.

Poloha téhož bodu M vzhledem na čtyrstěn (*1, 2, 3, 4*) určena poměrem objemů čtyrstěnů (λ, μ, ν, ξ), určených bodem M a stěnami základního čtyrstěnu, takže můžeme zvoliti

$$\lambda + \mu + \nu + \xi = 1. \tag{1}$$

Dělicí poměr bodu M vzhledem na pár protějších stěn rovnoběžnostěnu, na př. rovnoběžných k rovině (yz), je týž jako pro pár hran a, a', tedy

$$(xd_a + \tfrac{1}{2}d_a) : (xd_a - \tfrac{1}{2}d_a) = (x + \tfrac{1}{2}) : (x - \tfrac{1}{2}).$$

Týž poměr se vyjádří v souřadnicích tetrametrických, když sestrojíme hranami a, a' příčku jdoucí bodem M: