Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 5, 575--632

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122620

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

8. J II z $15^h 43^m 55^s$ — 16^h *Konjunkce* Saturna s Měsícem.
9. *Min. Algolu* $8^h 6^m$.
10. *Neptun* v kvadratuře se Sluncem.
13. 17^h *Venuše v konjunkci s Jupiterem* (Venuše $0^0 36'$ již.).
14. *Zákryt* 1 Geminorum (vel. 5,0) zač. $18^h 35^m$ k $19^h 31^m$. Slunce vychází v $18^h 22^m$.
20. 7^h *Konjunkce* Jupitera s Měsícem, 21^h *Konjunkce* Venuše s Měsícem.
21. *Zákryt* v Virginis (vel. 4,4) zač. $14^h 31^m$ k. $15^h 28^m$. Měsíc vychází v $15^h 5^m$.
22. 20^h *Konjunkce* Marta s Měsícem.
23. *Min. Algolu* $16^h 11^m$.
24.
25. 5^h *Konjunkce* Merkura s Měsícem.
26. *Min. Algolu* $13^h 00^m$. — J I z $15^h 58^m 18^s$.
27. *Zákryt* β Scorpii (vel. 2,6) zač. $5^h 1^m$. k. $5^h 29^m$. Měsíc zapadá v $6^h 4^m$.
28. 5^h *Merkur* ve spodní konjunkci se Sluncem.
29. *Min. Algolu* $9^h 49^m$.

Úlohy.

Řešení úloh.

a) Z mathematiky. *)

Úloha 1.

Sečísti řadu

$$1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3).$$

F.—P.

Řešení zaslal p. *Fr. Svoboda* ze VI. tř. r. v Jevíčku.

Daná řada

$$S = 24\left[1 + 5 + 15 + \ldots + \frac{1}{24}\, n(n+1)(n+2)(n+3)\right].$$

*) První čtyři úlohy vzaty jsou z bohaté sbírky úloh arithmetických: Exercices d'arithmétique par J. Fitz-Patrick et Georges Chevrel. IIième éd. Paris 1900 (XII + 680).

Součet v závorce hranaté jest součet řady arithm. stupně čtvrtého. Součet ten lze stanoviti řešením 5 lineárných rovnic. Součet řady arithm. 4. stupně o n členech má tvar

$$Sn = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En.$$

Volíme-li $n = 1$, dostáváme

$$A + B + C + D + E = 1,$$
$$32A + 16B + 8C + 4D + 2E = 1 + 7 \text{ (pro } n = 2).$$

Podobným způsobem získáme si ještě ostatní tři rovnice, jichž řešením máme

$$A = \frac{1}{120},\quad B = \frac{1}{12},\quad C = \frac{7}{24},\quad D = \frac{5}{12},\quad E = \frac{1}{5}.$$

Pak součet

$$S = 24\left(\frac{1}{120} n^5 + \frac{1}{12} n^4 + \frac{7}{24} n^3 + \frac{5}{12} n^2 + \frac{1}{5} n\right) = 4!\binom{n+4}{5}$$

Takovýmto způsobem stanovil součet řady arithm. stupně vyššího p. dr. Vladimír Janků v ročníku XXXI. tohoto časopisu.

Poznámka *). Zaslal p. *Aug. Žáček*, filosof.

Tato řada je zvláštním případem řady tohoto tvaru:

$$\begin{aligned} S(a, d, m, n) = {} & (a + d)(a + 2d) \ldots (a + md) \\ & + (a + 2d)(a + 3d) \ldots (a + [m + 1] d) \\ & + \ldots \\ & \quad \vdots \\ & + (a + nd)(a + [n - 1] d) \ldots \\ & \quad \ldots (a + [m + n - 1] d). \end{aligned}$$

Čísla a, d mohou nabýti všech hodnot reálních i komplex., kdežto m, n pouze posit. celistvých (incl. nullu).

Přímo patrna jest správnost identity

$$\begin{aligned} & (a + kd)(a + [k + 1] d) \ldots (a + [m + k] d) \\ = {} & (m + 1) d \,.\, (a + kd)(a + [k + 1] d) \ldots (a + [m + k - 1] d) \\ + {} & (a + [k - 1] d) \,.\, (a + kd) \ldots (a + [m + k - 1] d). \end{aligned}$$

---

*) Způsobem zde obecně provedeným sečtena je naše řada v citované sbírce.

Napišme tyto identity pro $k = 1, 2, \ldots n$:

$$(a+d)(a+2d)\ldots[a+(m+1)d] = \qquad (1)$$
$$= (m+1)d \,.\, (a+d)(a+2d)\ldots(a+md) +$$
$$+ a(a+d)(a+2d)\ldots(a+md),$$
$$(a+2d)(a+3d)\ldots(a+(m+2)d) = \qquad (2)$$
$$= (m+1)d \,.\, (a+2d)(a+3d)\ldots(a+(m+1)d) +$$
$$+ (a+d)(a+2d)\ldots(a+(m+1)d), \ldots$$
$$(a+nd)(a+(n+1)d)\ldots(a+(m+n)d) = \qquad (n)$$
$$= (m+1)d \,.\, (a+nd)\ldots(a+(m+n-1)d)$$
$$+ (a+(n-1)d)(a+nd)\ldots(a+(m+n-1)d).$$

Levá strana k-té identity rovná se druhému členu pravé strany identity $(k+1)$-ní.

Utvoříme-li tedy součet všech n identit, obdržíme po příslušném zrušení

$$(a+nd)(a+[n+1]d)\ldots(a+[m+n]d)$$
$$= (m+1)d \,.\, S(a, d, m, n) + a(a+d)\ldots(a+md).$$

Z toho vychází přímo součet naší řady

$$S(a, d, m, n) =$$
$$\frac{(a+nd)(a+[n+1]d)\ldots(a+[m+n]d) - a(a+d)\ldots(a+md)}{(m+1)d}.$$

Z obecné této formule možno odvoditi součtový vzorec pro řadu arithm.: stačí klásti $m = 1$

$$S(a, d;\, 1, n) = \frac{(a+nd)(a+[n+1]d) - a(a+d)}{2d}$$
$$= \frac{2a+(n+1)d}{2} \,.\, n.$$

Pro $a = 0$, $d = 1$ dostaneme součet řady

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots m + 2\,.\,3\ldots(m+1) + \ldots$$
$$+ n(n+1)\ldots(n+m-1),$$

totiž

$$S(0, 1;\, m, n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m+1}.$$

Ještě další specialisace $m = 4$ vede k řadě předložené.

Úloha 2.

Na obvod trojúhelníka umístiti prvních devět čísel přirozené řady číselné po jednom do každého vrcholu a po dvou na každou stranu, aby součet čtverců čtyř čísel při jedné straně umístěných byl stejný pro všechny tři strany. F.—P.

Řešení zaslal p. *V. Vysoudil* ze VI. tř. r. v Litovli.

Vrcholy trojúhelníka a čísla při nich umístěná buďtež A, B, C; proti vrcholu A leží D, E, proti B leží F, H, proti C leží J, K. Pak dle podmínky

$$B^2 + C^2 + E^2 + D^2 = S$$
$$A^2 + C^2 + F^2 + H^2 = S$$
$$A^2 + B^2 + J^2 + K^2 = S.$$

Sečtením těchto tří rovnic obdržíme

$$3S = A^2 + B^2 + C^2 + 285,$$

čili
$$S = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{3} + 95.$$

Aby výraz $(A^2 + B^2 + C^2)$ byl dělitelný třemi, tu může $A = 3$, $B = 6$, $C = 9$, nebo $A = 1$, $B = 4$, $C = 7$, nebo $A = 2$, $B = 5$, $C = 8$. První dvě hypothesy nevyhovují; zbývá tedy jen třetí. A z té odvodíme:

Při straně	$\overline{AB}$	leží	čísla	9, 4
„	„	$\overline{BC}$	„	„	1, 6
„	„	$\overline{AC}$	„	„	7, 3.

Dosadíme-li do prvních tří rovnic, obdržíme

$$2^2 + 9^2 + 4^2 + 5^2 = 126$$
$$2^2 + 7^2 + 3^2 + 8^2 = 126$$
$$5^2 + 1^2 + 6^2 + 8^2 = 126.$$

Úloha 3.

Ukázati, že čísla tvaru

$$3^{4n+4} - 4^{3n+3}$$

pro celá n jsou dělitelna sedmnácti. F.—P.

Řešení zaslal p. *B. Žabský* ze VII. tř. g. v Praze (Žitná ulice).

$$3^{4n+4} - 4^{3n+3} = (3^4)^{n+1} - (4^3)^{n+1} = 81^{n+1} - 64^{n+1}$$
$$= (81 - 64)(81^n + 81^{n-1} \cdot 64 + \ldots \text{atd.})$$

Číslo $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ dá se tedy rozložiti na dva činitele, z nichž jeden jest $81 - 64 = 17$. Proto jest to číslo dělitelno 17.

Úloha 4.

Odvoditi, že číslo

$$\frac{n^3 + (n+2)^2}{4}$$

jest pro všecka celistvá n celistvé a dokonce složené.

F.—P.

Řešení zaslal p. *B. Machytka* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Poněvadž součet trojmocí dvou veličin je dělitelný jich součtem, možno psáti:

$$\frac{n^3 + (n+2)^3}{4} = \frac{[n + (n+2)] \cdot [n^2 - n(n+2) + (n+2)^2]}{4}$$
$$= \frac{[n+1][n^2 + 2n + 4]}{2}.$$

Avšak výraz tento jest v každém případě (je-li n číslo celé) zkratitelný dvěma, neboť:

je-li n číslo sudé, jest výraz $(n^2 + 2n + 4)$ dělitelný 2ma,
„ „ „ liché, „ „ $(n + 1)$ sudý.

Že výraz jest dokonce složen, plyne z toho, že čitatel se skládá *ze dvou činitelů*, z nichž jeden se nezkrátí. Výjimku činí $n = 0$, kdy náš výraz má hodnotu 2.

Úloha 5.

V trojúhelníku ABC spuštěny z dvou vrcholů B, C kolmice na protější strany b, c; z pat těchto kolmic spuštěny opět kolmice na strany c, b, a konstrukce opakována pak do nekonečna. Kolmice ony omezí řadu stále se zmenšujících rovnoběžníků; ustanoviti jejich součet, dány-li v trojúhelníku základním části a, β, γ.

Uč. *F. Jirsák.*

Řešení zaslal p. *St. Chramosta* ze VI. tř. I. č. reálky v Brně.

Strany rovnoběžníků utvořených z kolmic k straně b nazveme postupně $y_0, y_1, y_2 \ldots$, strany druhé pak $x_0, x_1, x_2 \ldots$ Pak jest

$$\begin{array}{ll} y_0 = a \cos\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha & x_0 = a \,.\, \cos\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \\ y_1 = x_0 \,.\, \cos\alpha & x_1 = y_0 \,.\, \cos\alpha \\ y_2 = x_1 \,.\, \cos\alpha & x_2 = y_1 \,.\, \cos\alpha \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Obsahy rovnoběžníků z daných stran tvoří řadu geom.:

$$\begin{array}{l} O_1 = a^2 \cos\beta \,.\, \operatorname{cotg}^2\alpha \,.\, \cos\gamma \,.\, \sin\alpha \\ O_2 = \quad " \quad " \quad " \quad \cos^2\alpha \\ O_3 = \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \cos^2\alpha \\ \vdots \end{array}$$

Tvoří tedy nekonečnou konverg. řadu geometrickou, jejíž součet

$$S = a^2 \cos\beta \operatorname{cotg}^2\alpha \cos\gamma \sin\alpha \,.\, \frac{1}{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{a^2 \cos\beta \cos\gamma \operatorname{cotg}^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a^2 \cos\beta \cos\gamma}{\operatorname{tg}^2(\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}.$$

V trojúhelníku rovnoramenném pro $\beta = \gamma = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$

$$s = \frac{a^2 \cos^2\beta}{\operatorname{tg}^2 2\beta \sin 2\beta} = \frac{a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\operatorname{cotg}^2\alpha$$

a v rovnostranném

$$s = \frac{a^2}{6.\sqrt{3}} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{18} = \frac{2}{9}\Delta.$$

Úloha 6.

Sestrojiti trojúhelník pravoúhlý, jehož odvěsny procházejí dvěma danými body M, N a přepona dané délky c leží na dané přímce p. Prof. *Archleb.*

Řešení zaslal p. *Miloš Bažant* ze VI. tř. č. reálky v Praze-II.

Rozbor: Na odvěsnách pravoúhlého $\triangle ABC$ zvolme si body M a N. Pak učiňme:

1. $\overline{MP} \parallel AB$, 2. $BP \parallel AM$.

Pak jest

1. $\overline{MP} = c$, 2. $\sphericalangle CBP = \sphericalangle BCA = R$.

Z tohoto také plyne, že $\triangle NBP$ jest pravoúhlý a proto *vrchol B jest na kružnici, jejíž průměr jest* $\overline{NP}$.

Sestrojení: Bodem M sestrojíme si rovnoběžku s přímkou p a naneseme na ni danou délku $\overline{MP} = c$. Nad $\overline{NP}$ jako průměrem opíšeme kružnici, která protne přímku p obecně ve dvou bodech (B a B'), které jsou vrcholy pravoúhlých trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. Řešení je tedy obecně dvojí.

Možnost řešení závisí na existenci průsečíků B, B'.

Četní řešitelé řešili tuto úlohu methodou algebraické analyse; řešení pro nedostatek místa neuveřejňujeme, ač z některých těchto řešení zvláště pěkně vyplývá omezení.

P. M. Kvapil z reálky v Jevíčku poslal pěkné řešení pomocí involučních řad.

Úloha 7.

Sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, je-li dán jeho jeden úhel α a centrála kruhu opsaného a vepsaného. *A. Lochman.*

Řešení zaslala slč. *M. Plocová* z VIII. tř. g. Minervy v Praze.

Sestrojíme libovolný trojúhelník pravoúhlý $A'B'C'$ o daném úhlu α. Centrálu jeho kružnice opsané a vepsané prodloužíme od středu kružnice opsané C_1 přes střed kružnice vepsané S' až $\overline{C_1S}$ rovná se centrále dané. Rovnoběžky bodem S vedené ku $S'A'$ a $S'B'$, protnou $A'B'$ v bodech A, B; rovnoběžky těmito body s $A'C'$ a $B'C'$ položené protnou se ve třetím vrcholu hledaného trojúhelníka ABC. Řešení jest vždy možné, dokud $\alpha < R$.

Úloha 8.

Rozděliti lichoběžník ABCD příčkou rovnoběžnou se základnou v témž poměru, v jakém jej dělí úhlopříčna.

Prof. *A. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *V. Vysoudil* ze VI. tř. reálky v Litovli.

Budiž dán lichoběžník $ABCD$; základny $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $a > b$; žádaná příčka budiž $\overline{EF} = c$; bod E leží na rameni $\overline{AD}$;

veďme $\overline{DG} \parallel CB \parallel EK$. Vzdálenost c od a budiž y a od b budiž x.

Pak $$(a + c) y : (b + c) x = a : b, \tag{1}$$
čili $$(a + c) \, . \, y \, . \, b = (b + c) \, . \, x \, . \, a.$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne
$$(a - c) : y = (c - b) : x,$$
čili $$(c - b) \, . \, y = (a - c) \, . \, x. \tag{2}$$

Dělením rovnice (1) a (2) obdržíme
$$(a^2 - c^2) : (c^2 - b^2) = a : b$$
čili $$(a^2 - b^2) : (c^2 - b^2) = (a + b) : b$$
a z toho dělením $(a + b)$ plyne
$$(a - b) \, b = c^2 - b^2,$$
neboli $$c = \sqrt{ab}.$$

Jest tedy hledaná příčka střední geometrickou úměrnou obou základen lichoběžníka. Tuto snadno sestrojíme.

Úloha 9.

Řešiti soustavu rovnic
$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} = 5$$
$$tg \, (\alpha + \beta) = 2.$$
Vl. r. *V. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *V. Boubal* ze VI. tř. r. v Písku.

Vypočtěme z druhé rovnice $\alpha + \beta = 63^0 26' 6''$ a první pišme ve tvaru
$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = \frac{2}{3},$$
$$\frac{-2 \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}{2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)} = \frac{2}{3},$$
čili $$tg \, (\alpha - \beta) = - \tfrac{2}{3} \, cotg \, (\alpha + \beta),$$
$$tg \, (\beta - \alpha) = \tfrac{1}{3},$$
$$\beta - \alpha = 18^0 26' 6'',$$
$$\alpha + \beta = 63^0 26' 6'',$$
$$\alpha = 22^0 30'; \quad \beta = 40^0 56' 6''$$
(řešení ostrými úhly).

Úloha 10.

V pravoúhlém trojúhelníku svírá tížnice příslušná k přeponě s tížnicí příslušnou k odvěsně úhel 60°; *ustanoviti úhel toho trojúhelníka pravoúhlého.* Uč. *Fr. Jirsák.*

Řešení zaslal p. *Th. Kuča* ze VII. tř. reálky v Brně.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC buď M střed přepony, O průsečík obou tížnic, $x = \sphericalangle OAM$, $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Tu platí $\frac{OM}{CM} = \frac{1}{3}$. Avšak $\overline{CM} = AM$, tedy

$$\frac{OM}{AM} = \frac{1}{3} = \frac{\sin x}{\sin 60^0}.$$

Pak jest v $\triangle AOM$

$$\sin x = \frac{\sin 60^0}{3} = \sin 16^0 46' 43''.$$

Ježto pak

$$\sphericalangle OMA = 180^0 - (x + 60^0) = 180^0 - 2\alpha = 2\beta,$$

jest $$\alpha = \frac{x + 60^0}{2} = 38^0 23' 21{\cdot}5'', \quad \beta = 90^0 - \alpha.$$

Úloha 11.

Na ellipse ustanoviti jest bod, jehož tečna i normála jsou stejně vzdáleny od středu. Řed. *A. Strnad.*

Řešení zaslal p. *Em. Syrový* z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.

Budiž rovnice ellipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a hledaný bod $m(x_1, y_1)$. Pak jsou:

Rovnice příslušné tečny

$$T \equiv b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0.$$

Rovnice příslušné normály

$$N \equiv a^2y_1x - b^2y_1y - e^2x_1y_1 = 0.$$

Jsou tedy vzdálenosti obou přímek od počátku:

$$p_1 = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} \text{ a } p_2 = \frac{e^2x_1y_1}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}.$$

Poněvadž $p_1 = p_2$, jest také

$$e^2 x_1 y_1 = a^2 b^2. \qquad (1)$$

Dále, poněvadž bod $m(x_1, y_1)$ leží na ellipse, platí vztah

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2. \qquad (2)$$

Dosadíme-li z rovnice (1) do rovnice (2) hodnotu $x_1 = \frac{a^2 b^2}{e^2 y_1}$ a upravíme-li, máme rovnici

$$b^4 y_1^4 - e^4 b^2 y^2 + a^2 b^6 = 0,$$

z čehož

$$y_1^2 = \frac{b^2}{2e^2}\left[e^2 \pm \sqrt{e^4 - 4a^2 b^2}\right],$$

a dále použitím vzorce Bhaskarova

$$y_1 = \pm \frac{a}{2e}\left(\sqrt{e^2 + 2ab} \pm \sqrt{e^2 - 2ab}\right),$$

$$x_1 = \pm \frac{b}{2e}\left(\sqrt{e^2 + 2ab} \mp \sqrt{e^2 - 2ab}\right).$$

Poznámka. Úloha dá se řešiti, je-li $a \geqq b\,(1 + \sqrt{2})$. Je-li $a > b\,(1 + \sqrt{2})$, jest bodů daných vlastností 8, v druhém případě 4. Našly by se jako průsečíky hyperboly rovnoosé dané rovnicí (1) s danou ellipsou.

Úloha 12.

Do ellipsy vepsán trojúhelník, jehož těžiště leží ve středu křivky. Kde leží střed kružnice trojúhelníku tomu opsané?

Ph. Dr. *Marian Haas.*

Řešení zaslal p. *Milan Kvapil* ze VII. tř. r. v Jevíčku.

Rovnici ellipsy lze vyjádřiti dvěma rovnicemi

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

při čemž t jest proměnlivý parametr.

Je-li střed ellipsy počátkem souřadnic a $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vrcholy trojúhelníka, jehož těžiště jest ve středu ellipsy, pak platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Dosazujíce hodnoty z těchto rovnic střídavě do vzorce pro plochu Δ trojúhelníka ABC, obdržíme rovnice

$$\frac{2}{3}\Delta = x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y_3 - x_3y_2 = x_3y_1 - x_1y_3.$$

Označíme-li ještě parametry bodů A, B, C t_1, t_2, t_3, můžeme psáti

$$\frac{2}{3}\Delta = ab\,sin\,(t_2 - t_1) = ab\,sin\,(t_3 - t_2) = ab\,sin\,(t_1 - t_3).$$

Tomu vyhovuje

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_1 - t_3 = \pm \frac{4R}{3}. \qquad (1)$$

Pak

$$\frac{2}{3}\Delta = ab\,sin\,\frac{4R}{3},$$

čili

$$\Delta = \frac{3}{4}ab\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Označíme-li dále souřadnice středů kružnic opsaných jednotlivým trojúhelníkům x_0, y_0, pak platí

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2$$
$$= (x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2.$$

Následkem tohoto platí vzhledem k rovnici ellipsy

$$4\Delta\,x_0 = \frac{e^2}{b^2}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$

a

$$4\Delta\,y_0 = \frac{e^2}{a^2}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

Dosazením hodnot v (1) a (2) vypočtených do těchto rovnic dostaneme po upravení

$$x_0 = \frac{e^2}{4a}\cos 3\,t_1,$$

$$y_0 = \frac{e^2}{4b}\sin 3\,t_1.$$

Vyloučením t_1 z těchto rovnic bude

$$\left(\frac{4a\,x_0}{e^2}\right)^2 + \left(\frac{4b\,y_0}{e^2}\right)^2 = 1.$$

Z toho vysvítá, že středy oněch kružnic leží na ellipse, jejíž rovnici jsme právě stanovili.

Úloha 13.

Dokázati, že kružnice opsaná kterémukoli polárnímu trojúhelníku rovnoosé hyperboly prochází též středem křivky.

(*Poznámka. Polárním trojúhelníkem kuželosečky nazývá se trojúhelník, jehož každá strana je polárou protějšího vrcholu vzhledem ku dané kuželosečce.*) *Týž.*

Řešení zaslal p. *B. Pivnička* ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Má-li střed O ležeti na kružnici opsané polárnímu trojúhelníku ABC, musí

$$\sphericalangle BOC = \beta + \gamma = 180^0 - \alpha, \text{ nebo } \sphericalangle BOC = \alpha,$$

což jest dokázati.

Poněvadž AB jest polárou vrcholu C, jest směrnice

$$A_{AB} = \frac{x_3}{y_3}.$$

Podobně jest

$$A_{AC} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Dle toho jest

$$tg\, \alpha = \frac{\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3}}{1 + \frac{x_2 x_3}{y_2 y_3}} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{x_2 x_3 + y_2 y_3}.$$

Dále jest

$$\left.\begin{aligned} A_{OB} &= \frac{y_2}{x_2} \\ A_{OC} &= \frac{y_3}{x_3} \end{aligned}\right\} tg(BOC) = \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3}}{1 + \frac{y_2 y_3}{x_2 x_3}} = \frac{x_3 y_2 - x_2 y_3}{x_2 x_3 + y_2 y_3} = -\, tg\, \alpha.$$

Z toho

$$\sphericalangle BOC = 180^0 - \alpha, \text{ nebo } \alpha,$$

což bylo dokázati.

Úloha 14.

Kolmice postavená v krajním bodě M průměru MP rovnoosé hyperboly na tento průměr protíná hyperbolu v bodě N. Jak velký úhel tvoří průměr MP s reálnou osou hyperboly, je-li $\overline{MN} = \overline{MP}$? VI. r. *V. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *Pavel Milota* ze VII. tř. r. v Plzni.

Rozpolme úsečku $\overline{MN}$ a půlící bod budiž S. Poněvadž $\overline{MP} = \overline{MN}$, tedy $\overline{OM} = \overline{SM}$, kde O jest střed hyperboly. Poněvadž $\triangle MSO$ jest pravoúhlý a rovnoramenný, jest $\sphericalangle MOS = \sphericalangle OSM = \alpha + \beta = 45^0$, kde α jest úhel, jaký svírá PM s reálnou osou hyperboly, a β úhel, jaký svírá oS s touže osou.

Směrnice přímky PM jest $A = tg\,\alpha$ a přímky MS jest $-\frac{1}{A}$. K průměru $\overline{oS}$, jehož směrnice jest $A_1 = tg(180 - \beta)$, sdružený průměr rovnoběžný s $\overline{MN}$ a mezi směrnicemi těchto sdružených průměrů platí: $A_1 \,.\, -\frac{1}{A} = 1$, čili $A_1 = -A$, aneb $tg(180 - \beta) = -tg\,\alpha$, tedy $tg\,\beta = tg\,\alpha$ a proto $\alpha = \beta$. Poněvadž však $\alpha + \beta = 45^0$, tedy $\alpha = 22\frac{1}{2}{}^0$. Proto přímka $\overline{MP}$ s reálnou osou hyperboly svírá úhel $22\frac{1}{2}{}^0$.

Úloha 15.

Řešiti rovnici

$$\sqrt[4]{41 + x} - \sqrt[4]{41 - x} = 2.$$

Prof. *J. Ždímal.*

Řešení zaslal p. *Arn. Dudárek* ze VI. tř. r. v Č. Budějovicích.

Řešiti rovnici

$$\sqrt[4]{41 + x} - \sqrt[4]{41 - x} = 2.$$

Zdvojmocněním dostáváme

$$\sqrt{41 + x} + \sqrt{41 - x} = 2\sqrt[4]{41^2 - x^2} + 4,$$

z toho opětným zdvojmocněním

$$\sqrt{41^2 - x^2} + 8\sqrt[4]{41^2 - x^2} - 33 = 0.$$

Položme

$$\sqrt[4]{41^2 - x^2} = y.$$

Máme pak rovnici

$$y^2 + 8y - 33 = 0;$$

její kořeny jsou

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -11.$$

Z toho buď

$$x_{12} = \pm \sqrt{41^2 - y_1^2} = \pm 40,$$

nebo

$$x_{34} = \pm \sqrt{41^2 - y_1^2} = \pm 36 i \sqrt{10}.$$

Při zkouškách, které z kořenů hoví rovnici v původním tvaru, třeba pamatovati na čtverou hodnotu čtvrté odmocniny.

Úloha 16.

Řešiti rovnici

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = 105.$$ *Týř.*

Řešení zaslal p. *R. Nedvěd* ze VII. reálky v Kladně.

$$(x+2)(x+4)(x+6) = 105.$$

Dosaďme za $x + 3$ neznámou z

$$(z-3)(z-1)(z+1)(z+3) = 105$$
$$(z^2-1)(z^2-9) = 105$$
$$z^4 - 10z^2 - 96 = 0$$
$$z_{1,2}^2 = 16, \quad z_{3,4}^2 = -6$$
$$z_{1,2} = \pm 4, \quad z_{3,4} = \pm i\sqrt{6}.$$

Z rovnice $x + 3 = z$ vypočteme

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -7, \quad x_{3,4} = -3 \pm i\sqrt{6}.$$

Úloha 17.

$$1 + 3\sin x + 6\sin^2 x + 10\sin^3 x + 15\sin^4 x + \ldots \textit{in inf.} = 8.$$ *Týř.*

Řešení zaslal p. *Prokop Bayer* ze VI. tř. reálky v Praze VII.

Obě strany rovnice násobíme $\sin x$

$$\sin x + 3\sin^2 x + 6\sin^3 x + 10\sin^4 x + 15\sin^5 x + \ldots \text{in inf.} = 8\sin x;$$

odečteme od rovnice dané:

$$8(1 - \sin x) = 1 + 2\sin x + 3\sin^2 x + 4\sin^3 x + \ldots \text{in inf.}$$

Opět násobíme na obou stranách $\sin x$

$$8\sin x(1 - \sin x) = \sin x + 2\sin^2 x + 3\sin^3 x + 4\sin^4 x + \ldots \text{in inf.};$$

odečteme:

$$8\,(1 - \sin x)\,[1 - \sin x] = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots \text{ in inf.}$$

$$8\,(1 - \sin x)^2 = \frac{1}{1 - \sin x},$$

$$8 = \frac{1}{(1 - \sin x)^3},$$

$$(1 - \sin x)^3 = \frac{1}{8};$$

při odmocnění respektujeme jen reálné hodnoty. Pak

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = (4n + 1)\,R \pm 60^0.$$

Úloha 18.

Řešiti ostrými úhly soustavu

$$\cos x + \sin y = 1,$$
$$\sin x + \cos y = \sqrt{3}.$$

Týž.

Řešení zaslal p. *Fr. Svoboda* ze VI. tř. reálky v Jevíčku.

Umocněme obě rovnice; tím dostáváme

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin y + \sin^2 y = 1,$$
$$\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y = 3.$$

Sečtením a zjednodušením obou rovnic

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y = 1.$$

Z toho

$$\sin (x + y) = 1.$$

Jsou to tedy dva úhly doplňkové, o nichž platí

$$\cos x = \sin y = \frac{1}{2}.$$

Z toho pak $x = 60^0$ a $y = 30^0$, čímž jest úloha řešena.

Úloha 19.

Které racionálné trojúhelníky pravoúhlé mají obvod číselně rovný plošnému obsahu? Které z nich mají délky stran vyjádřeny čísly celými?

Týž.

Řešení zaslal p. *B. Machytka* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Odvěsny a, b a přepona c pravoúhlého trojúhelníka racionálního dají se vyjádřiti ve tvaru

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

kde m a n jsou čísla kladná.

Dle podmínky musí býti

$$a + b + c = \tfrac{1}{2}\, ab$$
$$m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2 = (m^2 - n^2)\, mn$$
$$2m^2 + 2mn - mn\,(m^2 - n^2) = 0 \ldots$$
$$m\,[2m + 2n - n\,(m^2 - n^2)] = 0$$

m nemůže býti rovno 0, neboť by i $b = 0$, tedy

$$2\,(m + n) - n\,(m^2 - n^2) = 0$$
$$(m + n)\,[2 - n\,(m - n)] = 0 \qquad (m + n) \text{ nemůže býti rovno } 0,$$
$$2 - mn + n^2 = 0 \qquad \text{neboť pak by } a = 0.$$

$$m = \frac{n^2 + 2}{n}\text{; pak ale:}$$

$$a = \frac{n^4 + 4n^2 + 4 - n^4}{n^2} = 4 + \frac{4}{n^2}$$

$$b = 2\,(n^2 + 2)$$

$$c = \frac{n^4 + 4n^2 + 4 + n^4}{n^2} = \frac{2n^4 + 4n^2 + 4}{n^2}$$
$$= 2n^2 + 4 + \frac{4}{n^2}.$$

Dosadíme-li za n libovolnou hodnotu kladnou, obdržíme hodnoty stran. Aby strany byly vyjádřeny celými čísly, musí zlomky $\frac{4}{n^2}$ nabýti hodnoty celých čísel, což se stane jen při $n = 1, 2$; pak jsou strany trojúhelníků pravoúhlých

1. $a = 8, \quad b = 6, \quad c = 10$
2. $a = 5, \quad b = 12, \quad 13$

Žádané trojúhelníky jsou toliko dva.

Úloha 20.

Ustanoviti hodnotu výrazu

$$\Bigg[\bigg[\Big\{\big[(m! + (m+1)!)\,.\,(m+1) + (m+3)!\big]\,(m+3) + (m+5)!\Big\}\,(m+5) + \ldots\bigg]\,(m+2n-1) + (m+2n+1)!\Bigg]\,(m+2n+1).$$

Tý𝔷.

Řešení zaslal p. *Jar. Krejzlík*, ext VI. tř. g. v Plumlově.

Postupným vynásobováním docházíme k výsledku

$$(m! + (m+1)!)\,(m+1) = m!\,(m+1)\,(m+2) = (m+2)!$$
$$[(m+2)! + (m+3)!]\,(m+3) = (m+4)!$$
$$\{(m+4)! + (m+5)!\}\,(m+5) = (m+6)!\ldots$$
$$[(m+2n-2)!\,(m+2n)]\,(m+2n-1) = (m+2n)!$$
$$[(m+2n)! + (m+2n+1)]\,(m+2n+1) = (m+2n+2)!$$

Hodnota daného výrazu je $(m+2n+2)!$

Úloha 21.

Sestrojiti kružnici, které je daný trojúhelník polárným.

J. Pilnáček.

Řešení zaslal p. *A. Dudárek* ze VI. tř. r. v Č. Budějovicích.

Jelikož spojnice pólu se středem kružnice jest kolmá k příslušné poláře, dostaneme střed S hledané kružnice jakožto průsečík výšek daného trojúhelníka ABC. Jsou-li a, b, c poláry příslušné vrcholům A, B, C, tu protne tečna vedená z A poláru a v bodě T, a to tak, že trojúhelník AST jest pravoúhlým nad přeponou AS. Vrchol T dostaneme tedy, opíšeme-li nad délkou AS jakožto průměrem půlkružnici, která a protne v bodě T. Pak ST jest poloměr hledané kružnice. Patrno jest, že daný trojúhelník musí býti tupoúhlý, aby řešení bylo možné. Je-li pravoúhlý, stotožní se hledaná kružnice s vrcholem pravého úhlu. — Střed padne mezi prodloužená ramena tupého úhlu, a poněvadž výšky trojúhelníka se protnou v jednom bodě, máme řešení jen jedno.

Úloha 22.

Dutý kužel rotační, jehož strany svírají s rovinou podstavnou úhel α, naplněn jest vodou; o jaký úhel β nutno jej nakloniti ze základní polohy (se svislou osou), aby v něm zbylo $\frac{m}{n}$ původního množství vody?

Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení zaslal p. *M. Trna* z VIII. tř. g. v Olomouci.

Nakloníme-li kužel daného tvaru, jenž jest naplněn množstvím vody $V = \frac{\pi r^3}{3} tg\, \alpha$, o jakýsi úhel β, bude zbytek vody $V' = \frac{E v_1}{3}$, kdež E jest plocha ellipsovitého povrchu zbylé vody a $v_1 = r \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$ vzdálenost jeho od vrcholu kužele. Je-li pak v_2 vzdálenost středu oné ellipsy (a, b) od základny původního kužele, ϱ poloměr kruhového řezu v téže vzdálenosti vedeného a d vzdálenost malé osy (ta jest patrně tětivou tohoto kruhového řezu) od středu jeho, vypočteme:

dle věty sinusové

$$a = r \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

pak

$$v_2 = a \sin \beta = r \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

dále z úměry

$$r : \varrho = v : (v - v_2)$$

po dosazení

$$\varrho = r \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

potom

$$d = r - a \cos \beta = r \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

a konečně

$$b = \sqrt{\varrho^2 - d^2} = r \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

Dle znění úlohy má býti:

$$\frac{V'}{V} = \frac{abv_1}{r^3 \, tg \, \alpha} = \frac{m}{n},$$

z čehož po dosazení a úpravě (přihlížejíce pouze k jedné hodnotě β) dostaneme rovnici

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \alpha)} = \sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}},$$

z níž jednoduchým řešením vypočteme

$$tg \, \beta = \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{m^2}} \, tg \, \alpha.$$

Úloha 23.

Ustanoviti sférický poloměr kružnice vepsané do sférického trojúhelníka o daných stranách a, b, c. Prof. *Ždímal.*

Řešení zaslal p. *F. Baňovský* ze VII. tř. r. v Praze-III.

Na ploše kulové mysleme si sférický trojúhelník ABC. Kružnice jemu vepsaná dotýká se stran jeho a, b, c v bodech D, E, F. Pak platí jako v rovinné geometrii:

$$\begin{aligned} AE &= AF = x, & x + y &= c, \\ BF &= BD = y, & y + z &= a, \\ CD &= CE = z, & z + x &= b, \end{aligned}$$

z čehož plyne, že

$$x = \frac{1}{2}(-a + b + c) = s - a,$$

$$y = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b,$$

$$z = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c,$$

Mimo to v pravoúhlém trojúhelníku AOF

$$tg \frac{\alpha}{2} = tg \, \varrho : \sin x,$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = tg \, \varrho : \sin(s - a),$$

odtud plyne, že

$$tg\,\varrho = tg\,\frac{\alpha}{2}\,.\,sin\,(s - a),$$

$tg\,\frac{\alpha}{2}$ rovná se, jak ze sférické trigonometrie známo,

$$\sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s\,sin\,(s-a)}}.$$

Dosaďme i bude

$$tg\,\varrho = \sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)\,sin\,(s-a)}{sin\,s}}.$$

Úloha 24.

Ustanoviti sférický poloměr kružnice opsané trojúhelníku sférickému daných úhlů α, β, γ. Tý-ž.

Řešení zaslal p. *F. Baňovský* ze VII. tř. r. v Praze-III.

Podobně jako v úloze předcházející, mysleme si na ploše kulové libovolný, sférický trojúhelník *ABC*.

Je-li r poloměr kružnice opsané trojúhelníku *ABC*, *M* její střed, a leží-li střed tento uvnitř trojúhelníka daného, bude patrně

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \zeta,$$
$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = \xi,$$
$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = \eta,$$

mimo to

$$\xi + \eta = \gamma$$
$$\eta + \zeta = \alpha$$
$$\zeta + \xi = \beta, \text{ je-li } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \sigma,$$

tedy

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = \sigma - \alpha$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) = \sigma - \beta$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) = \sigma - \gamma.$$

Leží-li střed kružnice vně trojúhelníka *ABC*, obdržíme pro jednotlivé úhly ξ, η, ζ hodnoty s opačnými znaménky $-(\sigma - \alpha)$, $-(\sigma - \beta)$ nebo $-(\sigma - \gamma)$. Spustíme-li ze středu *M* kolmici *MN* na stranu *BC*, obdržíme pravoúhlý trojúhelník

BMN, ve kterém

$$\cos \sphericalangle NBM = tg \frac{a}{2} : tg\, r, \text{ t. j.}$$

$$cotg\, r = cotg \frac{a}{2} \cdot \cos \xi$$

$$cotg\, r = cotg \frac{a}{2} \cdot \cos (\sigma - \alpha).$$

Jak ze sfér. trigonometrie známo,

$$cotg \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}};$$

dosaďme do výrazu pro $cotg\, r$, i bude

$$cotg\, r = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma) \cos (\sigma - \alpha)}{-\cos \sigma}},$$

$$cotg\, r = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}}.$$

Úloha 25.

Které je geometrické místo středů kružnic, jež z bodů $M_1 (1, 0)$ *a* $M_2 (-1, 0)$ *jsou viditelny v zorných úhlech* 2α, 2β (*zvláště pro* $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$). *Tý*.

Řešení zaslal p. *K. Altmann* ze VI. tř. r. v Přerově.

Střed žádané kružnice budiž $S(x, y)$ a poloměr její r. Pak platí:

$$r = \overline{M_1 S} \cdot \sin \alpha,$$
$$r = \overline{M_2 S} \cdot \sin \beta.$$

Dále jest:

$$\overline{M_1 S} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$
$$\overline{M_2 S} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2},$$
$$\sin^2 \alpha \, [(x - 1)^2 + y^2] = \sin^2 \beta \, [(x + 1)^2 + y^2]$$
$$x^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) - 2x (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta +$$
$$+ y^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) = 0$$

a úpravou:

$$x^2 + y^2 - 2x \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} + 1 = 0,$$

což jest rovnice kružnice, jejíž střed leží na ose x.

Pro daný případ jest rovnice geom. místa:

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0, \quad S(2, 0), \quad r = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Úloha 26.

Nalézti rovnici geometrického místa pólů příslušných normálám paraboly. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Václav Budil* ze VII. tř. r. v Kutné Hoře.

Rovnice paraboly jest $y^2 = 2px$
Polára . . . $y_0 y = p(x + x_0)$.
Tečna (v bodě T_1) . . . $yy_1 = p(x + x_2)$.
Jelikož normála je polárou, pól musí ležeti na tečně.

Směrnice tečny: $\dfrac{p}{y_1}$

„ normály: $-\dfrac{y_1}{p}$

„ poláry: $\dfrac{p}{y_0}$

$$\frac{p}{y_0} = -\frac{y_1}{p}. \tag{I}$$

Vyjádříme si souřadnice dotyčného bodu $T_1(x_1, y_1)$ pomocí x_0, y_0:

$$y_1 y_0 = p(x_0 + x_1)$$
$$y_1^2 = 2px_1$$
$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$$
$$y_1 y_0 = p\left(x_0 + \frac{y_1^2}{2p}\right)$$
$$2y_1 p y_0 = 2p^2 x_0 + p y_1^2$$
$$y_1^2 - 2y_1 y_0 + 2px_0 = 0,$$
$$y_1 = + y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}.$$

Z rovnice (I): $-p^2 = y_0 y_1$

$$y_0 \left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}\right) = -p^2,$$
$$y_0^2 (y_0^2 - 2px_0) = p^4 + 2p^2 y_0^2 + y_0^4$$
$$2y_0^2 (p + x_0) + p^3 = 0.$$

Vynecháme-li indexy, máme rovnici hledaného geom. místa:

$$2y^2(p+x)+p^3=0.$$

Rozbor:

$$y^2=-\frac{p^3}{2(p+x)},\quad y_{12}=\pm\sqrt{-\frac{p^3}{2(p+x)}};$$

křivka je symmetrická dle Y.

Pro $x=0$ jest $y_{12}=\pm\frac{pi}{\sqrt{2}}$.

Křivka ona osu Y neprotíná.

Pro $y=0$ jest $x=-\infty$.

Osa X přetíná onu křivku v nekonečnu a je zároveň asymptotou její.

Úloha 27.

Nalézti geometrické místo bodů, jejichž poláry dle kružnice $x^2+y^2=r^2$ a dle paraboly $y^2=2px$ jsou k sobě kolmy.

Týž.

Řešení zaslal p. *Josef Pošva* ze VII. tř. r. v Pardubicích.

Libovolný bod hledaného geom. místa mějž souřadnice

$$m(x_0, y_0).$$

Pak jeho polára dle kružnice má rovnici

$$P\equiv x_0x+y_0y=r^2$$

a polára jeho dle paraboly

$$P'\equiv y_0y=px+px_0.$$

Mají-li obě poláry býti k sobě kolmé, musí se součin jich směrnic rovnati -1.

$$A\,.\,A'=-1$$

čili

$$\frac{x_0}{y_0}=\frac{y_0}{p}$$

a upravením rovnice

$$y_0^2=px_0.$$

Jelikož bod m byl volen libovolně, platí vyvozená relace obecně

$$y^2=px.$$

Geometrické místo jest tedy parabola, jejíž parametr p' rovná se polovičnímu parametru p.

Úloha 28.

V srpnovém sešitu čas. The Messenger of Mathematics uveřejňuje Mr. Baxter tuto přibližnou konstrukci kruhu majícího týž obsah jako daný čtverec:

Buď dán čtverec $ABCD$ se středy stran E, F, G, H a průsečíkem úhlopříčen X; zobrazme obdélník $KLOP$, tak aby $KL = EF$, $LO = 2 . EF$. Rozpolme pak OL, PK body M, N. Opišme pak následující kružnice:

1) *střed O, poloměr OL; protne KP v R; spojí se RO, RL;*
2) „ R, „ RL; „ KM v S; „ „ RS;
3) „ N, „ KS; „ LK v T.

Pak učiníme $KU = 2 . KT$.

Na to prodloužíme DA, až $HY = KU$; spojíme YX, jež protne AB v J. Pak jest XJ přibližně hledaný poloměr.

Vyhledati chybu konstrukce.

Řešení zaslal p. *Č. Nechvíle* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Jak patrno, jest $\sphericalangle RLK = 15^0$, $\sphericalangle RKS = 45^0$.

Nejdůležitější veličina jest $\overline{KT}$, již můžeme vypočítati z pravoúhlého trojúhelníka KTN; $\overline{KN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, nazveme-li $\overline{AB} = a$.

1. Stanovíme délku $\overline{NT} = \overline{KS}$ z trojúhelníka kosoúhlého RKS; v něm známe $\sphericalangle RKS = 45^0$,

$$\overline{RK} = \overline{KL}\, tg\, 15^0 = \overline{KL}\,(2 - \sqrt{3})$$

$$\overline{RS} = \overline{RL} = \frac{\overline{KL}}{\cos 15^0} = \frac{4\,\overline{KL}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \qquad \overline{RS} = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}.$$

2. Úhel $RKS = \omega$ můžeme stanoviti poučkou sinovou:

$$\overline{RK} : \overline{RS} = \sin \omega : \sin 45^0$$

$$\sin \omega = \frac{\overline{RK}\sqrt{2}}{\overline{RS}\, 2} = \frac{\overline{KL}\,(2 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{8\,\overline{KL} : (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3}+1)\,2}{8}$$

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \qquad \cos \omega = \frac{1}{4}\sqrt{2\,(6 + \sqrt{3})}.$$

3. Úhel $\sphericalangle NRS = \varphi = (\omega + 45^0)$ stanovíme

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{2(6+\sqrt{3})}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{6+\sqrt{3}}}{8}.$$

4. Vypočteme KS dle sin. poučky:

$$\overline{KS} : \overline{RS} = \sin\varphi : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{KS} = \frac{a}{8}(8 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{(6+\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})})$$

po úpravě

$$\overline{NT} = \overline{KS} = \frac{a}{2}[2 - \sqrt{3} + \sqrt{9-4\sqrt{3}}].$$

5. Z pravoúhlého trojúhelníka KTN vypočteme KT:

$$\overline{KT}^2 = \overline{NT}^2 - \overline{KN}^2,$$

$$\overline{KT}^2 = \frac{a^2}{4}[14 - 8\sqrt{3} + 2(2-\sqrt{3})\sqrt{9-4\sqrt{3}}] - \frac{a^2}{2},$$

čili po úpravě

$$\overline{KT}^2 = \frac{a^2}{2}(2-\sqrt{3})[(2-\sqrt{3}) + \sqrt{9-4\sqrt{3}}].$$

A tedy

$$\overline{KN}^2 = 4\overline{KT}^2 = 2a^2(2-\sqrt{3})[2-\sqrt{3}+\sqrt{9-4\sqrt{3}}] = \overline{HY}^2.$$

Dále platí: $HY : HA = XY : XJ$

a tedy též $\overline{HY}^2 : \overline{HA}^2 = \overline{XY}^2 : \overline{XJ}^2$

známe pak $\overline{HY}^2$, $\overline{AH}^2$ a vypočteme $\overline{XY}^2$ z pravoúhlého trojúhelníka HXY:

$$\overline{XY}^2 = 2a^2(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}+\sqrt{9-4\sqrt{3}}) + \frac{a^2}{4}.$$

K vůli zjednodušení pišme

$$(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}+\sqrt{9-4\sqrt{3}}) \equiv M$$

$$\overline{XY}^2 = 2a^2M + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(8M+1)}{4}.$$

Dosaďme nyní do hořejší úměry:

$$\overline{HY}^2 : \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(8M+1)}{4} : r^2,$$

$$\overline{HY}^2 = 2a^2M,$$

$$2a^2M : \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(8M+1)}{4} : r^2$$

$$r^2 = a^2 \frac{8M+1}{32M} = a^2 \cdot \frac{1820236900}{5718447600}.$$

Vyjádříme-li desetinným zlomkem, nabýváme

$$r^2 = a^2 \,.\, 0\text{·}318309623.$$

Přesně má býti

$$r^2 = \frac{a^2}{\pi} = 0\text{·}3183098861 \,.\, a^2.$$

Obsah kruhu z hořejší hodnoty

$$\pi r^2 = 0\text{·}9999992a^2.$$

Je tedy rozdíl

$$\pi r^2 - a^2 \doteq - 0\text{·}00000008a^2.$$

Úloha 29.

Jest odvoditi vztah

$$tg\,\frac{\varepsilon}{2} = + \sqrt{\frac{sin\,(\lambda - \alpha)}{sin\,(\lambda + \alpha)} \cdot \frac{tg\,\frac{\delta - \beta}{2}}{tg\,\frac{\delta + \beta}{2}}},$$

v němž značí α rektascensi, δ deklinaci, λ astronomickou délku, β astr. šířku hvězdy a ε sklon ekliptiky k nebeskému rovníku.

Dr. *Jiří Kaván.*

Řešení zaslal p. *Frant. Kutnohorský*, priv. VII. tř. reálky v Nové Říši.

Uvedené souřadnice jeví se ve sfér. trojúhelníku kosoúhlém (všeob.), jehož vrcholy jsou sev. pól rovníku P, sev. pól ekliptiky E a hvězda H; strany: $c = \widehat{PE} = \varepsilon$, $b = \widehat{PH} = 90 - \delta$, $a = \widehat{HE} = 90 - \beta$; a úhly: α' (zavedeno k vůli rozlišení s rektascensí) $= 90 + \alpha$ $(\alpha < 90^0)$, $\beta = 90^0 - \lambda$ $(\lambda < 90^0)$.

Dle známých rovnic Neper-ových platí

$$1.\ tg\frac{a+b}{2}\cos\frac{\alpha'+\beta'}{2}=\cos\frac{\alpha'-\beta'}{2}\,tg\frac{c}{2},$$

$$2.\ tg\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha'+\beta'}{2}=\sin\frac{\alpha'-\beta'}{2}\,tg\,c$$

$$tg\frac{c}{2}=\pm\sqrt{tg\frac{a+b}{2}\cdot tg\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha'+\beta')}{\sin(\alpha'-\beta')}},$$

kdež však pro náš případ

$$1.\ \frac{c}{2}=\frac{\varepsilon}{2}; \qquad 2.\ \frac{a+b}{2}=90-\frac{\beta+\delta}{\alpha};$$

$$3.\ \frac{a-b}{2}=\frac{\delta-\beta}{2}; \qquad 4.\ \alpha'+\beta'=180^0-(\lambda-\alpha);$$

$$5.\ \alpha'-\beta'=\alpha+\lambda,$$

a ježto $\varepsilon < 90^0$, tedy po dosazení

$$tg\frac{\varepsilon}{2}=+\sqrt{cotg\frac{\delta+\beta}{2}\cdot tg\frac{\delta-\beta}{2}\cdot\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)}},$$

čili

$$tg\frac{\varepsilon}{2}=+\sqrt{\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)}\cdot\frac{tg\frac{\delta-\beta}{2}}{tg\frac{\delta+\beta}{2}}}\quad \text{q. e. d.}$$

Úloha 30.

Sestrojiti obdélník z obou příček, které spojují vrchol obdélníka se středy protilehlých stran. Prof. *Jiří Archleb.*

I. řešení zaslal p. *Fr. Špičák* ze VII. tř. r. v Prostějově.

Rozbor: Abychom sestrojili hledaný obdélník $ABCD$, sestrojme trojúhelník pravoúhlý ABC, v němž známe dvě těžnice, příslušné k jeho odvěsnám. Tyto těžnice jsou dané příčky. Ať půlící bod strany AB je F, strany BC pak E; průsečík těžnic AE, CF buď K. Prodlužme AE tak, až $AJ = 2AE$; potom $CJ = AB$. Úhel $ABC = BCJ$.

Sestrojení. Opišme poloměrem $\frac{2}{3}CF$ z bodu K oblouk l, potom nad JE jako průměrem polokružnici k.

Průsečík oblouků k a l, bod C, je hledaný vrchol; odtud již snadno doplníme $\triangle ABC$ a potom obdélník $ABCD$.

II. řešení zaslal p. *Fr. Špičák* ze VII. tř. r. v Prostějově.

Rozbor: Buďtež vrcholy hledaného obdélníka označeny písmeny $ABCD$. Půlící body stran AB, AD buďtež E, F.

V trojúhelníku CFE stojí dvě těžnice na sobě kolmo.

Půlící body stran FC, CE buďte E', F'.

Rovnoběžka bodem E' s FF' protne stranu EC trojúhelníka FEC v bodě H. Tedy $CH = HF' = \frac{F'E}{2} = \frac{EC}{4}$.

Sestrojení: Sestrojme trojúhelník pravoúhlý $FE'H$. Opišme nad $EH = \frac{3}{4} EC$ kružnici k; na této kružnici nachází se vrchol pravého úhlu. Průsečíkem kružnice středu C a poloměru $\frac{FC}{2}$ s kružnicí k obdržíme hledaný vrchol E'; odtud již snadno nalezneme strany žádaného obdélníka. —

Vedle způsobů otištěných došla řešení pomocí algebr. analyse a jiná ryze geometrická, jež však z nedostatku místa neuveřejňujeme.

Úloha 31.

Body a_1, b_1 stanoviti jest kružnici K_1, a body a_2, b_2 kružnici K_2 tak, aby chordálou obou daných kružnic byla přímka P. Ředitel *A. Strnad.*

Řešení I. zaslal p. *B. Pivnička* ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Středy s_1, s_2 hledaných kružnic leží na symetrálách S_1, S_2 úseček $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$. Stanovme průsečík m prodloužené úsečky $\overline{a_2 b_2}$ s P. Tečny vedené z bodu m k oběma kružnicím musí býti stejně dlouhé. Sestrojme tedy délku tečny t ke kružnici K_2 jako střední geom. úměrnou délek $\overline{ma_2}$, $\overline{mb_2}$. Spojme $\overline{ma_1}$, prodlužme a stanovme bod b'_1 z podmínky, že $t = \sqrt{\overline{ma_1}, \overline{mb'_1}}$.

Střed s_1 je průsečík symetrály S'_1 úsečky $\overline{a_1 b'_1}$ s S_1. Střed s_2 jest na kolmici vedené z s_1 k P a na S_2.

Řešení II. zaslal p. *K. Altmann* ze VII. tř. r. v Přerově.

Body $a_1 b_1 a_2$ určují kružnici L_1, jejíž střed jest o_1. Chordály kružnic K_1, K_2, L_1 protínají se v bodě c, průsečíku to přímky P se spojnicí $\overline{a_1 b_1}$. Jelikož $\overline{a_2 c}$ jest chordála kružnic $K_2 L_1$, jest $s_2 o_1 \perp a_2 c$, značí-li s_1, s_2 středy kružnic K_1, K_2.

Obdobně jest

$$o_2 \text{ střed kružnice } L_2 \equiv a_1 b_1 b_2$$
$$s_2 o_2 \perp b_2 c$$
$$o_3 \text{ střed kružnice } L_3 \equiv a_1 a_1 b_2$$
$$\delta_1 o_3 \perp a_1 d$$
$$o_4 \text{ střed kružnice } L_4 \equiv b_1 a_2 b_2$$
$$s_1 o_4 \perp b_1 d.$$

Úloha 32.

Úlohu 31. řešiti analyticky, dáno-li $a_1(4, 6)$, $b_1(7, -3)$, $a_2(-4, 4)$, $b_2(-5, -1)$, $P \equiv x = 0$ *Tý.*

Řešení zaslal p. *J. Jarůšek* ze VII. tř. g. v Benešově.

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + s = 0$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + px + qy + t = 0.$$

Chordála $K_1 - K_2 \equiv (m-p)x + (n-q)y + s - t = 0$ sjednocuje se s osou $Y \equiv x = 0$, je-li

$$n - q = 0, \quad s - t = 0.$$

Užitím souřadnic daných bodů obdržíme rovnice

$$4m + 6n + s = -52$$
$$7m - 3n + s = -58$$
$$-4p + 4n + s = -32$$
$$-5p - n + s = -26,$$

z nichž ustanovíme

$$m = -8, \quad n = -2, \quad p = 4, \quad s = -8,$$
$$K_1 \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 - 25 = 0$$
$$K_2 \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 - 13 = 0.$$

Úloha 33.

Na parabole $y^2 = 2px$ dány body m_1, m_2 pořadnicemi y_1, y_2; jest jimi vésti rovnoběžné tětivy $m_1 n_1 \parallel m_2 n_2$ tak, aby lichoběžník $m_1 n_1 n_2 m_2$ měl daný obsah L. Předpokládá se $y_2 > y_1 > 0$. Příklad:

$$y^2 = 12x, \; y_1 = 6, \; y_2 = 12, \; L = 288.$$ *Tý.*

Řešení zaslal p. *M. Trna* z VIII. tř. g. v Olomouci.

Jsou-li y'_1, y'_2 souřadnice bodů n_1, n_2, jest

$$y_1 + y'_1 = y_2 + y'_2 = \frac{2p}{A}$$

$$A = \text{směrnice } \overline{m_1 n_1} = tg\ \alpha$$

$$\overline{m_1 n_1} = \frac{(y_1 - y'_1)}{sin\ \alpha} = \frac{2(Ay_1 - p)\sqrt{1+A^2}}{A^2} \qquad \overline{m_2 n_2} = \frac{y_2 - y'_2}{sin\ \alpha} = \frac{2(Ay_2 - p)\sqrt{1+A^2}}{A^2}$$

$$u = \frac{x_2 + x'_2}{2} - \frac{x_1 + x'_1}{2} = \frac{y_2^2 + y'^2_2 - y_1^2 - y'^2_1}{4p}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{2pA}[A(y_2 + y_1) - 2p], \quad v = n\ sin\ \alpha$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2[A(y_2 + y_1) - 2p]\sqrt{1+A^2}}{A^2} \times \frac{(y_2 - y_1)[A(y_2 + y_1) - 2p] \cdot A}{2pA \cdot \sqrt{1+A^2}}$$

$$L = \frac{y_2 - y_1}{2A^2 p}[A(y_1 + y_2) - 2p]^2.$$

Odtud plyne pro A kvadratická rovnice.

Náleží-li k tětivě $\overline{m_1 m_2}$ dle osy X současně tětiva $k_1 k_2$ a je-li obsah lichoběžníka $m_1 k_1 k_2 m_2 = L_0$, jest

$$L_0 = \frac{(y_2 + y_1)^2 (y_2 - y_1)}{2p}.$$

Je-li pak A_0 směrnice tětivy $m_1 m_2$, jest

$$A_0 = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Lze tedy psáti:

$$L = \left(\frac{A - A_0}{A}\right)^2 . L$$

čili

$$(L_0 - L) A^2 - 2A_0 L_0 A + A_0^2 L_0^2 = 0,$$

z čehož

$$\frac{A_0}{A} = 1 \pm \sqrt{\frac{L}{L_0}}.$$

V daném číselném příkladě jest

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad L_0 = 162,$$
$$7A^2 + 12A - 4 = 0,$$
$$A_1 = \frac{2}{7}, \quad A_2 = -2.$$

Při hodnotě A_1 jsou body n_1 (108, 36), n_2(75, 30);
při „ A_2 „ „ n_1 (12, — 12), n_2(27, — 18).

Úloha 34.

Které jest geometrické místo průsečíku úhlopříček v lichoběžníku $m_1 n_1 n_2 m_2$ úlohy předešlé, jsou-li body m_1, m_2 na parabole stálými. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Fr. Kutnohorský*, priv. st. reál. v Nové Říši.

Souřadnice vrcholů lichoběžníka jsou:

$$m_1\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right), \quad m_2\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$$
$$n_1\left(\frac{(2p - Ay_1)^2}{2pA^2}, \frac{2p - Ay_1}{A}\right), \quad n_2\left(\frac{(2p - Ay_2)^2}{2pA^2}, \frac{2p - Ay_2}{A}\right).$$

Jest tedy rovnice úhlopříčky $\overline{m_1 n_2}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1 \\ \frac{(2p - Ay_2)^2}{2pA^2}, & \frac{2p - Ay_2}{A} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} 2px & y & 1 \\ y_1^2 & y_1 & 1 \\ (2p - Ay_2)^2, & A(2p - Ay_2) & A^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyvineme-li a zkrátíme činitelem $A(y_1 + y_2) - 2p$, nabudeme rovnice úhlopříčky $\overline{m_1 n_2}$ v podobě

$$[2px + (y_2 - y_1)\, y - y_1 y_2]\, A + 2p\,(y_1 - y) = 0.$$

Záměnou souřadnic y_1, y_2 obdržíme rovnici úhlopříčky $m_2 n_1$:

$$[2px - (y_2 - y_1)\, y - y_1 y_2]\, A + 2p\,(y_2 - y) = 0.$$

Vyloučíme-li z rovnic obou přímek proměnnou směrnici A, dospějeme k rovnici hledaného místa geometrického:

$$\begin{vmatrix} 2px + (y_2 - y_1)\,y - y_1y_2, & y_1 - y \\ 2px - (y_2 - y_1)\,y - y_1y_2, & y_2 - y \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$2y^2 = 2px + (y_1 + y_2)\,y - y_1y_2.$$

Geometrické místo průsečíku úhlopříček jest tedy *parabola*, procházející body m_1, m_2; parametr její jest $\frac{p}{2}$, rovnice osy

$$4y = y_1 + y_2.$$

Úloha 35.

Jest vypočítati parametr paraboly určené vrcholy lichoběžníka, jehož půdice jsou $a = 19$, $b = 13$ *a ramena* $c = 3\sqrt{7}$, $d = 3\sqrt{3}$. *Týž.*

Řešení zaslal p. *Fr. Dvořák* ze VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.

Rovnice paraboly v soustavě kosoúhlé, jejímiž osami jsou $X \equiv$ spojnice středů obou základen a $Y \equiv$ tečna k parabole v průsečíku osy X s parabolou, jest

$$y^2 = 2p_1x, \quad p = p_1 \sin^2 \omega$$

$$\frac{a^2}{4} = 2p_1\,(u + t)$$

$$\frac{b^2}{4} = 2p_1\,u$$

$$\frac{a^2 - b^2}{4} = 2p_1\,t$$

$$p_1 = \frac{a^2 - b^2}{8t}$$

$$p = \frac{(a^2 - b^2)\,v^2}{8t^3}. \qquad (1)$$

Při daných hodnotách jest

$$\triangle\, adf = \varDelta = \frac{9}{4}\sqrt{(4\sqrt{7} + 8)\,(4\sqrt{7} - 8)}$$

(dle vzorce Heronova), čili

$$\Delta = \frac{9}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$v = \frac{\Delta}{\frac{a-b}{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + t^2 + (a-b)\,t\,cos\,\omega$$

$$d^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + t^2 - (a-b)\,t\,cos\,\omega$$

$$c^2 + d^2 = \frac{(a-b)^2}{2} + 2t^2$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+d^2) - (a-b)^2} \qquad (2)$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10 - 36} = 6,$$

$$p = \frac{32 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 3}{8 \cdot 216} = 3.$$

Úloha 36.

Bodem** p **vésti přímku, jež ellipsu danou osami protíná v bodech** a, b **tak, že body** a, b **určeny jsou dva sdružené průměry ellipsy. *Tý ř.*

Řešení zaslal p. *B. Kořínek* ze VI. tř. r. v Olomouci.

Sestrojme k ellipse dané osami $\overline{cd}$ a $\overline{ef}$ kružnici affinní tak, aby osa affinity procházela bodem p a byla rovnoběžná s hlavní osou ellipsy $\overline{ef}$; směr affinity kolmý k ose. Sdružené průměry ellipsy budou odpovídati průměrům affinní kružnice na sobě kolmým. Veďme tedy bodem p přímky M' a N' tak, aby body ve kterých protnou kružnici, stanovily dvojiny na sobě kolmých průměrů. Budou to tečny k soustředné kružnici poloměru $\frac{r}{2}\sqrt{2}$. Odvozením pak průsečných bodů na ellipsu a spojením s bodem p obdržíme hledané přímky M, N. Z uvedeného vyplývá, že bod p, aby řešení bylo realné, musí býti vně ellipsy, k dané ell. soustředné a podobné, o osách $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $\frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Vedle tohoto grafického řešení došla řešení methodou analyt. geometrie.

Úloha 37.

Vyšetřiti povrch i obsah tělesa, jež povstává při vzájemném proniku dvou rotačních dvojkuželů, které vzniknou otáčením čtverce kolem každé z jeho úhlopříčen. *L. Č.*

Řešení zaslal p. *Boh. Pivnička* ze VII. tř. reálky na Král. Vinohradech.

Těleso sestrojeno řešením 4. úlohy deskriptivní. Je-li p plášť části kužele obsažené mezi základnou a parabolickým řezem, jest povrch celého tělesa

$$P = 8p.$$

Promítneme-li plášť p do roviny podstavné, jest

$$p = \frac{p_1}{\cos 45^0} = p_1\sqrt{2}$$

$$p_1 = \frac{z}{2} - U_1 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{4}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2}{12}(3\pi - 4).$$

Potom jest

$$p = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}(3\pi - 4)$$

a

$$P = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}(3\pi - 4).$$

Je-li K obsah dvojkužele a k obsah kužele o parabolické základně, jest obsah celého tělesa

$$O = 2(K - 4k),$$

$$K = \frac{2}{3}\pi\frac{a^2}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6},$$

$$k = \frac{4}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18},$$

$$O = \left[\frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{18} - \frac{4a^3\sqrt{2}}{18}\right] = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}(3\pi - 4).$$

Povrch jádra (tělesa společného oběma dvojkuželům) najdeme takto: Je-li Π povrch dvojkužele, jest povrch jádra

$$P_1 = 2\,(\Pi - 4p),$$

$$\Pi = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}\, a = \pi a^2 \sqrt{2}, \quad p = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}\,(3\pi - 4),$$

$$O_1 = 2\,\frac{3\pi a^2\sqrt{2} - 3\pi a^2\sqrt{2} + 4a^2\sqrt{2}}{3} = \frac{8a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Obsah jádra

$$O_1 = 8k = \frac{4a^3\sqrt{2}}{9}.$$

b) **Z deskriptivní geometrie.**

Úloha 1.

Z jednoho daného orthogonálného průmětu pravoúhlého rovnoběžnostěnu odvoditi druhý. *L. Č.*

Řešení zaslal p. *V. Budil* ze VII. tř. r. v Kutné Hoře.

V orthogonálním průmětu pravoúhlého rovnoběžnostěnu všimněme si průmětu jedné stěny $a_1b_1c_1d_1$ a průmětu hrany k ní kolmé a_1e_1. Jelikož hrana kolmá k rovině má průmět kolmý k průmětu přímek roviny, jež jsou s průmětnou rovnoběžny (hlavních přímek), lze vésti přímku $H_1 \perp a_1e_1$; ta protíná $\overline{c_1b_1}$ a $\overline{c_1d_1}$ v bodech k_1 a l_1, při čemž $\overline{kl} = \overline{k_1l_1}$. Otočíme kolem této přímky rovnoběžník do polohy rovnob. s průmětnou; otočený bod c najdeme jako průsečík kolmice vedené z c_1 na H_1 s polokružnicí nad průměrem $\overline{k_1l_1}$. Na spojnicích ck_1, cl_1 leží body b, d. K bodům b, c, d najdeme i bod a na základě affinity obrazce $a_1b_1c_1d_1$ s obrazcem $abcd$ při ose affinity H_1 a paprscích sdružených vrcholů kolmých k H_1. Z pravé délky ab jako přepony a průmětu a_1b_1 jako jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníka najdeme $z_b - z_a$ jako druhou odvěsnu. Poněvadž z_a lze voliti, vychází nám z_b. Podobně určíme k témuž z_a příslušné z_c a z_e; tím však druhý průmět rovnoběžnostěnu je určen.

Je hodno povšimnutí, že pravoúhlý rovnoběžnostěn jest jediným orthog. průmětem dokonale určen. —

Někteří řešitelé užili vhodně věty, že ze tří, v jednom vrcholu se sbíhajících hran krychle dvě promítají se jako sdružené průměry ellipsy, třetí pak udává směr malé osy té ellipsy.

Úloha 2.

Dán trojúhelník abc v rovině rovnoběžné s I. průmětnou. Zobraziti krychli dané hrany h, jejíž tři sousední stěny procházejí stranami daného trojúhelníka. Prof. *Jar. Doležal.*

Řešení zaslal p. *St. Todt* ze VII. tř. r. v Uh. Brodě.

Poněvadž na krychli každá ze tří v jednom vrcholu se sbíhajících hran je kolmá ku stěně určené druhými dvěma hranami, budou průměty hran krychle jdoucích vrcholy daného trojúhelníka výškami jeho a průmět jednoho vrcholu krychle průsečíkem výšek. Podobně jako v úloze 1. otočíme nyní kolem jedné strany daného trojúhelníka (ku př. ab) trojúhelník pravoúhlý $ab\alpha$ (α_1 je onen průsečík výšek), jehož přeponou je $\overline{ab}$. Pomocí pravé délky hrany krychle určíme ostatní vrcholy.

Krychlí vyhovujících dané úloze je celkem šestnáct, sdružených po osmi kolem vrcholů α a α', z nichž jeden je pod a druhý nad daným trojúhelníkem. Počet řešení klesl by na 8, kdyby daný trojúhelník byl pravoúhlý.

Také při této úloze lze dobře užíti věty na konci řešení předešlé úlohy uvedené.

Úloha 3.

Určiti plochu kulovou dotýkající se tří přímek jdoucích jedním bodem a přímky čtvrté tím bodem neprocházející.

L. Č.

Řešení zaslal p. *Milan Kvapil* ze VII. tř. r. v Jevíčku.

První tři dané přímky A, B, C určují rotační plochu kuželovou, jíž se hledané koule musí podél jisté kružnice dotýkati. Geom. místo středů takových ploch kulových je osa O oné plochy kuželové. Tuto osu obdržíme jako kolmici spuštěnou s průsečíku o přímek A, B C. na rovinu, určenou třemi body jejich stejně vzdálenými od bodu o. Čtvrtá přímka D protíná tuto plochu kuželovou ve dvou bodech m, n, jimiž procházejí dvě povrchové přímky plochy kuželové. Naše plocha kulová musí obsahovati patrně jednu z kružnic dotýkajících se přímek om, on a mn, a to jednu z oněch dvou, jež leží uvnitř úhlu umístěného uvnitř příslušné plochy kuželové. Střed hledané plochy kulové je tedy průsečík osy O s kolmicí vztyčenou k rovině omn v jednom ze středů zmíněných kružnic.

Poněvadž přímkami A, B, C určeny jsou celkem čtyři rotační plochy kuželové, z nichž každou protíná přímka D ve dvou bodech, má naše úloha obecně 4×2 řešení.

Jinak lze řešiti tuto úlohu na základě podobnosti obdobně jako se v planimetrii sestrojuje kružnice dotýkající se dvou přímek a procházející daným bodem.

Úloha 4.

Zobraziti pronik obou těles, jež povstanou otáčením čtverce kol každé z jeho úhlopříčen. L. Č.

Řešení zaslal p. *Jindřich Vysloužil* ze VII. tř. reálky v Prostějově.

Pro posouzení, v jaké křivce protnou se pláště obou dvojkuželů vzniklých předepsanými rotacemi čtverce, uvažme, že obě tělesa jsou dle rovin kolmo půlících protější strany daného čtverce souměrně sdružena. V těchto rovinách protínají se však povrchové přímky souměrně dle nich sdružené a jsou tudíž křivky průsečné v rovinách těchto uloženy. Ježto pak tyto roviny souměrnosti jsou rovnoběžny k rovinám tečným těch ploch kuželových, jsou průsečné křivky paraboly. Mimo tyto paraboly mají ony plochy kuželové společné čtyři dvojné přímky povrchové. Vzdálenost ohniska parabol těch od vrcholů jest $\frac{a}{4}$, což seznáme, vpíšeme-li do ploch kuželových plochy kulové, dotýkající se roviny paraboly.

Úloha 5.

Daným bodem m položiti rovinu protínající dvě dané plochy kulové K_1, K_2 v kružnicích o daných poloměrech r_1, r_2.
Prof. *Ot. Lehovec.*

Řešení zaslal p. *V. Vysoudil* ze VI. tř. reálky v Litovli.

Buďtež dány dvě plochy kulové K_1, K_2 a bod m. Bodem m prochází rovina ϱ, jež protíná obě koule v kružnicích o poloměrech r_1, r_2. Pak rovina ϱ se dotýká obalových koncentrických koulí L_1, L_2 o poloměrech l_1, l_2. Tu l_1 jest odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou jest poloměr plochy kulové K_1 a druhou odvěsnou r_1 a podobně též l_2. Nyní daná úloha se mění v úlohu: Sestrojiti jest bodem m rovinu, dotýkající se dvou kulových ploch L_1, L_2, již řešíme, opíšeme-li oběma plochám kulovým dvě plochy kuželové, jejichž vrcholy jsou středy podobnosti obou koulí. Pak spojnicemi bodu m s vrcholy kuželů proložíme známým způsobem 4 tečné roviny ku plochám kuželovým. Takto můžeme vésti 4 roviny, jež vyhovují dané podmínce.

Úloha 6.

Plášť daného čtyřbokého jehlanu se základnou různoběžníkovou protnouti rovinou v pravoúhlém lichoběžníku, jehož rameno k rovnoběžným stranám kolmé má danou délku.

Týř.

Řešení zaslal p. *B. Pivnička* ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Aby rovina protínala čtyřboký jehlan v lichoběžníku, musí býti rovnoběžná s průsečnicí S dvou protějších pobočných stěn jehlanu. Kolmé rameno musí ležeti v rovině σ kolmé k průsečnici S a v jedné pob. stěně jehlanu, jest tedy průsečnicí obou těchto rovin. Tak ustanovíme směr kolmého ramene. Stěnu, ve které leží, otočíme do π a sestrojíme tam pomocí rovnoběžníka rameno dané délky $\overline{\alpha'\beta'}$. Stanovíme $\overline{\alpha_1\beta_1}$, $\overline{\alpha_2\beta_2}$. Z bodů α, β vedeme rovnoběžné strany lichoběžníka rovnoběžně s S, jež protnou zbývající hrany jehlanu v bodech γ, δ. Druhé rameno jest $\overline{\gamma\delta}$. Tím je úloha řešena. Úloha je čtyřznačná, není-li řečeno, v které pobočné stěně má rameno dané délky býti uloženo.

c) Z fysiky.

Úloha 1.

Po obou stranách kladky Atwoodova padostroje visí hmoty m a $M > m$. Jakému napětí podléhá nitka, na níž jsou zavěšeny, když se dostane systém ve směru větší hmoty M do pohybu? Jaké je urychlení výsledního pohybu? Hmotu nitě i kladky, jakož i tření zanedbáváme. *B. K.*

Řešení zaslal p. *Vojtěch Vysoudil* ze VI. třídy reálky v Litovli.

Hmota m napíná nit silou S, a dle principu akce a reakce jest nití vzhůru tažena silou S; působí tedy na hmotu m ve směru pohybu celkem síla $S - mg$. Hmota M napíná nit silou S' a jest nití vzhůru tažena silou S'; podléhá tudíž hmota M ve směru pohybu síle $Mg - S'$. Pohybuje-li se celek urychlením γ, platí rovnice

$$S - mg = m\gamma \tag{1}$$

$$Mg - S' = M\gamma. \tag{2}$$

Zanedbáváme-li hmotu niti, jest $S' = S$; a řešením rovnic (1), (2) obdržíme

$$\gamma = \frac{M - m}{M + m} g$$

$$S = \frac{2Mn}{M + m} g.$$

(Poněvadž nepřihlížíme k hmotě kladky, klademe též její moment setrvačnosti $= 0$, takže vliv otáčivého pohybu kladky je též $= 0$.)

Jiný způsob úvahy (pan *Boh. Brdička* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi).

Hybná síla jest $(M - m) g$, pohybuje hmotou $(M + m)$, udělí jí tedy zrychlení

$$\gamma = \frac{M - m}{M + m} \cdot g \quad (g = 9{\cdot}806\ m\ sek^{-2}).$$

Těžší hmota M bude míti toto zrychlení, kdežto sobě ponechána měla by zrychlení $\left(\frac{M + m}{M - m}\right)$ kráte větší (g). Musí tedy na ni působiti síla v protivném směru proti tíži, která jeví se v napětí nitky, a která by jí udělila zrychlení, $g - \frac{M - m}{M + m} g$ $= \frac{2m}{M + m} g$, vzhůru. Zrychlení toto jest tedy $\frac{2m}{M + m}$-tou částí zrychlení tíhového, síla pak, je způsobující,

$$f = \frac{2Mm}{M + m} g.$$

Úloha 2.

Na šikmé stráni, jejíž sklon od horizontální roviny se udává na 1/12, zřízena jest lanová dráha — dvoje rovnoběžné koleje, po nichž běhají dva vozíky spojené provazcem na nejvyšším bodě dráhy přes velikou kladku vedeným. Dráha jest 250 m dlouhá a slouží k dopravě štěrku na kopci dobývaného po svahu dolů k cestě. Jednou, když právě hořejší vozík, jehož vlastní váha jest rovna 3 centům, byl naložen 6 metr. centy štěrku a dolení stejně těžký vyprázdněn, selhalo brzdící zařízení a hoření vozík rozjel se volně po dráze dolů, táhna ovšem dolejší nahoru. Jaký byl jeho pohyb, za jaký čas proběhl celou dráhu a s jakou rychlostí doběhl konce dráhy? Jak byl během pohybu napiat provazec vozíky spojující? (Zanedbejte vlastní váhu provazce a kladky, jakož i tření.) B. K.

Řešení zaslal p. *Vojtěch Vysoudil* ze VI. třídy reálky v Litovli.

Pohyb vozíků po nakloněné rovině je analogický volnému pádu a proto platí tytéž vzorce, které byly odvozeny v úloze 1., jen, že k nim přistoupí faktor $\sin\alpha$. Nazveme-li váhu vozíků q a váhu naloženého kamení Q a dosadíme do odvozených vzorců za $M = Q + q$ a za $m = q$, obdržíme urychlení

$$\gamma = \frac{Q}{2q + Q}\, g \sin\alpha \tag{1}$$

a napětí provazce

$$S = \frac{2(Q + q)\, q}{2q + Q}\, g \sin\alpha. \tag{2}$$

V daném příkladě jest

$$tang\,\alpha = \tfrac{1}{12} = 0{\cdot}08333, \quad \alpha = 4^{0}45{\cdot}8', \quad \sin\alpha = 0{\cdot}08304 \backsim \tfrac{1}{12},$$
$$Q = 600, \quad q = 300\ kg.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic (1), (2) plyne

$$\gamma = \frac{1}{24}\, g = \frac{9{\cdot}81}{24} = 0{\cdot}409\, \frac{m}{sec^2} = 40{\cdot}9\ cm\ sec^{-2}$$

a

$$S \doteq 36{\cdot}79\ megadyn = 37\tfrac{1}{2}\ kg.$$

Při pohybu rovnoměrně zrychleném čas $t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}$ a konečná rychlost $v = \gamma t$, takže hořejší vozík proběhl dráhu 250 m za dobu

$$t = \sqrt{\frac{500}{0{\cdot}409}} \doteq 35 \, sec$$

a doběhl s rychlostí

$$v = 0{\cdot}409 \,.\, 35 \doteq 14{\cdot}3 \frac{m}{sec}.$$

Úloha 3.

Jsou dány tři tekutiny A, B a C. Smísíme-li 40 grammů A při 60° C s 10 grammy C při 50° C, má směs výslednou teplotu 55° C. Smísíme-li 25 grammů A při 60° s 25 grammy B při 50°, obdržíme směs 55-stupňovou. Jaká bude teplota směsi z 10 grammů B při 60° a 10 grammů C při 50°? Dostaneme jiný výsledek, kdyby udané teploty nebyly měřeny stupnicí Celsiovou, nýbrž Réaumurovou nebo Fahrenheitovou?

B. K.

Řešení zaslal p. *Vojtěch Vysoudil* ze VI. tř. reálky v Litovli.

Budiž specifické teplo tekutiny $A \ldots C_A$, tekutiny $B \ldots C_B$, a $C \ldots C_C$.

Pak patrně platí

$$40 \, C_A \, (60 - 55) = 10 \, C_C \, (55 - 50),$$

z čehož

$$4 \, C_A = C_C.$$

A dále

$$25 \, C_A \, (60 - 55) = 25 \, C_B \, (55 - 50),$$

čili

$$C_A = C_B.$$

Neznámou teplotu x vypočteme z rovnice

$$10 \, C_B \, (60 - x) = 10 \, C_C \, (x - 50),$$

z níž, dosadíce za

$$C_B = \frac{C_C}{4},$$

obdržíme

$$60 - x = 4x - 200$$

a z toho

$$x = 52^0.$$

Kdyby udané teploty byly měřeny stupnicí Réaumurovou, zůstane výsledek týž, neboť převodný faktor $\frac{5}{4}$ se vyskytuje vždy jako činitel na obou stranách rovnice, takže z počtu vypadne; výsledek $x = 52^0$ je ovšem pak dán v stupních Réaumurových. A kdyby byly teploty dány stupnicí Fahrenheitovou, vyjde jako výsledek totéž číslo (týž počet stupňů ovšem Fahrenheitových), neboť faktor $\frac{5}{9}$ se zkrátí a menšitel 32 se zruší, poněvadž se vždy vyskytuje rozdíl 2 teplot.

Úloha 4.

Pozorovatel ponořiv teploměr do jistého množství vody, shledal, že rtuť v kapilláře klesla pod dělení, které šlo dolů jen k $+ 10^0$ C, až do kuličky. Jakým způsobem by přece jen mohl teplotu oné vody změřiti, aniž by užil jiného teploměru? Svoji odpověď dovoďte nějakým číselným příkladem. B. K.

Řešení zaslal p. *Čeněk Nechvíle* ze VII. tř. reálky v Karlíně.

K stanovení teploty užijeme jakékoliv jiné vody (neb kapaliny o známém specif. teple C) a určíme výslednou teplotu směsi určitého množství této vody a vody, jejíž teplotu neznáme, známou methodou měšovací. Smícháme Mg vody teplé t^0 C a mg vody teploty neznámé $= x^0$. Pak platí rovnice:

$$Mct + mcx = (M + m)\, c\tau$$

(v tom případě, že obě kapaliny jsou vody)

$$x = \frac{m\tau + M(\tau - t)}{m}.$$

V tom případě, že bychom vzali k zjednodušení $M = m$, zjednoduší se vzorec výsledný na

$$x = 2\tau - t.$$

Poněvadž pak výsledná teplota τ nesmí býti menší než 10^0 *C*, x pak samozřejmě vždy kladné, musí býti t v tomto případě nejméně 20^0 *C*.

Příklad dle obecného vzorce:

10 *g* vody x^0 teplé, 20 *g* vody 50^0 teplé, $\tau = 35^0$ *C* $x^0 = 5^0$.

Úloha 5.

Při jakémsi chemickém pokuse byl kyslík, který se vyvíjel, zachycován nad vodou v trubici dělené na cm^3; objem jeho odečtený na trubici byl 40 cm^3, při čemž voda v trubici stála ve výši 50 cm nad vodou okolní v plynopudné nádobě. Jest určiti hmotu kyslíku.

Teplota vody byla 20^0 C a barometrický tlak obnášel 755 mm; hustota rtuti jest 13·96. Tlak vodních par při 20^0 C obnáší 17·4 mm rtuti; hmota cm^3 kyslíku za 0^0 C a tlaku 760 mm jest 0·00143 grammu. B. K.

Řešení zaslal p. *Boh. Brdička* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Tlak vody činí $\frac{500}{13{\cdot}96} = 35{\cdot}82$ *mm* rtuti. Tlak kyslíku rovná se tlaku barometrickému bez tlaku vody a vodních par. $T = 755 - (35{\cdot}82 + 17{\cdot}4) = 701{\cdot}88$ *mm Hg*. Redukujeme-li objem kyslíku na 76 *cm H* a 0^0 *C*, dle rovnice

$$\frac{P_0 \, . \, V_0}{T_0} = \frac{P \, . \, V}{T},$$

obdržíme

$$V_0 = \frac{273 \, . \, 40 \, . \, 701{\cdot}78}{293 \, . \, 760} \doteq 34{\cdot}42 \; cm^3.$$

Váha kyslíku tedy jest $0{\cdot}00143 \, . \, 34{\cdot}42 \doteq 0{\cdot}0492$ *g*.

Úloha 6.

Tenounká skleněná kulička o průměru 2 cm, naplněná vzduchem se zataví a uzavře ve větší skleněné kouli o průměru 10 cm, jež obsahuje totéž množství vzduchu jako kulička malá. Potom zvyšuje se v lázni teplota obou nádob až vnitřní kulička praskne, při čemž nabyl tlak ve větší nádobě hodnotu

1·5 atmosfér. Jaký tlak existoval v tenkostěnné vnitřní kuličce právě před prasknutím? B. K.

Řešení zaslal p. *Emil Syrový* z VIII. tř. gymn. v Mladé Boleslavi.

Je-li v malé kuličce tlak před prasknutím P_1, objem její V_1, obsah vnější nádoby V_2, tlak v ní P_2, pak, ježto množství vzduchu v obou je stejné, musí býti dle zákona Boyle-ova:

$$V_1 P_1 = V_2 P_2 = konst. \qquad (1)$$

Po prasknutí se tlak vyrovná, tak že, je-li výsledný tlak P_3 a objem V_3, tedy

$$P_3 V_3 = V_1 P_1 + V_2 P_2 = 2 V_1 P_1,$$

tak že dosadíme-li za $P_3 = 1·5$ *atm* a za $V_3 = \frac{4}{3}\pi \,.\, 5^3\ cm^3$, za $V_1 = \frac{4}{3} \,.\, \pi\ cm^3$, máme

$$P_1 = \frac{P_3 V_3}{2 V_1} = 93^3/_4 \text{ atmosfér.}$$

Úloha 7.

Malá vzduchová bublinka uvnitř skleněné koule o průměru 10 cm zdá se, díváme-li se tak, že bublinka a střed koule se nachází v jedné přímce s naším okem, býti vzdálena 2·5 cm od povrchu. Jaká jest její skutečná vzdálenost, je-li index lomu skla $n = 1·5$? B. K.

Řešení zaslal p. *Vojtěch Vysoudil* ze VI. tř. reálky v Litovli.

Pro lom konkávní plochou sférickou při indexu lomu $n = \frac{1}{1·5} = \frac{2}{3}$ platí

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1-n}{r},$$

značí-li a vzdálenost předmětu, b vzdálenost obrazu od plochy lámavé, r poloměr křivosti; ježto pak $b = -2·5$, $r = 5$, tedy

$$\frac{1}{a} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{1-\frac{2}{3}}{5},$$

a z toho $a = 3\ cm.$

Jest tedy ona bublinka 3 *cm* od povrchu vzdálena.

Úloha 8.

Deklinační magnetka koná 50 kyvů za minutu na jistém místě zeměkoule, kde inklinace obnáší 60° a 57 kyvů za minutu v jiném místě, kde inklinace jest 45°. V jakém poměru stojí totálné intensity zemského pole magnetického v obou místech?

B. K.

Řešení zaslal p. *Boh. Brdička* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi.

Rozložíme-li totální intensitu magn. zemského (T) na složku horizontální (H) a vertikální (V), a inklinaci označíme i, obdržíme rovnice pro intensity:

$$H_1 = T_1 \cos i_1,$$
$$H_2 = T_2 \cos i_2,$$

z nichž

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_1}.$$

Poněvadž intensity horizontální jsou k sobě v poměru čtverců počtu kyvů deklinační magnetky, $\frac{H_1}{H_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}$, obdržíme rovnici

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_1}.$$

Je-li $n_1 = 50$, $n_2 = 57$, $i_1 = 60°$, $i_2 = 45°$, jest

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2500\sqrt{2}}{3249} = 1{\cdot}088.$$

Úloha 9.

Proud procházel tlustými závity tangentové boussoly a odporem 1 Ohmu ponořeným ve 100 cm^3 vody. Za 40 minut ohřála se voda o 15·8 C. Střední úchylka na boussole byla 32°. Jaká byla intensita proudu a jak veliký je redukční faktor tangentové boussoly? Jaký jest poloměr boussoly, je-li na ní jediný závit, a je-li horizontální složka intensity zemského magnetismu = 0·20?

B. K.

Řešení zaslal p. *Čeněk Nechvíle* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Dle Joule-ova zákona jest množství tepla vzbuzené proudem

$$Q = 0{\cdot}24\ J^2\ R\ .\ t \text{ kalorií.}$$

Množství tepla α, odpor R i dobu t známe; můžeme tedy počítati J

$$J = \sqrt{\frac{Q}{0{\cdot}24\ Rt}} \text{ Ampère.}$$

Dle známého vzorce pro tangentovou bussolu

$$J = \frac{10\ Hr}{2\pi n}\ .\ tg\ \alpha = C\ tg\ \alpha$$

můžeme vypočísti redukční faktor C, poněvadž je známo α i J. Z téže rovnice plyne, známe-li i H a n velikost poloměru

$$r = C \frac{2\pi n}{10\ H}.$$

Dosadíme-li do těchto obec. vzorců dané hodnoty, obdržíme $J = 1{\cdot}66$ Ampère, $C = 2{\cdot}65$, $r = 8{\cdot}32$ *cm*.

Úloha 10.

Cívka s celkovou plochou závitů 15000 cm^2 *jest spojena s galvanometrem; leží s horizontálními závity na stole, a když ji obrátíme (otočíme o* 180°*), objeví se v galvanometru jistá výchylka. Tutéž výchylku v galvanometru obdržíme, vybíjeme-li jím kondensator o kapacitě* 1 *mikrofarad* ($= 10^{-15}$ *abs. jedniček el. magn.) nabitý na* 1·5 *Volt. Je-li vertikální složka intensity zemského magnetismu v místě, v němž cívka ležela* 0·4 *abs. jedn., jaký jest odpor cívky a galvanometru neboli proudového kruhu při prvém pokuse vyjádřený v Ohmech?*

B. K.

Řešení zaslal p. *Vojtěch Vysoudil* ze VI. třídy reálky v Litovli.

Je-li F plocha závitů, V vertikální složka intensity zemského magnetismu, jest elektromotorická síla indukovaného proudu při otočení o 180°

$$2FV = 2\ .\ 15000\ .\ 0{\cdot}4$$

absol. jednotek elektromagnetických.

Je-li R odpor cívky a galvanometru, jest množství elektřiny, jež proběhlo galvanometrem

$$\frac{2FV}{R} = \frac{2 \,.\, 15000 \,.\, 0{\cdot}4}{R} = \frac{12000}{R}.$$

Je-li kapacita kondensátoru C, potenciál P, jest množství elektřiny

$$CP = 10^{-15}\; 10^{8} \,.\, 1{\cdot}5 = 10^{-7} \,.\, 1{\cdot}5 \text{ abs. jedn. elmagn.}$$

Tudíž

$$\frac{12000}{R} = 1{\cdot}5 \,.\, 10^{-7}$$

a $$R = \frac{12 \,.\, 10^{10}}{1{\cdot}5} = \frac{4}{5}\; 10^{11} \text{ abs. jedn. elmagn.}$$

čili $$R = \frac{400}{5} = 80\ Ohm.$$

Úloha 11.

Dvě rovinná zrcadla z_1, z_2 svírají úhel ostrý α; z bodu M uvnitř úhlu vychází paprsek světelný k z_2 tak, že se přibližuje k průsečnici zrcadel p. a) Po kolikátém odrazu se počne od ní vzdalovati? b) Ve kterém případě protne průsečnici p? c) Kolikátý odraz bude poslední? d) Jest dokázati: Skloní-li se z_2 ku z_1 až na úhel $\frac{\alpha}{n}$, projde týž paprsek z M všemi body odrazu na z_1 jako v prvém případě, při čemž k-tý odraz prvého případu se stane odrazem $n\,.\,k$-tým. L. Štětka.

Řešení p. autorovo.

a) Průsečnicí p zrcadel z_1, z_2 veďme roviny z_3, z_4, z_5 . . ., odchýlené navzájem postupně o týž úhel: $\sphericalangle (z_1, z_2) = \sphericalangle (z_2, z_3) = \sphericalangle (z_3, z_4)$ . . . ; paprsek z bodu M prodlužme v jeho směru s tak, že protíná roviny z_2, z_3, z_4 . . . v bodech A_2, A_3, A_4 . . . Konstruujeme-li jednotlivé odrazy uvnitř úhlu (z_1, z_2), obdržíme odrazné body A'_2, A'_3, A'_4 . . . Roviny z_3, z_4 . . . znázorňují nám střídavě zrcadla z_1, z_2, z_1, z_2 . . ., ježto s má k nim tytéž sklony, jako paprsek odražený k zrcadlům, a body A_3, A_4, A_5 jsou homologické s body A'_3, A'_4, A'_5 . . . Padne-li tedy společná kolmice k přímek p a s mezi roviny z_{x+1} a z_{x+2}, nastane vzdalování paprsku mezi odrazem x-tým a $(x + 1)$-vým.

Veďme libovolnou rovinu $\perp p$ a promítněme do ní s (průmět s_1) i k (k_1). Je patrno, že $k_1 \perp s_1$, a že úhel $(s_1, z_n) = \beta + (n-2)\alpha$, kdež $\beta = \sphericalangle(s_1, z_2)$. Jest tedy:

$$\left.\begin{array}{l}\beta + (x-1)\alpha < 90^0 \\ \beta + x\alpha > 90^0\end{array}\right\} \frac{90^0 - \beta}{\alpha} < x < \frac{90^0 - \beta}{\alpha} + 1,$$

čímž x jest určeno.

b) Z uvedeného znázornění je patrno, že paprsek projde průsečnicí p jen tehdy, protíná-li směr s průsečnici p přímo (bez odrazu).

c) Poslední odraz bude y-tý, při čemž

$$\beta + y\alpha \geqq 180^0, \qquad y \geqq \frac{180^0 - \beta}{\alpha},$$

anebo:

$$\frac{180^0 - \beta}{\alpha} < y < \frac{180^0 - \beta}{\alpha} + 1$$

d) je ze zmíněného znázornění přímo patrno.

Úloha 12.

Dvě vertikální dokonale pružné stěny v_1 a v_2 vzdálené o a stojí na horizontální desce h téže vlastnosti. Z daného bodu A na desce h vzdáleného od v_1 o d jest vržena dokonale pružná koule rychlostí c pod úhlem α k v_2 tak, že se pohybuje v rovině na všechny tři desky kolmé. Do kterého bodu desky h dopadne koule po k-tém dopadu? Jaký musí býti úhel α, aby dopadla při n-tém dopadu zase do A? L. Štětka.

Řešení p. autorovo.

Veďme roviny $v_3, v_4, v_5 \ldots \| v_1 \| v_2$ ve stejných postupně vzdálenostech ($= a$). Vyznačme dráhu, kterou by koule opsala, kdyby stěny v_2 nebylo. Jednotlivé body této myšlené dráhy znázorňují nám svou posicí ke 2ma nejbližším rovinám body skutečné dráhy tak, že na př. část od v_{2n} k v_{2n+1} odpovídá pohybu od v_2 k v_1 atd.

Dálka vrhu při c, α jest $\frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$, tedy při k-tém dopadu byla by koule myšlená v bodě, vzdáleném od v_k o

$$d + k \cdot \frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha = q \quad a\,;$$

položme $q = p + \varepsilon$, kde $0 \leqq \varepsilon < 1$: koule dopadne patrně do bodu, od jedné z obou rovin vzdáleného o $\varepsilon\ a$, a to od v_1, je-li p sudé, od v_2 při p lichém.

Má-li koule při n-tém dopadu padnouti zase do A, musí patrně býti (m_1, m_2 = čísla celá) $nx = 2m_1 a$ pro dopad od v_1, anebo $nx = 2m_2 a - 2d$ pro dopad od v_2, tedy:

$$\sin \alpha_1 = 4 \frac{m_1 a}{n} \cdot \frac{g}{c^2}, \quad \sin \alpha_2 = 4 \frac{m_2 a + d}{n} \frac{g}{c^2}.$$

Úloha 13.

Dokonale pružná koule vržená pod $\sphericalangle\ \alpha$ rychlostí c narazí na své dráze na dokonale pružnou desku shora tak, že odrazem zvedne svůj směr. Odkud pochází zdánlivý zisk její energie, záležející v tom, že se pomocí odrazné desky zvedne výše, než bez ní? Jak nutno skloniti desku, aby koule dosáhla výšky maximální — a jaké energii odpovídá tato výška?

L. Štětka.

Řešení p. autorovo.

Koule — hmoty m — má při vrhu energii $\frac{mc^2}{2}$; při elev. úhlu α dostoupí výše $\frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, má tedy (na vrcholu) potenc. energii $\frac{mc^2 \sin^2 \alpha}{2}$; ostatní energie jeví se jako kinetická při rychlosti $c \cos \alpha$. Odrazem však může se tato kinetická energie — pohybem vzhůru — měniti v potenciálnou.

Položme rovinu XY do roviny dráhy, počátek O do počátku vrhu, osu X horizontálně a Y tedy vertikálně vzhůru. Deska nechť protíná dráhu v bodě $S(x_s, y_s)$ tak, že koule po odrazu nabude elev. úhlu φ. Při dopadu na desku má čtverec rychlosti $v^2 = c^2 \cos^2 \alpha + 2g \left(\frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} - y \right) = c^2 - 2gy$, a s touto rychlostí zvedne se — při elev. úhlu φ — ještě o délku $h = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \left(\frac{c^2}{2g} - y \right) \sin^2 \varphi$; stoupnutí to bude patrně maximální při $\varphi = 90^\circ$, t. j. kdy koule odrazí se přímo vzhůru, i dosáhne celkové výšky $y + h = \frac{c^2}{2g}$. Výška ta odpovídá energii $\frac{mc^2}{2}$, a je táž, jaké by koule dosáhla při $\alpha = 90^\circ$.

Správná řešení úloh v tomto ročníku zaslali pp.

a) Z mathematiky:

Altmann K., VII. r. Přerov, 1., 3.–11., 13., 15.—27., 30.—34.
Aufwerber R., VIII. g. Strážnice, 11., 12., 14.
Baláš Fr., VIII. g. Kroměříž, 3., 11., 15.—18., 20.—22., 25.
Baňovský F., VII. r. Praha-III., 1., 3., 7., 9., 10., 12., 18., 21., 23., 24., 27.
Bayer P., VI. r. Praha-VII., 1., 3., 5., 7., 15.—18.
Bažant M., VI. r. Praha-II., 3., 5., 6., 8., 9., 10., 15.—18.
Benda A., V. g. Praha, Žitná, 1., 2., 3., 7.
Berkovec H., VII. r. Plzeň, 3., 4., 6.–11., 14.—25., 27.
Bittermann M., VI. r. Budějovice Č., 1.—10., 15.—22., 30., 31., 36.
Boubal V., VI. r. Písek, 1., 3.—10., 15.—19., 21., 22., 30., 31.
Brdička B., VIII. g. Chrudim, 1.—12., 14.—28., 30., 33., 37.
Budil V., VII. r. Kutná Hora, 1.—12., 14.—37.
Burkoň Č., VI. r. Jevíčko, 3., 4., 7., 9., 10., 15.—18., 20.
Cingr R., VI. r. Kladno, 4., 5., 7., 9., 10., 15., 18.
Daněk S., VII. r. Kroměříž, 1., 5., 7.—11., 15.—24., 27., 30.–32.
Dominik R., VIII. g. Boskovice, 1.—4., 7., 9., 10., 15.—18., 19., 22., 31., 33., 34.
Drnec J., VII. r. Kladno, 1.–7., 9., 11., 13., 15.—21., 23—27., 30.—34.
Dudárek A., VI. r. Č. Budějovice, 1.—4., 6., 9., 10., 15.—22., 30., 31.
Dvořák F., VII. r. Nové Město na Mor., 1.—7., 9.—11., 15.—37.
Engel A., VI. r. Rakovník, 3., 18.
Fiala J., VII. r. Nové Město na Mor., 1.—11., 14.—33., 35.
Fialka K., VII. g. Kroměříž, 3.–5., 7.—9., 15.—18., 27.
Gabriel S., VIII. g. Ml. Boleslav, 15.—19., 21., 25., 27., 30., 31.
Hlavnička B., VII. g. Klatovy, 3., 4., 7., 10., 15., 16., 18.
Hradil Fr., VIII. g. Kroměříž, 1.—3., 5.—12.
Hruška F., VI. r. Kr. Vinohrady, 3., 4., 7.—10., 15., 17., 18.
Hübner S., V. g. Místek, 1., 3., 4., 6.
Chramosta S., VI., I. č. r. Brno, 4., 5., 7.—11.
Jngriš V., VI. r. Rakovník, 3.—5.

Jandík J., VII. r. Praha-III., 1., 3., 4., 6. 12., 15.—19., 21., 23., 24., 27., 28., 30., 32.
Janský J., VII. r. Kostelec n. O., 15.—18., 20., 23.
Jarůšek J., VII. g. Benešov, 1. 11., 15.—22., 25.—28., 30.—32., 36.
Ježek R., VI. r. Jevíčko, 3., 4., 6.—10., 15.—18., 20., 36.
Jílek J., VII. r. Pardubice, 1., 3., 4., 6., 8.—10., 15.—18., 20., 21., 23., 24.
Jirousek A., VII. r. Rakovník, 1., 3., 5., 15.—18., 23., 24., 27., 32., 33.
Klein K., VII. g. Chrudim, 7., 9., 15., 16.
Kocman J., VI. g. Přerov, 1., 3., 4., 6.—8., 10., 15., 16., 18.—20., 28., 30., 31.
Kolář A., VIII. g. Jindř. Hradec, 1.—11., 14.—19.
Kollmann A., V. r. Kr. Vinohrady, 3., 6.—10., 15.—19.
Koranda M., VI. r. Kr. Vinohrady, 3.—11., 15.—18., 21., 22., 28., 30., 31., 36.
Kořínek B., VI., r. Olomouc, 3. 10., 15.—24., 30.—32., 36.
Koutný J., VI. r. Olomouc, 35.
Köhler B., VI. r. Kr. Vinohrady, 3., 9., 10., 18., 30.
Krejzlík J., ext. g. Plumlov, 1., 3.—10., 15.—24., 28., 30., 31. 35.—37.
Kuča Th., VI. r. Brno, 3., 4., 5., 7.—10., 15., 16., 18., 28.—31.
Kučera Jar., V. r. Č. Budějovice, 15., 16.
Kučera K., r. Praha-II., 3., 6., 8.—10., 15.—18.
Kučerka Al., VI. g. Přerov, 3., 4., 7.
Kunovjánek F., VI. r. Uh. Brod, 3, 6., 7., 9, 10.
Kuryvial J., VIII. g. Strážnice, 1.—12., 14.—20., 25.—28.
Kutnohorský F., priv. r. Nová Říše, 1.—37.
Kvapil M., VII. r. Jevíčko, 1.—12., 14.—32., 36.
Lavička J., VIII. g. Místek, 2.—5., 7.—12., 15.—19., 21., 22., 26., 27., 30.—32.
Libický V., VII. g. Hr. Králové, 1., 3., 4., 9., 10., 15.—18., 30.
Linek V., VI. r Praha-VII., 1., 18.
Machytka B., VII. r. Karlín, 1., 3—11, 13.—21, 23.—37.
Mareš K., VII. r. Tábor, 4., 5., 15.—19.
Milota P., VII. r. Plzeň, 3, 4., 7., 9., 11, 14.—19., 21., 24., 25.
Mixa F., VI. r. Praha-VII., 3.

Nedvěd R., VII. r. Kladno, 1.—36.
Nechvíle Č., VII. r. Karlín, 1., 3.—11., 14 - 37.
Nejezchleb A., VI. r. Jevíčko, 3., 4, 7., 9., 15.—18.
Neumann B., VI. g. Slané, 15., 16.
Nosek Fr., Ml. Boleslav, 3., 5., 7.—10.
Novák J., VIII. g. Pelhřimov, 2.—5., 7., 13., 15.—20., 28.
Ogoun J., VII. g. Kroměříž, 1.—10., 15.—21., 27., 30., 31., 33.
Ouřada R., VI. r. Rakovník, 2.-4., 7., 9., 10.
Pavlousek O., VII. r. Kr. Vinohrady, 1., 7., 8., 10., 11., 15., 17., 18., 20., 22.—27.
Pasovský J., VI. r. Praha-II., 17.
Pelikán Em., VI. r. Praha-II., 1., 3., 4., 7.—10., 15.—19., 30., 31., 36.
Pick J., VI. r. Kr. Vinohrady, 3.—10., 15.—18., 20., 21., 31.
Pišl Fr., VII. r. Kostelec n. O., 1., 5.—7., 9., 10., 15.—18., 20., 30.—32., 37.
Pivnička B., VII. r. Kr. Vinohrady, 1.—37.
Plachý Fr., VIII. g. Přerov, 1.—11., 15.—20., 22.—24., 27., 30.—34.
Pohořský F., V. r. Písek, 15., 16.
Poldauf B., VII. r. Kostelec n. O., 1., 3., 17., 18., 20.
Pošva J., VII. r. Pardubice, 1.—6., 8.—11., 15.—24., 26., 27.
Pražák J., VII. g. Č. Budějovice, 1., 3., 4., 5., 7.—10., 15.—20. 22.—25., 28., 30.
Slč. *Plocová M.*, VIII. g. Minervy, Praha, 1.—11., 13., 14.
Rübenstein J., VIII. g. Přerov, 1—5., 7., 8., 10., 15.—22., 25., 30., 31.
Rudiš F., VII. g. Praha-III., 9., 10., 18.
Řehoř V., VII. g. Č. Budějovice, 3., 4., 8., 18.
Říman J., g. Opava, 3—11., 14.—20., 22., 25., 26., 28., 32.—35.
Samek J., VII. g. Rychnov, 15., 16., 18.
Sekerka O., VII. g. Plzeň, 15.—18.
Stloukal J., g. Val. Meziříčí, 1., 3.—5., 7.—11., 15.—18., 20., 31., 32., 33.
Staffa K., VI. r. Olomouc, 1.—28., 30.—37.
Svoboda Fr., VI. r. Jevíčko, 1.—27., 29.—31.
Syrový Em., VIII. g. Ml. Boleslav, 1.—37.
Ščerba J., učitel, Sobišovice, 1., 3.—5., 7.—9., 15.—20.

Šercl K., VII. r. Louny, 15., 16., 18., 19., 22.—24.
Šesták A., VII. g. Kroměříž, 1.—11., 14.—22., 26., 27., 30.—34., 36., 37.
Šilhan O., VI. r. Jičín, 1., 3., 4., 16., 17., 20., 25.
Široký J., I. r. uč. úst. Mor. Ostrava, 1., 3., 4., 6.—8., 10., 15., 16., 18., 19., 30.
Škrla J., VI. r. Nové Město na Mor., 7., 9.
Šmídák J., VII. g. Praha, Truhl., 2.—7., 10., 15., 16., 18.
Šofr B., VII. g. Rychnov n. Kn., 15., 16., 18.
Šolta S., V. g. Praha, Žitná ul., 1.—3., 6., 7., 16.—19.
Špičák Fr., VII. r. Prostějov, 16., 19., 26., 29., 30.—37.
Šujan J., V. r. Kroměříž, 30., 31.
Švadlena F., VII. r. Pardubice, 1.—37.
Teige K., V. g. Praha, Žitná ul., 1.—13., 15.—25., 27., 30.—37.
Thoma J., VII. r. Kostelec n. O., 1.—30., 32., 36.
Todt S., VII. r. Uh. Brod, 1.—3., 5., 7., 9., 11., 16., 18., 20., 27.
Trna M., VIII. g. Olomouc, 1.—22., 25.—28., 30.—34., 36.
Varcop L., VIII. g. Místek, 2.—5., 7.—11., 15.—18., 20., 22., 27.
Vašek F., VII. g. Prostějov, 15.—19., 25., 27.
Vincik J., VI. I. č. g. Brno, 2., 3., 4., 6., 7., 9., 15.—19.
Vítek F., VII. g. Kroměříž, 1.—10., 15.—19., 28.
Vojtek J., theolog, Henčlov u Přerova, 1.—11., 15.—20., 22.—24., 30., 31., 33., 34.
Volcšenský Ed., VII. r. Holešov, 7., 9., 16., 18.
Všetička K., VII. r. Prostějov, 1.—7., 9.—37.
Vysloužil J., VII. r. Prostějov, 1.—11., 13.—37.
Vysoudil V., VI. r. Litovel, 1.—37.
Zeman J., VI. r. Plzeň, 15.—18.
Žabský B., VII. g. Praha, Žitná ul., 1., 3.—5., 8., 9., 15.—20., 22.—24., 27.

b) Z deskriptivní geometrie:

Baňovský F., r. Praha-III., 2.—5.
Bažant M., V. r. Praha-II., 1.—3.
Bittermann M., VI. r. Č. Budějovice, 1.—6.
Budil V., VII. r. Č. Budějovice, 1.—6.
Daněk S., VII. r. Kroměříž, 3., 5., 6.

Dudárek A., VI. r. Č. Budějovice, 1., 3.—6.
Dvořák Fr., VII. r. Nové Město na Moravě, 1.—6.
Chramosta S., VI. I. č. r. Brno, 2.
Jandík J., VII. r. Praha-III., 2., 3., 5.
Janáček Fr., VI. r. Jevíčko, 1.—3., 5., 6.
Koranda M., VI. r. Kr. Vinohrady, 1.—3., 4., 6.
Kořínek B., VI. r. Olomouc, 1.—5.
Krejzlík J., ext. g. Plumlov, 1.—3, 5., 6.
Kuča Th., VI. I. č. r. Brno, 1.—6.
Kučera K., VI. r. Praha II., 1., 2.
Kunovjánek, VI. r. Uh. Brod, 2.
Kutnohorský F., priv. r. Nová Říše, 1. 6.
Kvapil M., VII. r. Jevíčko, 1.—6.
Machytka B., VII. r. Karlín, 1.—6.
Mixa F., VI. r. Praha-VII., 2.
Nechvíle Č., VII. r. Karlín, 1.—6.
Nosek J., r. Ml. Boleslav, 1., 2.
Pavlousek Ot., VII. r. Kr. Vinohrady, 4.—6.
Pelikán Em., VI. r. Praha-III., 1.—3., 5., 6.
Pišl Fr., VII. r. Kostelec n. O., 1.—6.
Pivnička B., VII. r. Kr. Vinohrady, 1.—6.
Staffa K., VI. r. Olomouc, 1.—6.
Stockar z Bernkopfů, VII. r. Č. Budějovice, 1.—6.
Svoboda A., VII. r. Hradec Kr., 1.—3.
Škrla J., VI. r. Nové Město n. M., 2.
Špičák F., VII. r. Prostějov, 4., 5., 6.
Švadlena Fr., VII. r. Pardubice, 3.—6.
Todt S., VII. r. Uh. Brod, 1., 2., 3.
Volešenský Ed., VII. r. Holešov, 2., 3., 5., 6.
Vysloužil J., VII. r. Prostějov, 1.—6.
Vysoudil V., VI. r. Litovel, 1.—6.

c) Z fysiky *):

Altmann Karel, VII. r. Přerov, 3., 4., 6., 8., 9.
Baňovský F., r. Praha III., 9.

*) Některá řešení jsou až na numerické chyby správná. Dlužno připomenouti, že v případech skutečných dat počítá se fysikálně správně tak, aby výsledek byl asi na 0·1% správný, t. j. nejpohodlněji pomocí 4-místných logarithmů.

Bittermann Max, VI. r. Čes. Budějovice, 3., 4., 6.
Brdička Bohumil, VIII. g. Chrudim, 1., 3., 4., 5., 7., 8., 9.
Dudárek Arnošt, VI. r Čes. Budějovice, 3., 4., 6.
Gabriel Stanislav, VIII. g. Ml. Boleslav, 1., 2., 3., 4., 5., 6., 8., 9, 12.
Kašpar František, V. r. Kutná Hora, 4., 9.
Koranda Miloslav, VI r. Král. Vinohrady, 2., 3., 4., 5., 12.
Kuča Theodor, VI. r. Brno, 4., 5., 8., 9., 11., 12.
Nechvíle Čeněk, VII. r Karlín, 1., 2., 3., 4, 5., 6., 7., 8., 9., 11., 12., 13.
Novák Josef, VIII. g. Pelhřimov. 3., 4., 5., 6., 9., 12., 13.
Pasovský Jiří, VI. r. Praha II., 1., 2.
Pelikán Em, VI. r. Praha II., 1., 2., 4., 6.
Pivnička Bohumír, VII. r. Král. Vinohrady, 1., 2., 3., 8., 9.
Rübenstein Ignác, VIII. g. Přerov, 3., 4., 5., 6., 9.
Svoboda Frant., VI. r. Jevíčko, 3., 4., 8.
Syrový Emil, VIII. g. Ml. Boleslav, 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 11., 12, 13.
Škrla Jindřich, VI. r. Nové Město na Moravě, 4.
Trna Metoděj, VIII. g. Olomouc, 3., 8., 9., 11.
Vysoudil Vojtěch, VI. r. Litovel, 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., 12., 13.
Zeman Josef, VI. r. Plzeň, 3.

Udělení cen.

Ceny za správná řešení úloh přisouzeny takto:

a) Z mathematiky.

Ceny první:

pp. ***Kutnohorský** F.*, priv. r. v Nové Říši, *)
***Pivnička** B.* ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech, *)
***Syrový** E.* z VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *)
***Brdička** B.* z VIII. tř. g. v Chrudimi,
***Budil** V.* ze VII. tř. r. v Kutné Hoře,

*) Tito řešitelé dostanou též Kolouškovu Mathematickou theorii důchodů atd.

Dvořák F. ze VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Fiala J. ze VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě,
Kvapil M. ze VII. tř. r. v Jevíčku,
Machytka B. ze VII. tř. r. v Karlíně,
Nechvíle Č. ze VII. tř. r. v Karlíně,
Staffa K. ze VI. tř. r. v Olomouci,
Svoboda Fr. ze VI. tř. r. v Jevíčku.
Švadlena F. ze VII. tř. r. v Pardubicích,
Teige K. z V. tř. g. v Praze v Žitné ulici.
Thoma J., ze VII. tř. r. v Kostelci nad Orlicí,
Trna M. z VIII. tř. g. v Olomouci,
Všetička K. ze VII. tř. r. v Prostějově,
Vysloužil J. ze VII. tř. r. v Prostějově,
Vysoudil V. ze VII. tř. r. v Litovli.

Ceny druhé:

pp. *Altmann K.* ze VII. tř. r. v Přerově,
Berkovec H. ze VII. tř. r. v Plzni.
Bittermann M. ze VII. tř. r. v Č. Budějovicích,
Daněk S. ze VII. tř. r. v Kroměříži,
Drnec J. ze VII. tř. r. na Kladně,
Jandík J. ze VII. tř. r. v Praze-III.,
Jarůšek J. ze VII. tř. g. v Benešově,
Krejzlík J., ext. gymn. v Plumlově,
Kořínek B. ze VI. tř. r. v Olomouci,
Kuryvial J. z VIII. tř. g. v Strážnici,
Lavička J. z VIII. tř. g. v Místku,
Ogoun J. z VIII. tř. g. v Kroměříži,
Plachý F. z VIII. tř. g. v Přerově,
Pošva J. ze VII. tř. r. v Pardubicích,
Říman J. z VIII. tř. g. v Opavě,
Šesták A. ze VII. tř. g. v Kroměříži,
Vojtek J., theolog v Henčlově u Přerova.

Ceny třetí:

pp. *Baňovský F.* ze VII. tř. r. v Praze-III.,
Dominik R. z VIII. tř. g. v Boskovicích,
Dudárek A. ze VI. tř. r. v Č. Budějovicích,
Fialka K. ze VII. tř. g. v Kroměříži,

Ježek R. ze VI. tř. r. v Jevíčku,
Jílek J. ze VII. tř. r. v Pardubicích,
Jirousek A. ze VII. tř. r. v Rakovníku,
Koranda M. ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech,
Kocman J. ze VII. tř. g. v Přerově,
Kolář A. z VIII. tř. g. v Jindř. Hradci,
Kollmann A. z V. tř. r. na Král. Vinohradech,
Kuča Th. ze VI. tř. r. v Brně,
Libický V. ze VII. tř. g. v Hradci Králové,
Milota P. ze VII. tř. r. v Plzni,
Novák J. z VIII. tř. g. v Pelhřimově,
Pavlousek O. ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech,
Pelikán Em. ze VI. tř. r. v Praze-II.,
Pick J. ze VI. tř. r. na Král. Vinohradech,
Pišl Fr. ze VII. tř. r. v Kostelci n. O.,
slč. *Plocová M.* z VIII. tř. g. Minervy v Praze
pp. *Rübenstein J.* z VIII. tř. g. v Přerově,
Stloukal J. z VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí,
Ščerba J. učitel v Sobišovicích,
Široký J. z I. tř. r. paedagogia v Mor. Ostravě,
Špičák Fr. ze VII. tř. r. v Prostějově,
Todt S. ze VII. tř. r. v Uh. Brodě,
Varcop L. z VIII. tř. g. v Místku,
Vítek ze VII. tř. g. v Kroměříži,
Žabský B. ze VII. tř. g. v Praze (Žitná ulice).

b) Z deskriptivní geometrie:

Weyrovu Projektivnou geometrii dostane
p. *Pivnička B.* ze VII. tř. r. na Král. Vinohradech,
Jarolímkovu trojdílnou deskriptivní geometrii;
pp. *Bittermann M.* ze VI. tř. r. v Č. Budějovicích,
Budil V. ze VII. tř. r. v Kutné Hoře,
Dudárek A. ze VI. tř. r. v Č. Budějovicích,
Dvořák Fr. ze VII. tř. r. v Novém Městě n. M.,
Janáček Fr. ze VI. tř. r. v Jevíčku,
Koranda M. ze VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
Kořínek B. ze VI. tř. v Olomouci,

Krejzlík J., ext. g. v Plumlově,
Kuča Th. ze VI. tř. r. v Brně,
Kutnohorský F., priv. reálky v Nové Říši na Moravě.
Kvapil M. ze VII. tř. r. v Jevíčku,
Machytka B. ze VII. tř. r. v Karlíně,
Nechvíle Č. ze VII. tř. r. v Karlíně,
Pelikán Em. ze VI. tř. r. v Praze II.,
Pišl Fr. ze VII. tř. r. v Kostelci n. O.,
Staffa K. ze VI. tř. r. v Olomouci,
Stockar z Bernkopfů ze VII. tř. r. v Č. Budějovicích,
Švadlena Fr. ze VII. tř. r. v Pardubicích,
Volešenský Ed. ze VII. tř. r. v Holešově,
Vysloužil J. ze VII. tř. r. v Prostějově,
Vysoudil V. ze VI. tř. r. v Litovli.

c) Z fysiky:

cenu první:
pp. *Vysoudil Vojtěch* z VI. tř. r. v Litovli,
Nechvíle Čeněk ze VII. tř. r. v Karlíně,

cenu druhou:
pp. *Syrový Emil* z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi,
Gabriel Stanislav z VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi,
Brdička Bohumil z VIII. tř. g. v Chrudimi,
Novák Josef z VIII. tř. g. v Pelhřimově.