Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 5, 305--332

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122641

Úlohy.

Úloha 24.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2 - y = a, \quad xy = b.$$

Řešení. (Zaslal p. *František Záviška*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

K řešení dané soustavy vede substituce

$$x = u + v$$
$$y = u^2 - uv + v^2,$$

kterou přijdeme k rovnicím

$$3uv = a$$
$$u^3 + v^3 = b.$$

Vyloučením neznámé v obdržíme

$$u^6 - bu^3 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

a odtud

$$u^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Znajíce u, v, nalezneme x, y dle rovnic prvních.

Poznámka redakce. V předešlém obsaženo jest řešení obecné rovnice třetího stupně.

$$z^3 - az + b = 0.$$

Položíme-li tudíž

$$x^2 - y = a,$$
$$xy = b,$$

bude

$$z^3 - az + b = (z^2 - xz + y)(z + x)$$

a tedy kořeny rovnice pro z jsou

$$z_1 = -x,$$
$$z_{2,3} = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^3}{4} - y}.$$

Úloha 25.

Kdy jsou realnými všechny 3 kořeny rovnice

$$x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0\,?$$

Jsou-li dva z kořenů těch imaginárné, který jest jich modul a která amplituda?

Řešení. (Zaslal p. *Václav Vaněček,* stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Jeden kořen dané rovnice jest patrně

$$x_1 = 1\,;$$

druhé dva určuje rovnice kvadratická

$$x^2 - (a-1)x + 1 = 0\,.$$

Z této vyplývá

$$x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right);$$

jelikož pak

$$a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)\,,$$

jsou kořeny $x_{2,3}$ realnými, je-li

$$a + 1 > v\,, \quad a - 3 > 0\,,$$

tedy

$$a \geqq 3$$

aneb je-li

$$a + 1 < 0\,, \quad a - 3 < 0\,,$$

tudíž

$$a \leqq -1\,.$$

Je-li a obsaženo v mezích

$$-1 \leqq a \leqq 3\,,$$

jsou 2 kořeny rovnice imaginárné. Potom lze psáti

$$x_{2,3} = \frac{a-1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{(a+1)(3-a)} = u \pm iv\,.$$

Jest tudíž modul kořenů těch

$$m = \sqrt{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-1)^2+(a+1)(3-a)}$$

čili

$$m = 1\,;$$

amplituda určena vzorcem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt{(a+1)(3-a)}}{a-1}$$

aneb jednoduševji

$$\cos\varphi = \frac{a-1}{2}\,.$$

Úloha 26.

Má-li rovnice

$$a_0\,x^3 + a_1\,x^2 + a_2\,x + a_3 = 0,$$

ve které a_0, a_1, a_2, a_3 jsou hodnoty realné, kořen

$$x = \cos\alpha + i\sin\alpha\,;$$

jest dokázati, že

$$2\cos\alpha = -\frac{a_0\,a_1 - a_2\,a_3}{a_0\,a_2 - a_1\,a_3}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček,* stud. VII. tř. gymn. v Příbrami.)

Je-li

$$x = \cos\alpha + i\sin\alpha\,,$$

tudíž

$$a_0\,(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + a_1\,(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + a_2\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$+ a$$

jest při realných hodnotách součinitelů a

$$(1) \qquad a_0 \sin 3\alpha + a_1 \sin 2\alpha + a_2 \sin \alpha = 0 .$$

Potom má rovnice též kořen sdružený

$$x = \cos\alpha - i \sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

a proto platným jest též vztah

$$a_0 + a_1 (\cos\alpha + i\sin\alpha) + a_2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\,\alpha) + a_3 (\cos 3\alpha + i \sin 3\,\alpha) = 0 ,$$

z něhož vyvodíme

$$(2) \qquad a_3 \sin 3\,\alpha + a_2 \sin 2\alpha + a_1 \sin\alpha = 0 .$$

Z rovnic (1) a (2) vyloučíme $\sin 3\alpha$, i bude

$$(a_0 a_2 - a_1 a_3) \sin 2\alpha + (a_0 a_1 - a_2 a_3) \sin\alpha = 0 ,$$

odkud přímo vyplývá vzorec, jejž bylo dokázati.

Poznámka redakce. Vedle rovnice (1) a (2) jsou v platnosti též relace

$$(3) \qquad a_0 \cos 3\alpha + a_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos\alpha + a_3 = 0$$
$$(4) \qquad a_3 \cos 3\alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_1 \cos\alpha + a_0 = 0 .$$

Kdybychom z kterýchkoli dvou rovnic (1) až (4) vyloučili úhel α, dostali bychom podmínku, kdy daná rovnice má kořen imaginárný daného tvaru, totiž kořen, jehož modul rovná se 1.

Vyjádříme-li na př. v rovnici (2) funkce úhlu 3α, 2α funkcemi úhlu α, obdržíme zkrátíce činitelem $\sin\alpha$, rovnici

$$4a_0 \cos^2\alpha + 2a_1 \cos\alpha + a_2 - a_0 = 0 .$$

Dosadíme-li za $\cos\alpha$ hodnotu v úloze nalezenou, obdržíme podmínku

$$a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 - a_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} + (a_2 - a_0) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}^2 = 0 .$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Rudolf Jambor*, stud. VIII. tř. gymn. ve Val. Meziříčí.)

Rovnice daná má soujemné kořeny

$$x_{1,2} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$$

a realný kořen x_3. Dle známých vlastností součinitelů v rovnici algebraické jest

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\cos\alpha + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 + 2x_3\cos\alpha = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 = x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Dosadíme-li hodnotu x_3 z rovnice poslední do dvou předcházejících, obdržíme zvláště jednoduché výrazy

$$\cos\alpha = \frac{a_3 - a_1}{2a_0} = \frac{a_0 - a_2}{2a_3},$$

z kterých vyplývá podmínka

$$a_0a_2 - a_1a_3 = a_0^2 - a_3^2.$$

Úloha 27.

Ustanoviti meznou hodnotu do nekonečna pokračujícího výrazu

$$1 + \frac{1 + \frac{1 + \cdots}{x}}{x}$$

Řešení. (Zaslal p. Václav Špaček, stud. VII. tř. gymn. v Příbrami.)

Daný výraz jest totožný s nekonečnou řadou geometrickou

$$s = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots,$$

jejíž součet má meznou hodnotu

$$s = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x - 1},$$

předpokládáme-li $x > 1$.

Úloha 28.

Promítneme-li do stran trojúhelníka úsečku omezenou středy kružnice vepsané a opsané, jest průmět úsečky té do strany prostředně velké roven součtu průmětů do druhých dvou stran. Podati důkaz.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Tereba,* stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Buďtež a, b, c strany trojúhelníka, kteréž dotyčnými body kružnice vepsané děleny jsou v části r_1, r_2, r_3 tak, že

$$r_1 + r_2 = c$$
$$r_2 + r_3 = a$$
$$r_3 + r_1 = b.$$

Značíme-li

$$a + b + c = 2s,$$

jest

$$r_1 = s - a,\ r_2 = s - b,\ r_3 = s - c.$$

Promítneme-li úsečku omezenou středy kružnice opsané a vepsané do strany a, obdržíme délku

$$x = \frac{a}{2} - r_2 = \frac{b - c}{2}$$

a obdobně délky

$$y = \frac{c - a}{2},\ z = \frac{a - b}{2}.$$

Sečtením vychází

$$x + y + z = 0.$$

Předpokládáme-li

$$a > b > c,$$

jest x, z positivní, y negativní, takže o prostých hodnotách platí výsledek

$$x + z = y.$$

Úloha 29.

Vedeme-li ku každé straně trojúhelníka výšku a těžnici a nazveme-li vzdálenost pat obou těch příček na stranách a, b, c postupně m, n, p, jest dokázati relaci

$$am + bn = cp,$$

je-li

$$a < c < b.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jan Handl*, stud. VII. tř. g. v Brně.) Strana a rozdělí se výškou na úseky a_1, a_2, z nichž

$$a_1 = c \cos\beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Jest pak

$$m = \frac{a}{2} - a_1 = \frac{b^2 - c^2}{2a},$$

to jest

$$2am = b^2 - c^2;$$

obdobně

$$2bn = c^2 - a^2$$
$$2cp = a^2 - b^2.$$

Jest tudíž

$$am + bn + cp = 0$$

čili při supposici

$$a < c < b$$
$$am + bn = cp.$$

Úloha 30.

Do trojúhelníka majícího úhly α, β, γ vepsán druhý, jehož strany jsou kolmy ku stranám prvního. Dokázati, že poměr podobnosti obou trojúhelníků jest

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{1 + \cos\beta \cos\beta \cos\gamma}.$$

Řešení. (Zaslal p. *František Velísek*, stud VI. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Buďtež a, b, c strany trojúhelníka daného, x, y, z kolmé k nim po řadě strany trojúhelníka vepsaného. Potom jest

$$x \operatorname{cotg}\beta + y \operatorname{cosec}\gamma = a$$
$$y \operatorname{cotg}\gamma + z \operatorname{cosec}\alpha = b$$
$$z \operatorname{cotg}\alpha + x \operatorname{cosec}\beta = c.$$

Ze soustavy této vypočítáme

$$x = \frac{a \cot g\, \alpha' \cot g\, \gamma - b \cot g\, \alpha \operatorname{cosec} \gamma + c \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \gamma}{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma + \cot g\, \alpha \cot g\, \beta \cot g\, \gamma}$$

čili

$$x = \frac{\sin \beta \left[a \cos \alpha \cos \gamma - b \cos \alpha + c\right]}{1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Jest však

$$\begin{aligned} a \cos \alpha \cos \gamma - b \cos \alpha + c &= a (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \\ &= a \sin \alpha \sin \gamma, \end{aligned}$$

pročež

$$x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Oba trojúhelníky jsou si podobny a jich poměr podobnosti

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

má hodnotu, kterou bylo zjistiti.

Poznámka: Danému trojúhelníku lze vepsati dva, jichž strany jsou kolmy k jeho stranám; jelikož pro oba obdržíme týž poměr podobnosti, jsou oba tyto trojúhelníky vespolek shodny.

Úloha 31.

V trojúhelníku rovnoramenném ABC ($AC = BC$) vedena k podstavě AB příčka CE tak, že úhel $ACE = \frac{\gamma}{4}$. Dokázati:

a) $$\frac{AB \, . \, AE}{AC^2} = 4 \sin^2 \frac{\gamma}{4}.$$

b) $$\frac{AB}{AE} = 4 \cos^2 \frac{\gamma}{4}.$$

c) $$\frac{AC^2 + AE^2}{AC \, . \, AE} = 4 \frac{AC}{AB}.$$

d) Je-li $AB \, . \, AE = AC^2$, jest úhel $\gamma = 120^0$.

Řešení. (Zaslal p. *Norbert Novotný*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

a) V trojúhelníku ABC veďme výšku CD a úhel BEC znamenejme ε, i jest potom

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

a že

$$\beta=R-\frac{\gamma}{2},$$

bude

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2}}=2\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Dále jest v trojúhelníku ACE

$$\frac{AE}{AC}=\frac{\sin\frac{\gamma}{4}}{\sin\varepsilon},$$

avšak

$$\sphericalangle BEC=\varepsilon=R-\frac{\gamma}{4},$$

pročež

$$\frac{AE}{AC}=\frac{\sin\frac{\gamma}{4}}{\cos\frac{\gamma}{4}}. \qquad (2)$$

Násobením rovnic (1) a (2) obdržíme

$$\frac{AB\,.\,AE}{AC^2}=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{4}}{\cos\frac{\gamma}{4}}=4\sin^2\frac{\gamma}{4}. \qquad (3)$$

b) Dělíme-li rovnice (1) a (2) bude

$$\frac{AB}{AE}=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\,.\cos\frac{\gamma}{4}}{\sin\frac{\gamma}{4}}=4\cos^2\frac{\gamma}{4}. \qquad (4)$$

c) Vyloučíme-li z rovnic (3) a (4) úhel γ užitím známého vzorce

$$\sin^2\frac{\gamma}{4}+\cos^2\frac{\gamma}{4}=1,$$

obdržíme po krátké redukci

$$\frac{AB\,(AC^2+AE^2)}{AE\,.\,AC^2}=4$$

nebo též

$$\frac{AC^2+AE^2}{AE\,.\,AC}=4\,\frac{AC}{AB}.$$

d) Dle podmínky v úloze obsažené jest

$$\sin^2\frac{\gamma}{4}=\frac{1}{2},$$

tedy

$$\sin\frac{\gamma}{4}=+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},$$

a že úhel γ musí býti menší než 180^0, vyhovuje hořejším rovnicím jen

$$\frac{\gamma}{4}=30^0,$$

tedy

$$\gamma=120^0.$$

Úloha 32.

V trojúhelníku rovnoramenném ABC $(AC=BC)$ jest vedena k podstavě AB příčka CE tak, že úhel $BCE=\frac{\gamma}{4}$. Dokažte:

$$a)\quad \frac{AB\,.\,AE}{AC^2}=4\sin\frac{\gamma}{4}\sin\frac{3\gamma}{4}$$

b) Je-li $AB\,.\,AE=AC^2$, jest úhel $\gamma=72^0$.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Štěpán*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži).

a) Budiž CD výškou trojúhelníka ABC a úhel AEC znamenejme ε.

V trojúhelníku ABC dle věty sinusovy jest

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

avšak

$$\beta=R-\frac{\gamma}{2},$$

pročež

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2}}=2\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Z trojúhelníku AEC plyne

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sin\frac{3\gamma}{4}}{\sin\varepsilon}=\frac{\sin\frac{3\gamma}{4}}{\cos\frac{\gamma}{4}}. \qquad (2)$$

Násobením rovnic (1) a (2) obdržíme

$$\frac{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}^2}=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{3\gamma}{4}}{\cos\frac{\gamma}{4}}=4\sin\frac{\gamma}{4}\,.\,\sin\frac{3\gamma}{4}.$$

b) Nyní jest

$$\sin\frac{\gamma}{4}\sin 3\,.\,\frac{\gamma}{4}=\frac{1}{4},$$

a užijeme-li známého vzorce

$$\sin 3\,.\,\frac{\gamma}{4}=3\sin\frac{\gamma}{4}-4\sin^3\frac{\gamma}{4},$$

obdržíme

$$4\sin^4\frac{\gamma}{4}-3\sin^2\frac{\gamma}{4}=-\frac{1}{4},$$

odkudž řešením plyne

$$\sin\frac{\gamma}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

Odvojmoc z výrazu surdického lze známými vzorci uvésti na tvar:

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \frac{1}{2},$$

i bude tedy

$$\sin\frac{\gamma}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), \quad \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

pročež

$$\frac{\gamma}{4} = 54^0, \quad 18^0.$$

První hodnota úloze nevyhovuje, neboť úhel v trojúhelníku musí býti menší než 180°. Ve druhém případě jest

$$\gamma = 72^0.$$

Úloha 33.

Poloměr svítící koule jest $R = 20$ cm, druhé temné $r = 4$ cm, vzdálenost středů obou koulí $c = 1$ m. Ve vzdálenosti $d = 12$ cm od středu koule temné jest postavena rovná deska kolmo ku ose kužele dotyčného. Jak velký jest poloměr stínu vrženého menší koulí na desku?

Řešení. (Zaslal p. *Gustav Lusk*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Vnější střed podobnosti obou koulí měj od středu menší koule vzdálenost v; potom jest

$$v : r = (v + c) : \mathrm{R}$$

čili

$$v = \frac{cr}{\mathrm{R} - r}.$$

Nazveme-li x poloměr stínu, jest

$$(v - d) : x = \sqrt{v^2 - r^2} : r,$$

tudíž

$$x = \frac{r(v - d)}{\sqrt{v^2 - r^2}}.$$

Při hodnotách daných jest

$$v = 25\, cm,$$

a proto

$$x = \frac{52}{\sqrt{29 \,.\, 21}} = 2{\cdot}107 \ldots cm.$$

Úloha 34.

Úloha tato omylem dvakráte uveřejněna. Viz úlohu 12.

Úloha 35.

Bodem (4, 3) vésti přímku, která s přímkami určenými rovnicí

$$2\,x^2 - 7xy + 3\,y^2 = 0$$

omezuje trojúhelník, jehož obsah $\Delta = 10$.

Řešení. (Zaslal p. *Dominik Trnka*, stud. VII. tř. gymn. ve Vysokém Mýtě.)

Rovnice přímek určených jsou

$$\mathrm{M} \equiv x - 3y = 0,$$
$$\mathrm{N} \equiv 2x - y = 0,$$

přímka hledaná P má pak rovnici

$$\mathrm{P} \equiv y - 3 - \mathrm{A}(x - 4) = 0.$$

Tato přímka seče M v bodě m, jehož souřadnice jsou

$$x_1 = \frac{3(4\mathrm{A} - 3)}{3\mathrm{A} - 1},\quad y_1 = \frac{4\mathrm{A} - 3}{3\mathrm{A} - 1}$$

a přímku N v bodě n o souřadnicích

$$x_2 = \frac{4\mathrm{A} - 3}{\mathrm{A} - 2},\quad y_2 = \frac{2(4\mathrm{A} - 3)}{\mathrm{A} - 2}.$$

Obsah trojúhelníka $m\,n\,0$ vyjádřen jest

$$\Delta = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{5(4\mathrm{A} - 3)^2}{(3\mathrm{A} - 1)(\mathrm{A} - 2)},$$

odkud při hodnotě $\Delta = 10$ vedeni jsme k rovnici

$$4\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{A} + 1 = 0.$$

Jest tedy

$$A = -\frac{1}{2}$$

a rovnice přímky hledané

$$P \equiv x + 2y - 10 = 0.$$

Souřadnice vrcholů jsou

$$m\,(6,\ 2),\ n\,(2,\ 4).$$

Při obecné hodnotě Δ měla by úloha dvojí řešení; z naskytnuvšího se zde případu soudíme, že $\Delta = 10$ jest hodnota minimálná. To stvrzuje se i tím, že úsečka $\overline{mn}$ jest daným bodem p (4, 3) půlena.

Úloha 36.

Vyšetřiti geom. místo vrcholu trojúhelníka abc, jehož základna pevná jest bc a příčka am půlící úhel při vrcholu a jest střední geom. úměrnou úseků bm a cm.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch,* stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Označme strany trojúhelníka písmeny protějších vrcholů; mimo to položme

$$\overline{am} = p,\ \overline{bm} = x,\ \overline{cm} = y.$$

Dle daných podmínek jest

$$x + y = a \tag{1}$$
$$x : y = c : b \tag{2}$$
$$xy = p^2, \tag{3}$$

mimo to pak

$$x^2 = c^2 + p^2 - 2cp \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$y^2 = b^2 + p^2 - 2bp \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Eliminací úhlu α obdržíme

$$b\,(c^2 + p^2 - x^2) = c\,(b^2 + p^2 - y^2);$$

ve spojení s rovnicí (2) a (3) ustanovíme

$$x = \frac{c}{\sqrt{2}},\ y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

a dosazením do rovnice (1) obdržíme

$$b + c = a\sqrt{2}.$$

Jelikož $b + c$ jest konstantní, jest geom. místem vrcholu a ellipsa, jejíž osy jsou $a\sqrt{2}$, a; ohniska její leží ve stálých vrcholech b, c uvažovaného trojúhelníka.

Úloha 37.

Po pravoúhlých osách souřadných šinou se dvě přímky stálých délek a, b tak, že zůstávají spolu rovnoběžny. Průsekem první přímky a osy X vedena přímka $M \parallel Y$, průsekem druhé a osy Y vedena $M_1 \parallel X$. Které jest geom. místo průseku m přímek M, M_1? Jak sestrojíme jeho tečnu?

Řešení. (Zaslal p. *Vilém Novák*, stud. VIII. tř. gymn. v Jičíně.)

Úsečky $\overline{a_1a_2} = a$, $\overline{b_1b_2} = b$ jsou vespolek rovnoběžné, krajní jich body leží na ose X, body a_2, b_2 na ose Y. Směry obou svírají s osou X ostrý úhel α. Jsou-li x, y souřadnice bodu m, jest

$$x = a \cos\alpha,\ y = b \sin\alpha,$$

tedy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rovnice geom. místa bodu m. Místem tím jest tudíž ellipsa. Směrnice tečny v bodě m jest

$$tg\,\varphi = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}.$$

Přeneseme-li na osu X délku $0a' = 0a_2$ a na Y délku $0b' = 0b_1$, jest tečna v bodě m rovnoběžná se spojnicí $a'b'$.

Úloha 38.

V trojúhelníku ABC jest půdice AB pevna a vrchol C proměnlivý. Které jest geom. místo vrcholu C, je-li poloměr kruhu při straně BC vně vepsaného roven n-násobnému poloměru kruhu vně vepsaného při straně AC?

Řešení. (Zaslal p. *Gabriel Tůma*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.)

Jak známo, jest

$$(s-a)\,\varrho_a = \Delta,$$
$$(s-b)\,\varrho_b = \Delta,$$

čili

$$\varrho_a = \frac{2\Delta}{b+c-a},$$
$$\varrho_b = \frac{2\Delta}{a-b+c},$$

kdež Δ značí plochu trojúhelníka, ϱ_a, ϱ_b řečené v úloze poloměry. Dle podmínky

$$\varrho_a = n\varrho_b.$$

Vyloučíce ϱ_a, ϱ_b a Δ z rovnice předešlých, obdržíme po redukci

$$a-b = \frac{n-1}{n+1}\,c.$$

Z rovnice této patrno, že geom. místem vrcholu C jest hyperbola mající A, B za ohniska.

Úloha 39.

Stanoviti jest společné tečny křivek

$$4\,x^2 + 25\,y^2 = 400$$

$$x^2 + y^2 - 14\,x - 14\,y + 89 = 0.$$

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Hruša*, stud. VIII. tř. gymn. v Chrudimi.)

Budiž rovnice společné tečny obou křivek

$$\mathrm{T} \equiv x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Podmínka, aby T byla tečnou dané kružnice, jest, aby vzdálenost její od středu kružnice rovnala se poloměru, tedy

$$(1) \qquad 7 \cos \varphi + 7 \sin \varphi - p = \pm 3,$$

jelikož normálná rovnice daného kruhu jest

$$(x-7)^2 + (y-7)^2 = 9.$$

Hledáme-li body společné přímce T a ellipse dané, obdržíme z rovnic

$$y = \frac{p - x \cos 4}{\sin \varphi},$$

$$(25 \cos^2\varphi + 4 \sin^2\varphi)x^2 - 50\, px \cos \varphi + 25\, p^2 - 400 \sin^2\varphi = 0$$

podmínku

$$625\, p^2 - (25\, p^2 - 400 \sin^2\varphi)\,(25 \cos^2\varphi + 4 \sin^2\varphi) = 0,$$

aby oba průsečíky v jeden splynuly a přímka T se stala tečnou ellipsy.

Podmínka ta redukcí nabývá jednoduché podoby

$$(2) \qquad 100 \cos^2\varphi + 16 \sin^2\varphi = p^2.$$

Vyloučíme-li z rovnic (1), (2) veličinu p, obdržíme pro φ rovnici

$$3 \cos^2\varphi - 7 \cos \varphi \sin \varphi - 3 \sin^2\varphi \pm 3 \cos \varphi \pm 3 \sin \varphi = 0$$

čili

$$3 \cos 2\varphi - \frac{7}{2} \sin 2\varphi \pm 3\sqrt{1 + \sin 2\varphi} = 0.$$

Zbavena odmocnin přechází tato rovnice na

$$13 \sin^2 2\varphi - 84 \cos 2\varphi \sin 2\varphi - 36 \sin 2\varphi = 0,$$

kteráž rozpadá se ve

$$a) \qquad \sin 2\varphi = 0$$

$$b) \qquad 13 \sin 2\varphi - 84 \cos 2\varphi - 36 = 0.$$

Z rovnice $a)$ plynou kořeny

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 90^0;$$

rovnici *b*) dáme nejprve tvar

$$13 \sin 2\varphi = 12(3 + 7\cos 2\varphi),$$

pak zdvojmocníme a obdržíme

$$7225 \cos^2 2\varphi + 6048 \cos 2\varphi + 1127 = 0,$$

z čehož řešením nabudeme

$$\cos 2\varphi = \frac{-3024 \pm 1001}{7225}$$

čili

$$\cos 2\varphi_3 = -\frac{7}{25}$$
$$\cos 2\varphi_4 = -\frac{161}{289}.$$

Pro jednoduché úhly dle známých vzorců ustanovíme

$$\cos\varphi_3 = \pm\frac{3}{5},\quad \sin\varphi_3 = \pm\frac{4}{5}$$
$$\cos\varphi_4 = \pm\frac{8}{17},\quad \sin\varphi_4 = \pm\frac{15}{17}.$$

Znaménka funkcí jest voliti tak, aby dosazením do rovnice (1) vyšlo positivní p. Tímto způsobem obdržíme výsledky následující:

$$\varphi_1 = 0,\quad p_1 = 10,\quad T_1 \equiv x - 10 = 0;$$
$$\varphi_2 = 90^0,\quad p_2 = 4,\quad T_2 \equiv y - 4 = 0;$$
$$\cos\varphi_3 = \frac{3}{5},\quad \sin\varphi_3 = \frac{4}{5},\quad p_3 = \frac{34}{5},$$
$$T_3 \equiv 3x + 4y - 34 = 0;$$
$$\cos\varphi_4 = -\frac{8}{17},\quad \sin\varphi_4 = \frac{15}{17},\quad p_4 = \frac{100}{17},$$
$$T_4 \equiv 8x - 15y + 100 = 0.$$

Úloha 40.

Která jest číselná výstřednost zemské dráhy, je-li zdánlivý průměr slunce v přísluní 32′ 36″ a v odsluní 31′ 32″?

Řešení. (Zaslal p. *Karel Nečas*, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí.)

Budiž r poloměr slunce, a hlavní poloosa a e výstřednost zemské dráhy. Dán jest zdánlivý poloměr slunce v přísluní α, v odsluní β.

Potom jest

$$\sin\alpha = \frac{r}{a-e}, \quad \sin\beta = \frac{r}{a+e},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a+e}{a-e} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

kdež ε jest číselná výstřednost dráhy zemské. Vyjádříme-li odtud

$$\varepsilon = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta},$$

obdržíme známou úpravou

$$\varepsilon = \frac{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Dosazením hodnot daných vypočítáme

$$\varepsilon = 0{\cdot}0166\ldots$$

Úloha 41.

V krajních bodech úsečky $\overline{oa}$ jsou vztýčeny kolmice Y a T. Bodem b na $\overline{oa}$ zvoleným vedená příčka seče přímky Y, T v bodech m, q. Ze středu m poloměrem mq sestrojená kružnice protíná přímku vedenou bodem m rovnoběžně s $\overline{oa}$ v bodech n a p.

a) Geometrickým místem bodů n a p jest hyperbola.

b) Je-li l průsečík přímky Y s kolmicí na bm v bodě b vztýčenou, jest $\overline{nl}$ tečnou hyperboly.

c) Ve kterém případě jest hyperbola rovnostranná?

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis*, stud. VII. tř. g, na Malé Straně v Praze.)

Budiž $\overline{oa}$ osou hlavní X a osou pobočnou Y pravoúhlé soustavy souřadnic.

Přímka jdoucí body b (b, o) a m (o, m) má rovnici

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{m} = 1,$$

a rovnice kolmice T v bodu a (a, o) na $\overline{oa}$ vztýčené jest

$$x - a = 0.$$

Řešením předešlých rovnic obdržíme souřadnice bodu q:

$$x = a, \quad y = \frac{(b-a)\,m}{b}.$$

Dále jest

$$\overline{mn}^2 = \overline{mp}^2 = \overline{mq}^2 = \frac{a^2(b^2+m^2)}{b^2},$$

a že

$$\overline{mn} = x, \quad \overline{om} = m = y,$$

jest

$$x^2 = \frac{a^2(b^2+y^2)}{b^2},$$

a konečně

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Geometrickým místem bodů n, p jest tedy hyperbola, jejíž ohnisková poloosa $\overline{oa} = a$, a délka poloosy pobočné jest $\overline{ob} = b$.

b) Rovnice přímky jdoucí body l (o, l) n $(x, y,)$ zní

$$y - l = \frac{y_1 - l}{x_1}\,x,$$

ježto v $\triangle\, bmn$

$$l = -\frac{b^2}{y_1};$$

lze uvésti rovnici přímky nl na tvar

$$y + \frac{b^2}{y_1} = \frac{y_1 + \frac{b^2}{y_1}}{x_1}\,x,$$

$$yy_1 + b^2 = \frac{y_1^2 + b^2}{x_1} x. \qquad (1)$$

Ježto bod n (x_1, y_1) leží v hyperbole, jest

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$$

nebo též

$$y_1^2 + b^2 = \frac{b^2x_1^2}{a^2}.$$

Dosadíme-li hodnotu za $y_1^2 + b^2$ zde obdrženou do rovnice (1), obdržíme rovnici, které lze snadno dáti tvar

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

Z rovnice této jest patrno, že přímka nl jest tečnou hyperboly v bodu n (x_1, y_1).

c) Splyne-li bod b s bodem a, jest $\overline{oa} = \overline{ob} = a$, a hyperbola jest tudíž rovnostranná.

Poznámka. Vyjdeme-li od rovnice tečny

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

v bodu n (x_1, y_1), snadno najdeme souřadnice bodu l, v němž tečna osu Y seče, a to

$$x = 0, \; y = l = -\frac{b^2}{y_1},$$

a že

$$y_1 = m,$$

jest

$$b^2 = -lm,$$

pročež jest trojúhelník mbl při b pravoúhlý, z čehož opět dříve uvedené sestrojení tečny vysvítá.

Úloha 46.

Jest určiti rovnici paraboly procházející bodem (0, 0) tak, aby osa její byla rovnoběžna s osou X a ohnisko měla v bodě (3, —4).

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Jambor*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Rovnice paraboly, jejíž vrchol má souřadnice ξ, η a jejíž osa jest rovnoběžná ku X, má podobu

$$(y - \eta)^3 = 2p\,(x - \xi)\,.$$

V daném případě jest

$$\eta = -4\,, \qquad \xi = -\frac{p}{2} + 3\,;$$

tím nabývá rovnice tvaru

$$(y + 4)^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2} - 3\right).$$

Má-li křivka jíti počátkem, musí souřadnice jeho (0, 0) rovnici vyhověti; bude tedy

$$4^2 = p^2 - 6p\,,$$

tudíž

$$p_1 = 8\,, \quad p_2 = -2\,.$$

Úloze vyhovují dvě paraboly, jichž rovnice jsou

$$(y + 4)^2 = 16\,(x + 1)\,,$$
$$(y + 4)^2 = 4\,(4 - x)\,.$$

Úloha 47.

Z přímého rovnoběžnostěnu, jehož podstavou jest čtverec o straně $a = 25\,cm$, vysoustružen co největší dvojkužel o rovných stranách, jehož osou jest úhlopříčná osa hranolu. Je-li povrch jeho $P = 19{\cdot}2\,dm^2$, který jest jeho obsah K?

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Hruša*, stud. VIII. tř. gymn. v Chrudimi.)

Znamená-li x vzdálenost pláště kužele od jeho středu, jest kr. obsah kužele

$$\mathrm{K} = \frac{x}{3}\,\mathrm{P}\,,$$

a je-li R poloměr podstavy, S strana a A osa kužele, bude v osové průseči kužele

$$x : \mathrm{R} = \frac{\mathrm{A}}{2} : \mathrm{S}\,, \qquad \text{tedy} \quad x = \frac{\mathrm{AR}}{2\mathrm{S}}\,.$$

Podstava kužele bude vepsána do průseče rovnoběžnostěnu kolmé na jeho úhlopříčnou osu. Průseč tato tvoří kosočtverec o úhlopříčné $u_1 = a\sqrt{2}$ a druhé $u_2 = \frac{Au_1}{v} = \frac{Aa\sqrt{2}}{v}$, kdežto v znamená výšku rovnoběžnostěnu. Poloměr R bude tedy

$$R = \frac{u_1 u_2}{2\sqrt{x_1^2 + u_2^2}} = \frac{Aa}{\sqrt{2(v^2 + A^2)}} = \frac{Aa}{2\sqrt{a^2 + v^2}} = \frac{Aa}{2U},$$

je-li U úhlopříčná v poboční stěně hranolu.

Strana S kužele jest

$$S = \sqrt{\frac{A^2}{4} + R^2} = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{A^2 a^2}{4A^2}} = \frac{A}{2U}\sqrt{U^2 + a^2} = \frac{A}{2U},$$

tedy

$$R : S = a : A \text{ a dosazením } x = \frac{a}{2}, \text{ nabudeme}$$

$$K = \frac{a}{6} P = 8\ dm^3.$$

Úloha 48.

Podstavami komolého jehlanu o krychlovém obsahu $K = 159{\cdot}358\ dm^3$ a povrchu $P = 450{\cdot}85\ dm^2$ jsou mnohoúhelníky opsané kolem kružnice; dolní má plochu $Z = 87{\cdot}72\ dm^2$ a obvod $O = 3{\cdot}58\ m$. Jak velký bude obsah k a povrch p největšího komolého kužele z něho vysoustruženého?

Řešení. (Zaslal p. *Gabriel Tůma,* stud. VI. tř. r. v Budějovicích.)

Je-li R poloměrem kružnice vepsané do větší podstavy kom. jehlanu, bude

$$k : K = \pi R^2 : Z$$

čili, poněvadž

$$z = \frac{OR}{2}, \quad \text{tedy } R = \frac{2Z}{O},$$

také

$$k : K = \frac{4\pi Z}{O^2} : 1, \quad \text{konečně } k = 4\pi \frac{Z}{O^2} K = 137{\cdot}065 \ldots dm^3.$$

Pro menší podstavu bude, má-li plochu z a obvod o,

$$z = \frac{Zo^2}{O^2},$$

takže, znamená-li s výšku pobočné stěny jehlanu, bude jeho povrch

$$P = \frac{Z}{O^2}(O^2 + o^2) + (O + o)\frac{s}{2}$$

a povrch kom. kužele, jehož menší podstava má poloměr

$$r = \frac{2z}{o} = \frac{2Zo}{O^2},$$

bude

$$p = \frac{4Z^2}{O^4}(O^2 + o^2)\pi + \frac{2Z}{O^2}(O + o)s\pi,$$

což srovnáno s P podává

$$p = 4\pi\frac{Z}{O^2}P = 387{\cdot}77\ldots dm^2.$$

Úloha 49.

V trojúhelníku ABC jest dán ve straně AB bod D a ve straně BC bod E libovolně položený. Určiti ve straně AC bod F tak, aby

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle FEC.$$

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Vitěka*, stud. VI. tř. gymn. v Č. Budějovicích.)

Označme úhly trojúhelníka obvyklým spůsobem písmeny α, β, γ; mimo to znamenejme

$$\sphericalangle AFD = x, \quad \sphericalangle EFC = y,$$
$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle CEF = z.$$

Jest potom

$$x = 2R - \alpha - z$$
$$y = 2R - \gamma - z,$$

proto

$$x - y = \gamma - \alpha = \delta.$$

Tím jest úloha daná převedena na tuto: Ve straně AC ustanoviti bod F tak, aby úhly AFD, EFC měly daný rozdíl.

Úlohu tuto řešíme jak následuje:

K bodu D sestrojme dle strany AC souměrný bod D', na tětivě ED' vyrýsujme oblouk kruhový obsahující úhel obvodový $2R - \delta$. Průsečík tohoto oblouku se stranou AC jest hledaným bodem F.

Odůvodnění spočívá na větách z planimetrie vůbec známých.

Úloha 50.

Dána kružnice průměru $AB = 2$. Jedna polovice její rozpůlena bodem C, druhá rozdělena ve tři stejné díly body D a E. Spojnice CD a CE protínají průměr AB v bodech F a G. Má býti dokázáno, že

$$CF + FG$$

neliší se od $\frac{\pi}{2}$ *více než o 1:4000.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch*, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Budiž $AB = 2r$. Potom jest

$$CF = \frac{r}{\cos 15^0}, \qquad FG = 2r \operatorname{tg} 15^0,$$

tudíž

$$\sigma = CF + FG = \frac{r}{\cos 15^0}(1 + 2 \sin 15^0).$$

Jelikož

$$\cos 15^0 = 0{\cdot}96593,$$
$$\sin 15^0 = 0{\cdot}25882,$$

jest při

$$r = 1$$
$$\sigma = 1{\cdot}57117,$$

pročež

$$\sigma - \frac{\pi}{2} = 0{\cdot}00038.$$

Úloha 51.

Řešiti jest rovnici

$$x^{\lg x} . \sqrt[n]{x} = x^n . \sqrt[\lg x]{x}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Norbert Novotný*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Logarithmujíce danou rovnici obdržíme

$$\log^2 x + \frac{1}{n} \log x = n \log x + 1$$

čili

$$\log^2 x - \left(n - \frac{1}{n}\right) \log x - 1 = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\log x = \frac{1}{2} [n - \frac{1}{n} \pm (n + \frac{1}{n})],$$

$$\log x_1 = n, \quad \log x_2 = -\frac{1}{n},$$

tudíž v soustavě logarithmů obyčejných

$$x_1 = 10^n, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{10}}.$$

Úloha 52.

Geometrický průměr dvou čísel jest 600, průměr arithmetický jest o 49 větší než harmonický, Která jsou ta čísla?

Řešení. (Zaslal p. *Norbert Novotný*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Žádaná čísla x, y vyhovují rovnicím

$$\sqrt{xy} = 600,$$
$$\frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = 49.$$

Z těch vychází vyloučením součinu xy

$$(x+y)^2 - 98(x+y) - 1440000 = 0,$$

pročež
$$x + y = 49 \pm 1201.$$

a) Je-li

$$x + y = 1250$$
$$xy = 360000,$$

obdržíme čísla $n = 800, \quad y = 450,$

jichž arithmetický průměr jest 625, harmonický 576.

b) Klademe-li

$$x + y = -1152$$
$$xy = 360000,$$

obdržíme výsledek imaginarný

$$x = -576 + 168i,$$
$$y = -576 - 168i.$$

Úloha 53.

Řešiti rovnici

$$tg\frac{x+\alpha}{2} + tg\frac{x-\alpha}{2} = 4\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\cos x}\right),$$

je-li

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Norbert Novotný,* stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Upravme rovnici takto:

$$\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\cos\frac{x+\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\frac{x-\alpha}{2}} = \frac{4\sin\frac{\alpha+x}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha-x}{2}}{\cos x},$$

načež odstraníce zlomky obdržíme

$$\sin x \cos x = \sin(\alpha + x)\,.\,\sin(\alpha - x)$$

čili

$$\sin 2x = 2\,(\sin^2\alpha - \sin^2 x).$$

Známými vzorci nabudeme rovnic

$$\sin 2x = \cos 2x - \cos 2\alpha,$$
$$\cos 2x - \sin 2x = \cos 2\alpha,$$
$$1 - \sin 4x = \cos^2 2\alpha,$$
$$\sin 4x = 1 - \cos^2 2\alpha,$$

což při dané hodnotě $\cos 2\alpha$ vede k výsledku

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vyhovují tedy dané rovnici duté úhly

$$x = 15^0,\quad 30^0,\quad 105^0,\quad 120^0.$$

Úloha 56.

Dokázati, že

$$tg\,\frac{x}{2}\sec x + tg\,\frac{x}{4}\sec\frac{x}{2} + \ldots + tg\,\frac{x}{2^{n+1}}\sec\frac{x}{2^n} = tg\,x - tg\,\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Kidles*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Ze známého vzorce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

plyne
$$(1+\cos 2x)\operatorname{tg} x = \sin 2x$$
aneb
$$(\sec 2x + 1)\operatorname{tg} x = \sin 2x \,.\, \sec 2x,$$
tedy
$$\operatorname{tg} x \sec 2x = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x.$$

Z této stejniny obdržíme, půlíme-li postupně x,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sec x = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}\sec\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2^2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}\sec\frac{x}{2^2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2^2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}\sec\frac{x}{2^n} = \operatorname{tg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}},$$

takže, sečteme-li na obou stranách, obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}\sec\frac{x}{2^k} = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Řešení ostatních úkolů a přisouzení cen oznámeno bude v I. čísle ročníku následujícího.