Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miloš Neubauer

# O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty konečněkrát

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 63 (1934), No. 2, 1--8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122633

## ČÁST MATEMATICKÁ

# O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty konečněkrát.

*Miloš Neubauer.*

(Došlo dne 22. VI. 1933.)

1. Nechť $P$ je neprázdné množství přirozených čísel. Nechť $\mathrm{f}(x)$ je funkce[1]) definovaná a spojitá v uzavřeném intervalu, která každé *své* hodnoty nabývá konečněkrát; pro každou její hodnotu $y$ nechť $\mathrm{p}(y)$ značí počet všech řešení v $x$ rovnice $y = \mathrm{f}(x)$. Pak pravím, že funkce $\mathrm{f}(x)$ je *P-funkce*, když $P$ je množství všech $\mathrm{p}(y)$. Obsahem tohoto článku je důkaz této věty:

*K tomu, aby existovala P-funkce, je nutné a stačí, aby bylo*

$$\sup P \geqq 2 \,.\, \inf P - 1 \tag{1}$$

($\sup P$ resp. $\inf P$ značí horní resp. dolní hranici množství $P$).

2. V článku „O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty $k$-krát nebo $l$-krát“ (Čas. mat. fys., roč. 62, str. 8) jsem dokázal, že nerovnost (1), která je triviální pro $\sup P = +\infty$, je podmínkou nutnou pro existenci $P$-funkce (věta 1 l. c.), a dále, že je postačující v tom případě, když $P$ obsahuje dvě[2]) čísla $k < l$ (v tomto případě praví (1) totéž co $l \geqq 2k - 1$ a $P$-funkce znamená totéž co *$(k, l)$-funkce*). Když $P$ obsahuje jedno číslo $h$, je postačitelnost podmínky (1) triviální, neboť v tomto případě praví (1) totéž, co $h = 1$. Zbývá tedy sestrojit $P$-funkci ke každému $P$, které obsahuje aspoň tři čísla a splňuje podmínku (1).

3. Nechť tedy $P$ značí až do konce pevné takové množství. Položím $p = \inf P$. Podle (1) jsou v $P$ čísla $\geqq 2p - 1$. Nazvu $q$ nejmenší z nich; v $P$ není tedy čísel, která jsou jak $\geqq 2p - 1$, tak $< q$. Rozdělím množství všech čísel z $P$, která jsou *větší než p*, na tři disjunktní části $T, L, S$ takto: do $T$ patří čísla $t$, pro něž $p < t < 2p - 1$; do $L$ resp. $S$ lichá resp. sudá čísla $\geqq q$. Množství $T$, $L$, $S$ napíši, pokud nejsou prázdná, ve tvaru posloupností: $t_1 < t_2 < \ldots$, $l_1 < l_2 < \ldots$, $s_1 < s_2 < \ldots$ Posloupnost pro $T$ obsahuje nejvýš $p - 2$ členů; končí-li členem $t_N$, $N < p - 2$, položím $t_n = t_N$ pro $n = N + 1, N + 2, \ldots, p - 2$. Posloupnost pro $L$ resp. $S$ je konečná nebo nekonečná; je-li konečná, končíc členem $l_N$ resp. $s_N$, položím $l_n = l_N$ resp. $s_n = s_N$ pro $n = N + 1$, $N + 2, \ldots$

[1]) Jednám o funkcích reálných jedné reálné proměnné.

[2]) T. j. přesně dvě; jinak užívám slova „aspoň“.

$P$-funkci sestrojím podle tohoto plánu:

$$p\begin{cases} =1 & \begin{cases} S=0\text{[3]} \\ S\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L=0 \\ L\neq 0\end{cases} \\ >1 & \begin{cases} q\text{ liché} & \begin{cases} T=0=S\\ T=0\neq S \\ T\neq 0 = S \\ T \neq 0 \neq S\end{cases} \\ q\text{ sudé} & \end{cases}\end{cases} \qquad (2)$$

Že tento plán zahrnuje všechny možnosti, je vidět takto: Když $p = 1$, je $2p - 1 = 1$, tedy $q = 1$, $T = 0$; je-li mimo to též $S = 0$, je $L \neq 0$, protože $P$ obsahuje aspoň tři čísla. Když $p > 1$, je $q \geqq 2p - 1 > p$; je-li mimo to $q$ liché, je tedy $q$ v $L$, takže $L \neq 0$.

Sestrojovanou $P$-funkci nazvu $\mathrm{f}(x)$. Výsledná konstrukce je dána vzorci (14) — (16), (25) — (28) a (31). Důkaz, že funkce $\mathrm{f}(x)$ je $P$-funkce, vynechám, protože nečiní zásadních potíží.

4. Pro užívání funkčních znaků zavedu toto pravidlo: Nechť $\Phi(x)$ značí konečnou funkci definovanou v intervalu $[0, 1]$[4]) a nechť $a, b, m, M$ jsou reálná čísla ($a < b$). Pak znamenají znaky $\Phi^{\bullet}(x)$, $\Phi(a, b; m, M; x)$ a $\Phi^{*}(a, b; m, M; x)$ takto definované funkce proměnné $x$:

$$\Phi^{\bullet}(x) = 1 - \Phi(1 - x) \text{ pro } 0 \leqq x \leqq 1. \qquad (3)$$

$$\Phi(a, b; m, M; x) = m + (M - m)\, \Phi\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \text{ pro } a \leqq x \leqq b, \qquad (4)$$

$$\Phi^{*}(a, b; m, M; x) = \Phi(a, b; m, M; a + b - x) \text{ pro } a \leqq x \leqq b. \qquad (5)$$

5. Zavedu osm *pomocných funkcí* proměnné $x$ v intervalu $[0, 1]$ [takže lze na ně použít operací (3) — (5)] vzorci (6) — (13); v nich značí $h$ kladné liché číslo, $k$ celé číslo $[1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}(h + 1)]$ a $\{h_n\}$ nekonečnou posloupnost $h_1, h_2, \ldots$ kladných lichých čísel.

$$\mathrm{F}_h(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } \dfrac{n}{h} \; (n = 0, 2, \ldots, h - 1), \\[2ex] 1 \text{ pro } \dfrac{n}{h} \; (n = 1, 3, \ldots, h), \\[2ex] \text{lineární v } \left[\dfrac{n}{h}, \dfrac{n + 1}{h}\right] (n = 0, 1, \ldots, h - 1). \end{cases} \qquad (6)$$

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \mathrm{F}_h\left(\dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}\right] (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \text{ pro } x = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

---

[3]) $S = 0$ resp. $S \neq 0$ znamená, že množství $S$ je resp. není prázdné.
[4]) T. j. množství všech $x$, pro něž $0 \leqq x \leqq 1$.

$$F_{h,k}(x) = \begin{cases} F_h \ x \ \text{v} \left[0, \dfrac{2(k-1)}{h}\right]^{5)}, \\ \varphi_{h-2(k-1)}\left(\dfrac{2(k-1)}{h}, 1; 0, 1; x\right) \ \text{v} \left[\dfrac{2(k-1)}{h}, 1\right]. \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_h(x) = \varphi^*_h(x). \tag{9}$$

$$\psi_{h,k}(x) = \begin{cases} F_{h,k}(0, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [0, \tfrac{1}{2}], \\ \psi_h(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 1; x) \ \text{v} \ [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_{h,k}(x) = \psi^*_{h,k}(x). \tag{11}$$

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \varphi_h(0, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [0, \tfrac{1}{2}], \\ \psi_h(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 1; x) \ \text{v} \ [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{12}$$

$$\chi_{\{h_n\}}(x) = \begin{cases} \chi_{h_n}\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}; x\right) \ \text{v} \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \ \text{pro} \ x = 0. \end{cases} \tag{13}$$

6. Sestrojím $P$-funkci $f(x)$ v případě $p = 1$ vzorci (14) — (16). V nich užiji označení z odst. 3, plánu (2), operace (5) a pomocných funkcí (7), (9) — (13).

$$p = 1, \ S = 0:$$

$$f(x) = \chi_{\{l_n\}}(x). \tag{14}$$

$$p = 1, \ S \neq 0, \ L = 0^{6)}:$$

$$f(x) = \begin{cases} \psi_{s_2 - s_1 + 1}(x) \ \text{v} \ [0, 1], \\ \chi^*_{s_1 - 1}(1, 2; -1, 1; x) \ \text{v} \ [1, 2], \\ \chi_{\{s_n - s_1 + 1\}}(2, 3; -1, -\tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [2, 3], \\ \varphi_{s_2 - s_1 + 1, \frac{1}{2}(s_2 - s_1)}(3, 4; -\tfrac{1}{2}, 0; x) \ \text{v} \ [3, 4]. \end{cases} \tag{15}$$

$$p = 1, \ S \neq 0, \ L \neq 0, \ s_1 < \text{resp.} > l_1:$$

$$f(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n\}}(x) \ \text{v} \ [0, 1], \\ \varphi_{l_1, \frac{1}{2}s_1} \ \text{resp.} \ \varphi_{l_1}(1, 2; 1, 2; x) \ \text{v} \ [1, 2], \\ \psi_{s_1 - 1} \ \text{resp.} \ \psi_{s_1 - 1, \frac{1}{2}(l_1 - 1)}(2, 3; 2, 3; x) \ \text{v} \ [2, 3], \\ \chi^*_{\{s_n - s_1 + 1\}}(3, 4; 2, 3; x) \ \text{v} \ [3, 4]. \end{cases} \tag{16}$$

7. Nechť je $p > 2$, $q$ liché a $t$ číslo z $T$ (viz odst. 3). Zavedu poslední *pomocnou funkci* proměnné $x$ v intervalu $[0, 1]$ [takže lze na ni použít operace (4)] vzorcem (17). V něm užiji označení z odst. 3 a pomocných funkcí (8) a (12).

---

[5]) Odpadá pro $k = 1$.

[6]) V tomto případě je $s_2 > s_1$, protože $P$ obsahuje aspoň tři čísla.

$$\mathrm{H}_t(x) = \begin{cases} \chi_{q-2p+2}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right]. \\ \mathrm{F}_{2p-1, t-p+1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{17}$$

8. Nechť je $p > 1$, $q$ liché. Zavedu osm *základních funkcí* proměnné $x$ v intervalu $[0, 1]$ [takže lze na ně použít operace (4)] vzorci (18) — (24). V nich užiji označení z odst. 3, operace (5) a pomocných funkcí (6) — (13) a (17).

$$\mathrm{G}_L^{I}(x) \text{ resp. } \mathrm{G}_L^{II}(x) =$$

$$= \begin{cases} \chi_{\{l_n - q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right], \\ \chi_{q-2p+2} \text{ resp. } \varphi_{q-2p+2}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{18}$$

$$q > 2p-1:$$

$$ {}^{III}_{L}(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n - q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right]. \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right]^{7)}, \\ \psi^*{}_3\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right], \\ \chi_{q-2p}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{19}$$

$$q > 2p-1:$$

$$\mathrm{G}_L^{IV}(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n - q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p+1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p+1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p+1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p+1}, \dfrac{2p}{2p+1}\right], \\ \varphi_{q-2p}\left(\dfrac{2p}{2p+1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p}{2p+1}, 1\right]. \end{cases} \tag{20}$$

$$S \neq 0, \; s_2 = s_1{}^{8)}:$$

---

[7]) Odpadá pro $p = 2$.

[8]) T. j. $S$ obsahuje jedno číslo.

$$\mathrm{G}_S^I(x) = \begin{cases} \psi_{s_1-2p+1,\, \frac{1}{2}(q-2p+3)}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right]^{7)}, \\ \varphi^*{}_3\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{21}$$

$$S \neq 0,\ s_2 > s_1:$$

$$\mathrm{G}_S^{II}(x) = \begin{cases} \psi_{s_1-2p+3,\, \frac{1}{2}(q-2p+3)}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right], \\ \varphi^*{}_{s_2-s_1+1,2}\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}; \tfrac{1}{2}, 1; x\right) \\ \qquad\qquad \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right], \\ \chi^*{}_{\{s_n-s_1+1\}}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, \tfrac{1}{2}; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{22}$$

$$T \neq 0^{9)}:$$

$$\begin{gathered} \mathrm{G}_T^I(x) = \mathrm{H}_{t_n}\left(\frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}; \frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}; x\right) \\ \text{v } \left[\frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}\right] (n = 1, 2, \ldots, p-2). \end{gathered} \tag{23}$$

$$\mathrm{G}_T^{II}(x) = \begin{cases} \mathrm{G}_T^I(x) \text{ v } \left[0, \dfrac{p-3}{p-2}\right]^{10)}, \\ \mathrm{F}_{q,\, t_{p-2}-p+1}\left(\dfrac{p-3}{p-2}, 1; \dfrac{p-3}{p-2}, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{p-3}{p-2}, 1\right]. \end{cases} \tag{24}$$

9. Sestrojím $P$-funkci $\mathrm{f}(x)$, když je $p > 1$ a $q$ liché, vzorci (25) — (28). V nich užiji plánu (2) a základních funkcí (18) a (21) až (24).

$$p > 1,\ q \text{ liché},\ T = 0 = S:$$

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{G}_L^I(x). \tag{25}$$

$$p > 1,\ q \text{ liché},\ T = 0 \neq S,\ s_2 = \text{resp.} > s_1:$$

---

[9]) Tedy $p > 2$, neboť pro $p = 2$ je $2p - 1 = 3$, $T = 0$.
[10]) Odpadá pro $p = 3$.

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \mathrm{G}_L^{II}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \mathrm{G}_S^{I} \text{ resp. } \mathrm{G}_S^{II}\,(1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2]. \end{cases} \tag{26}$$

$p > 1$, $q$ liché, $T \neq 0 = S$:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \mathrm{G}_L^{I}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \mathrm{G}_T^{I}\,(1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2]. \end{cases} \tag{27}$$

$p > 1$, $q$ liché, $T \neq 0 \neq S$, $s_2 =$ resp. $> s_1$:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \mathrm{G}_L^{I}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \mathrm{G}_T^{II}(1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2], \\ \mathrm{G}_S^{I} \text{ resp. } \mathrm{G}_S^{II}(2, 3; 2, 3; x) \text{ v } [2, 3]. \end{cases} \tag{28}$$

10. Pro liché $q$ zavedu modifikaci $\mathrm{f}_P(x)$ $P$-funkce $\mathrm{f}(x)$ v následujících případech.

*Případ prvý.* Nechť $p = 1$, $L \neq 0$. Pak[11])

$$\mathrm{f}_P(x) = \begin{cases} \psi_{l_1,2}(0, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}; x) \text{ v } [0, \tfrac{1}{2}], \\ \chi_{\{l_n\}}(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 1; x) \text{ v } [\tfrac{1}{2}, 1], \\ \mathrm{f}(x) \text{ pro } x > 1.^{12)} \end{cases}$$

*Případ druhý.* Nechť $p > 1$, $l_2 > l_1$. Pak[11])

$$\mathrm{f}_P(x) = \begin{cases} \psi_{l_2-q+1,2}\left(0, \dfrac{1}{2\,(2p-1)}; 0, \tfrac{1}{2}; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2\,(2p-1)}\right], \\ \chi_{\{l_n-q+1\}}\left(\dfrac{1}{2\,(2p-1)}, \dfrac{1}{2p-1}; \tfrac{1}{2}, 1; x\right) \\ \qquad\qquad \text{ v } \left[\dfrac{1}{2\,(2p-1)}, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{f}(x) \text{ pro } x > \dfrac{1}{2p-1}.^{13)} \end{cases}$$

*Případ třetí.* Nechť $p > 1$, $q > 2p - 1$. Pak $\mathrm{f}_P(x)$ vzniká z příslušné z funkcí (25) — (28) (podle předpokladů o $T$ a $S$), když místo základní funkce $\mathrm{G}_L^{I}(x)$ resp. $\mathrm{G}_L^{II}(x)$ se užije základní funkce $\mathrm{G}_L^{III}(x)$ resp. $\mathrm{G}_L^{IV}(x)$ [vzorce (19) a (20)].

11. Sestrojím $P$-funkci $\mathrm{f}(x)$, když $q$ je sudé číslo (viz plán (2)).[14]) Za tím účelem nazvu $P'$ množství všech čísel z $P$ zmenšených o 1.

---

[11]) Užiji pomocných funkcí (10) a (13).

[12]) Odpadá pro $S = 0$; pro $S \neq 0$ značí $\mathrm{f}(x)$ funkci (16).

[13]) $\mathrm{f}(x)$ značí příslušnou z funkcí (25)—(28) podle předpokladů o $T$ a $S$.

[14]) Eo ipso je $p > 1$.

Protože $p > 1$, je $P'$ množstvím přirozených čísel. Položím-li $p' = p - 1$, je $p' = \inf P'$. Množství $P'$ obsahuje číslo $q - 1$. Protože $q \geqq 2p - 1$, je

$$q - 1 \geqq 2p - 2 = 2p' > 2p' - 1. \tag{29}$$

Tedy je $\sup P' \geqq q - 1 > 2p' - 1 = 2 \inf P' - 1$. $P'$ je tedy množství přirozených čísel, které obsahuje aspoň tři čísla a splňuje podmínku (1). Nechť znaky zavedené v odst. 3 opatřeny čárkou se vztahují na množství $P'$ (znak $p'$ hoví tomuto pravidlu). Tvrdím, že $q'$ (nejmenší číslo z $P'$, které je $\geqq 2p' - 1$) *je liché číslo*. Důkaz: Protože $q - 1$ je v $P'$, podle (29) je

$$q - 1 \geqq q' \geqq 2p' - 1. \tag{30}$$

Kdyby $q'$ bylo sudé, bylo by ($q - 1$ je liché) $q - 1 > q' \geqq 2p'$, tedy $q > q' + 1 \geqq 2p' + 1 = 2p - 1$. Ale $q' + 1$ je v $P$ a $P$ neobsahuje čísel, která jsou jak $\geqq 2p - 1$, tak $< q$. — Nechť nyní $f'(x)$ značí $P'$-funkci, sestrojenou způsobem dosud popsaným. Tvrdím, že *lze definovati funkci* $f'_{P'}(x)$ z odst. 10. Důkaz: Když $p' = 1$, podle (29) $q - 1$ patří do $L'$, tedy $L' \neq 0$ a nastává případ prvý z odst. 10. Když $p' > 1$, podle (30) je buď $q - 1 > q'$ nebo $q - 1 = q'$. Je-li $q - 1 > q'$, obsahuje $L'$ aspoň dvě čísla, totiž $q'$ a $q - 1$, takže $l'_2 > l'_1$ a nastává případ druhý z odst. 10. Je-li $q - 1 = q'$, podle (29) $q' > 2p' - 1$ a nastává případ třetí z odst. 10.

Nazvu-li $[a, b]$ interval, v němž je definována funkce $f'_{P'}(x)$ (ostatně $a = 0$), a $m$ resp. $M$ její minimum resp. maximum (ostatně $m = 0$), je $P$-funkce dána při sudém $q$ touto formulí:

$$p > 1, \ q \text{ sudé}:$$

$$f(x) \begin{cases} = M \text{ pro } x = a - 1, = m \text{ pro } x = a, \text{ lineární v } [a - 1, a], \\ = f'_{P'}(x) \text{ v } [a, b]. \end{cases} \tag{31}$$

*

## Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit $P$ un ensemble non vide de nombres naturels. Soit $f(x)$ une fonction (réelle), définie et continue dans un intervalle fermé, qui prend chaque sa valeur $y$ un nombre fini, soit $p(y)$, de fois. Alors j'appelle $f(x)$ une *P-fonction,* si $P$ est identique à l'ensemble de tous les $p(y)$. L'objet de l'article précédent est la démonstration du théorème suivant:

*Si et seulement si*

$$\overline{\text{borne}}\, P \geqq 2 \,.\, \underline{\text{borne}}\, P - 1, \tag{*}$$

*il existe des P-fonctions.*

D'après les résultats de mon article „Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur $k$-fois ou $l$-fois" (ce journal, 62, p. 8), il suffit de construire une $P$-fonction pour chaque $P$ contenant au moins *trois* nombres et satisfaisant à (*). — Soit donc $P$ un tel ensemble. En désignant par $E(C(x))$ l'ensemble de tous les nombres $x$ de $P$ vérifiant la condition $C(x)$, je pose $p = \underline{\overline{borne}}\ P$, $q = \underline{borne}\ E\,(x \geqq 2p - 1)$, $T = E\,(p < x < 2p - 1)$, $L$ resp. $S = E\,(x \geqq q,\ x > p,\ x$ impair resp. pair) de manière que $P = E\,(x = p) + T + L + S$. En désignant par $t_1 < t_2 < \ldots$, $l_1 < l_2 < \ldots$, $s_1 < s_2 < \ldots$ tous les nombres de $T$, $L$, $S$ resp. (s'il y en a), je pose: 1° $t_n = t_N$ pour $n = N + 1, N + 2, \ldots, p - 2$, si $T$ ne contient que $N$ nombres ($N < p - 2$); 2° $l_n = l_N$ resp. $s_n = s_N$ pour $n = N + 1,\ N + 2, \ldots$, si $L$ resp. $S$ ne contient que $N$ nombres ($N$ fini). — D'autre part, en se servant des formules[1]) (3) — (5), dans lesquelles $\Phi(x)$ désigne une fonction (réelle), définie et finie dans $[0, 1]$,[2]) et $a, b, m, M$ — des nombres réelles ($a < b$), je définis successivement: 1° huit *fonctions auxiliaires* par les formules (6) — (13), dans lesquelles $h$ désigne un nombre positif impair, $k$ — un nombre naturel $\leqq \frac{1}{2}(h + 1)$, $\{h_n\}$ — une suite infinie des nombres positifs impairs; 2° pour $p > 2$ et $q$ impair, une *fonction auxiliaire* par la formule (17), dans laquelle $t$ désigne un nombre de $T$; 3° pour $p > 1$ et $q$ impair, six *fonctions fondamentales* par les formules (18), (21) — (24). — Alors la $P$-fonction demandée est donnée par les formules (14) — (16), (25) — (28) dans tous les cas distingués au tableau (2) sauf pour $q$ pair. Dans ce cas soit $P'$ l'ensemble de tous les nombres $x - 1$ où $x$ appartient à $P$. $P'$ est encore un ensemble de nombres naturels contenant au moins trois nombres et satisfaisant à (*). De plus, le nombre $q'$ correspondant est impair. On peut donc construire une $P'$-fonction $\mathrm{f}'(x)$ de la manière ci-dessus. Soit $[a, b]$ l'intervalle de définition de $\mathrm{f}'(x)$ et $m$ resp. $M$ — le minimum resp. maximum de $\mathrm{f}'(x)$. Par une modification légère de $\mathrm{f}'(x)$ on en obtient une fonction $\mathrm{f}'_{P'}(x)$, définie encore dans $[a, b]$ et ayant le minimum $m$ et le maximum $M$, mais qui jouit de la propriété suivante: si $\mathrm{p}(y)$ resp. $\mathrm{p}_{P'}(y)$ signifie le nombre de toutes les solutions en $x$ de l'équation $y = \mathrm{f}'(x)$ resp. $y = \mathrm{f}'_{P'}(x)$ $(m \leqq y \leqq M)$, on a $\mathrm{p}_{P'}(y) = \mathrm{p}(y)$ pour $y > m$, mais $\mathrm{p}_{P'}(m) = \mathrm{p}(m) + 1$. Alors dans le cas restant du $q$ pair la $P$-fonction demandée est donnée par la formule (31).

---

[1]) Je prie le lecteur de vouloir substituer, dans toutes les formules citées, les mots tchèques par les mots français correspondants au moyen du vocabulaire suivant: liché = impair, lineární = linéaire, pro = pour, sudé = pair, v = dans.

[2]) C'est à dire l'ensemble de tous les $x$ pour lesquels $0 \leqq x \leqq 1$.