Arnošt Dittrich

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 3, 201--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122614

t. j. trojúhelníky $U_1 U_2 U_3$, $V_1 V_2 V_3$ a $W_1 W_2 W_3$ mají s trojúhelníkem základním týž střed hmotný G.

Trojúhelníky ty mají, jak ze sestrojení jejich vysvítá, strany vzájemně i se stranami trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ rovnoběžné; na př.: $U_2 U_3 \parallel V_2 V_1 \parallel W_1 W_3 \parallel B_3 B_2$ atd. Musí tedy i mediany jejich býti navzájem rovnoběžny; poněvadž pak všechny tyto mediany procházejí týmž středem hmotným G, splývají vždy příslušné čtyři z nich v jedinou přímku. Jednou z těchto přímek jest $U_1 V_3$, druhou $V_2 U_3$, třetí $U_2 V_1$. Leží tedy na př. bod U_1, střed strany $V_2 V_1$, bod B_1, střed strany $W_1 W_3$, střed strany $B_3 B_2$, bod W_2, střed strany $U_2 U_3$ i bod V_3 vesměs na téže přímce $U_1 V_3$; můžeme též snadno dokázati, že prochází tato přímka též průsečíkem stran $A_2 A_3$ a ST jakož i průsečíkem stran $A_1 A_2$ a SR. (Dokončení.)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

§ 3. *Věta druhá.* Věta druhá praví, že síly zevní závisí pouze na souřadnicích. Síla X_ν, Y_ν, Z_ν na ν-tý bod působící závisí na souřadnicích x, y, z všech bodů soustavy.

Tuto větu uvedeme ve spojení s tím, že vazby dle věty prvé nezávisí na čase. Další úvahy provedeny nejprve v souřadnicích Descartesových, pak v Lagrange-ových.

1. *v souřadnicích Descartesových.* Z d'Alembertova principu plyne, že differencialním rovnicím pohyb soustavy určujícím lze dáti tvar

$$
\begin{aligned}
m_\nu x_\nu'' &= X_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu}, \\
(8) \qquad m_\nu y_\nu'' &= Y_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \\
m_\nu z_\nu'' &= Z_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}.
\end{aligned}
$$

Soustavou vazeb $\varphi_\pi(x, y, z) = c_\pi$ jsou veličiny λ_π jednoznačně určeny. Dosadíme-li totiž do rovnic

$$\frac{d^2\varphi_\pi}{dt^2} = 0, \quad \pi = 1, \ldots, p,$$

za x''_ν, y''_ν, z''_ν z rovnic (8), obdržíme rovnice dle λ_π lineárné. Řešení jich dle veličin λ jest vždy možné, neboť funkce φ_π jsou na sobě nezávislé. Poněvadž pak vazby neobsahují čas, síly zevní závisí jen na souřadnicích, bude každé λ_π jen funkcí veličin x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν.

Differencialní rovnice (8) lze proto nahraditi následujícími

$$(9) \qquad x''_\nu = \overline{X}_\nu, \quad y''_\nu = \overline{Y}_\nu, \quad z''_\nu = \overline{Z}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

kde funkce $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$, jež závisí jen na proměnných x, y, z, x', y', z', dány identitami

$$(10) \qquad \begin{aligned} \overline{X}_\nu &\equiv \frac{1}{m_\nu}\left(X_\nu + \sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\right), \\ \overline{Y}_\nu &\equiv \frac{1}{m_\nu}\left(Y_\nu + \sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu}\right), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ \overline{Z}_\nu &\equiv \frac{1}{m_\nu}\left(Z_\nu + \sum_1^p{}_\pi \lambda_\pi \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu}\right). \end{aligned}$$

Obdobný výsledek obdržíme, užijeme-li všeobecných souřadnic.

2. *v souřadnicích Lagrange-ových.* Představují-li funkce φ_π vazby soustavy, jsou funkce ty na sobě nezávislé; proto lze p proměnných v rovnicích $\varphi_\pi(x, y, z) = c_\pi$, $\pi = 1, \ldots, p$ se vyskytujících vyjádřiti pomocí ostatních. Tyto veličiny buďtež

$$\begin{gathered} x_\varrho = f_\varrho(x_i, y_\varkappa, y_\lambda), \quad y_\sigma = g_\sigma(x_i, y_\varkappa, z_\lambda), \quad z_\tau = h_\tau(x_i, y_\varkappa, z_\lambda), \\ \varrho = 1, \ldots, r, \qquad \sigma = 1, \ldots, s, \qquad \tau = 1, \ldots, t, \\ i = r+1, \ldots, n, \quad \varkappa = s+1, \ldots, n, \quad \lambda = t+1, \ldots, n, \\ r + s + t = p. \end{gathered}$$

Zde značí $\psi(x_i, y_\varkappa, z_\lambda)$, že funkce ψ závisí na $x_{r+1}, \ldots, x_n$, $y_{s+1}, \ldots, y_n$, $z_{t+1}, \ldots, z_n$.

Vyjádříme-li těchto $m = 3n - p$ proměnných pomocí m nových proměnných $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, kde

$$(11) \qquad x_i = F_i(\alpha), \quad y_\varkappa = G_\varkappa(\alpha), \quad z_\lambda = H_\lambda(\alpha),$$

lze pomocí těchže proměnných α vyjádřiti též p proměnných x_ϱ, y_σ, z_τ. Třeba jen za veličiny x_i, $y_\varkappa$, z_λ ve funkcích f_ϱ, g_σ, h_τ dosaditi funkce F_i, $G_\varkappa$, H_λ; tím stanou se též veličiny x_ϱ, y_σ, z_τ funkcí proměnných $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Funkce F_i, $G_\varkappa$, H_λ třeba zvoliti tak, aby funkcionalní determinant substituce (11) dle α nebyl identický s nullou.

Poněvadž vazby úplných soustav neobsahují čas, lze souřadnice bodů takové soustavy vyjádřiti pouze pomocí $m = 3n - p$ proměnných α. Jest tedy

$$(12) \qquad x_\nu = F_\nu(\alpha), \quad y_\nu = G_\nu(\alpha), \quad z_\nu = H_\nu(\alpha), \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Veličiny α jsou Lagrange-ovy všeobecné souřadnice. Z d'Alembertova principu plyne, že rovnice pohybové v těchto souřadnicích zní

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_\mu} = A_\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

T jest kinetická energie, A_μ všeobecnou komponentou síly příslušící souřadnici α_μ.

Veličina A_μ jest koefficientem hodnoty $\delta\alpha_\mu$ ve výrazu, v nějž substitucí (12) součet

$$\sum_1^n {}^\nu (X_\nu \delta x_\nu + Y_\nu \delta y_\nu + Z_\nu \delta z_\nu)$$

přejde. Proto jest

$$A_\mu = \sum_1^n {}^\nu \left(X_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial \alpha_\mu} + Y_\nu \frac{\partial G_\nu}{\partial \alpha_\mu} + Z_\nu \frac{\partial H_\nu}{\partial \alpha_\mu}\right).$$

Zde třeba ovšem ve funkcích X_ν, Y_ν, Z_ν, které dle věty druhé závisí jen na souřadnicích x, y, z, nahraditi tyto proměnné veličinami α. Provedeme-li to, obdržíme A_μ jako funkci hodnot $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$. Kdyby veličiny X_ν, Y_ν, Z_ν závisely též na rychlostech x', y', z', byly by i komponenty A_μ funkcí veličin $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ i $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\mu$.

Kinetická energie jest quadratickou formou všeobecných komponent rychlosti

$$T = \sum_1^m{}^h \sum{}^k \mathfrak{A}_{hk}\, \alpha'_h\, \alpha'_k\,,$$

kde koefficienty $\mathfrak{A}$ závisí jen na α, při čemž $\mathfrak{A}_{hk} = \mathfrak{A}_{kh}$.

Následkem toho jest

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_\mu} = \sum_1^m{}^h \sum{}^k \frac{\partial \mathfrak{A}_{hk}}{\partial \alpha_\mu}\, \alpha'_h\, \alpha'_k$$

funkcí souřadnic α a rychlostí α'. Obdobně závisí

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'_\mu} = 2 \sum_1^m{}^k \mathfrak{A}_{\mu k}\, \alpha'_k$$

jen na α i α'. Konečně jest

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha'_\mu}\right) = 2 \sum_1^m{}^k \mathfrak{A}_{\mu k}\, \alpha''_k + 2 \sum_1^m{}^k \alpha'_k \sum_1^m{}^i \frac{\partial \mathfrak{A}_{\mu k}}{\partial \alpha_i}\, \alpha'_i\,.$$

Prvá část tohoto výrazu jest lineárnou homogenní funkcí všeobecných komponent zrychlení, jejíž koefficienty závisí jen na souřadnicích α; druhá část jest funkcí souřadnic a rychlostí.

Uvedeme-li tento výsledek ve spojení s tím, že A_μ závisí jen na α, $\frac{\partial T}{\partial \alpha_\mu}$ závisí na α i α', jest patrno, že Lagrange-ovým rovnicím lze dáti tvar

(13) $\mathfrak{A}_{\mu 1}\alpha''_1 + \mathfrak{A}_{\mu 2}\alpha''_2 + \ldots + \mathfrak{A}_{\mu m}\alpha''_m = f_\mu(\alpha, \alpha')\,,\quad n = 1, 2, \ldots, m,$

kde

$$f_\mu = \tfrac{1}{2}\left(A_\mu + \frac{\partial T}{\partial \alpha_\mu}\right) - \sum_1^m{}^k \sum{}^i \frac{\partial \mathfrak{A}_{\mu k}}{\partial \alpha_i}\, \alpha'_k\, \alpha'_i\,.$$

Jde nyní o to, zda rovnice (13) lze dle α'' řešiti. O tom rozhoduje determinant $\Delta = \Sigma \pm \mathfrak{A}_{11}\, \mathfrak{A}_{22} \ldots \mathfrak{A}_{mm}$. Abychom rozhodli, kdy vymizí, kdy nevymizí, vypočteme koefficienty $\mathfrak{A}_{hk}$. Funkce ty vyskytují se ve výrazu T, proto třeba vyjádřiti

$$T = \sum_1^m{}^\nu \frac{m_\nu}{2}\left(x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2\right)$$

pomocí Lagrange-ových souřadnic. Provedeme-li to, obdržíme, že každé $\mathfrak{A}_{hk}$ rovná se součtu součinů ze dvou faktorů. Užijeme-li pak poučky o determinantech ve Weberově Algebře, vyd. 2. díl I. str. 112., udané, shledáme, že Δ rovná se součtu součinů, z nichž každý skládá se z kladného nenullového faktoru a čtverce jistého determinantu. Proto nevymizí Δ, je-li mezi těmito determinanty alespoň jeden, který nevymizí. A takový determinant lze udati; jest to funkcionální determinant substituce (11).

Poněvadž tedy determinant soustavy (13) nevymizí, plynou z těchto rovnic vždy zcela určité hodnoty pro α''. Funkce f závisí na α, α', koefficienty $\mathfrak{A}_{hk}$ jen na α, proto obdržíme řešením α'' jako funkci souřadnic a rychlostí

$$(14)\qquad \alpha''_\mu = \xi_\mu(\alpha, \alpha'), \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

3. *Důsledky věty druhé.* Srovnejme co právě odvozeno s tím, že počítáme-li v souřadnicích Descartesových, jest

$$(9)\qquad x''_\nu = \overline{X}_\nu, \qquad y''_\nu = \overline{Y}_\nu, \qquad z''_\nu = \overline{Z}_\nu,$$

kde $\overline{X}_\nu$, $\overline{Y}_\nu$, $\overline{Z}_\nu$ závisí též jen na souřadnicích x, y, z a rychlostech x', y', z'.

Abychom jisté věty zároveň o rovnicích (9) i (14) platící mohli způsobem co nejjednodušším vyjádřiti, nahradíme je soustavou

$$(15)\qquad \frac{d\alpha'_\mu}{dt} = \xi_\mu(\alpha, \alpha'), \qquad \frac{d\alpha_\mu}{dt} = \alpha'_\mu, \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

po případě rovnicemi

$$(16)\qquad \begin{matrix} \dfrac{dx'_\nu}{dt} = \overline{X}_\nu, & \dfrac{dy'_\nu}{dt} = \overline{Y}_\nu, & \dfrac{dz'_\nu}{dt} = \overline{Z}_\nu, \\ \dfrac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu, & \dfrac{dy_\nu}{dt} = y'_\nu, & \dfrac{dz_\nu}{dt} = z'_\nu. \end{matrix} \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Veličiny α, α' neb soustava všech hodnot x, y, z, x', y', z' určují stav soustavy (viz § 1.). Označme nyní obecné souřadnice stavu písmenami $u_1, u_2, \ldots, u_s$; stav těmito souřadnicemi daný budiž u. Počítáme-li v souřadnicích Lagrange-ových, jest $s = 2m$,

$u_\mu = \alpha_\mu$, $u_{\mu+m} = \alpha'_\mu$; užíváme-li souřadnic Descartesových, jest $s = 6n$,

$$\begin{matrix} u_\nu = x_\nu, & u_{\nu+n} = y_\nu, & u_{\nu+2n} = z_\nu, \\ u_{\nu+3n} = x'_\nu, & u_{\nu+4n} = y'_\nu, & u_{\nu+5n} = z'_\nu. \end{matrix} \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Zavedeme-li toto společné označení, lze soustavu rovnic (15) i (16) nahraditi jedinou

$$(17) \qquad \frac{du_\sigma}{dt} = \eta_\sigma(u), \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

Zde značí $\eta(u)$, že funkce η závisí na $u_1, \ldots, u_s$.

Pohyb soustavy jest rovnicemi (17) dokonale určen, známe-li v jisté době t_0 stav její u_0, jenž dán souřadnicemi $u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0s}$.

Stanovme nyní, že od okamžiku t_0, v němž soustava jest ve stavu u_0, budeme čítati čas, t. j. položme $t_0 = 0$; kladnými čísly vytkneme pak čas po době t_0, zápornými před dobou t_0. Úlohou naší jest pak integrovati rovnice

$$\frac{du_\sigma}{\eta_\sigma} = dt, \qquad \sigma = 1, \ldots, s,$$

tak, aby pro $t = 0$ bylo $u_\sigma = u_{0\sigma}$. Integrací této soustavy obdržíme však jednočlenou skupinu transformací*) T_t, jež dána rovnicemi

$$u_\sigma = F_\sigma(u_{01}, \ldots, u_{0s}, t), \qquad \sigma = 1, \ldots, s.$$

Proměnný parametr skupiny jest t.

Jest výhodno označovati v dalším písmenami u_σ stav počáteční, písmenami $\overline{u_\sigma}$ stav po době t. V tomto označení jest skupina T_t dána vzorci

$$\overline{u_\sigma} = F_\sigma(u, t), \qquad \sigma = 1, \ldots, s.$$

Lie-ův symbol této skupiny jest pak

$$Af \equiv \sum_1^s{}^\sigma \eta_\sigma \frac{\partial f}{\partial u_\sigma}.$$

*) *Scheffers-Lie*, Differentialgleichungen, kap. 14.

Užíváme-li souřadnic Descartesových, jest

$$(18)\qquad \Delta f \equiv \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left[x'_{\nu}\frac{\partial f}{\partial x_{\nu}}+y'_{\nu}\frac{\partial f}{\partial y_{\nu}}+z'_{\nu}\frac{\partial f}{\partial z_{\nu}} + \overline{X}_{\nu}\frac{\partial f}{\partial x'_{\nu}}+\overline{Y}_{\nu}\frac{\partial f}{\partial y'_{\nu}}+\overline{Z}_{\nu}\frac{\partial f}{\partial z'_{\nu}}\right],$$

počítáme li v Lagrange-ových souřadnicích, jest

$$(19)\qquad \Delta f \equiv \sum_{1}^{m}{}_{\mu}\left[\alpha'_{\mu}\frac{\partial f}{\partial \alpha_{\mu}}+\xi_{\mu}\frac{\partial f}{\partial \alpha'_{\mu}}\right].$$

Z Lie-ových vět o jednočlenných skupinách plynou snadno obecné věty mechanické.

Poněvadž rovnicemi T_t dána jednočlenná skupina transformací, v níž postup transformací s parametry t a t_1 lze nahraditi jedinou transformací s parametrem $t+t_1$, obdržíme eliminací veličin $\overline{u}$ z rovnic

$$(20)\qquad \overline{u}_{\sigma} = F_{\sigma}(u,\ t)$$
$$(21)\qquad \overline{\overline{u}}_{\sigma} = F_{\sigma}(\overline{u},\ t_1) \qquad \sigma=1,\dots,s,$$

rovnice

$$(22)\qquad \overline{\overline{u}}_{\sigma} = F_{\sigma}(u,\ t+t_1).$$

Tato souvislost vypsaných vzorců vyznačuje se symbolickou rovnicí

$$(23)\qquad T_t T_{t_1} = T_{t+t_1}.$$

Tento vztah lze interpretovati. Vzorcové (20) udávají, že soustava přejde ze stavu u během doby t do stavu $\overline{u}$. Rovnice (21) udávají, že táže soustava přejde během doby t_1 ze stavu $\overline{u}$ ve stav $\overline{\overline{u}}$. Rovnice (22) praví pak, že soustava, jež přešla během doby t ze stavu u ve stav $\overline{u}$ a ze stavu $\overline{u}$ během doby t_1 ve stav $\overline{\overline{u}}$, přejde tam, kam se soustava dostane ze stavu u během doby $t+t_1$. Zkrátka můžeme říci, že soustava přejde během doby t a doby t_1 tam, kam přejde během doby $t+t_1$.

Dále plyne z Lie-ových vět, že rovnicím transformace T_t lze dáti tvar

$$\Omega_i(\overline{u_1},\ldots,\overline{u_s}) = \Omega_i(u_1,\ldots,u_s), \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots,s-1}$$
$$\mathrm{W}(\overline{u_1},\ldots,\overline{u_s}) - t = \mathrm{W}(u_1,\ldots,u_s).$$

Funkci W lze nalézti kvadraturou, známe-li výrazy Ω_i.

Zavedením nových proměnných lze rovnice T_t převésti na tvar

$$\overline{\mathfrak{x}_i} = \mathfrak{x}_i, \quad \overline{\mathfrak{x}_s} = \mathfrak{x}_s + t. \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots,s-1.}$$

Jsou-li stavy dvou různých soustav určeny stejným počtem proměnných, lze rovnice T_t prvé soustavy transformovati zavedením nových proměnných v rovnice T, jež přísluší druhé soustavě.

Libovolnou funkci veličin $\overline{u}$ lze rozvinouti v jednoduchou řadu, která udává, jak se daná funkce stavu soustavy s časem mění. Je-li $f(\overline{u})$ onou funkcí, jest

$$f(\overline{u}) = f(u) + tAf(u) + \frac{t^2}{2!}A[Af(u)] + \frac{t^3}{3!}A\left\{A[Af(u)]\right\} + \ldots$$

Zde jest $Af(u) = \varphi(u)$ funkce veličin u, jež vznikne, dosadíme-li do Lie-ova symbolu Af za funkci f danou funkci $f(u)$. Výraz $A[Af(u)]$ jest pak $A\varphi u = \psi(u)$ atd.

Dosadíme-li za $f(\overline{u})$ jen $\overline{u_\sigma}$, obdržíme integrály differencialních rovnic (17)

$$\overline{u_\sigma} = u_\sigma + tAu_\sigma + \frac{t^2}{2!}AAu_\sigma + \ldots \qquad \sigma = 1,\ldots,s.$$

Rovnice ty jsou identické se soustavou rovnic T_t.

Všechny věty zde uvedené, k nimž lze připojiti ještě některé další, platí, ať počítáme v Lagrange-ových neb Descartesových souřadnicích, neobsahují-li vazby čas a závisí-li síly jen na souřadnicích.

Ostatně zůstane vše v tomto § uvedené v platnosti i tehdá, závisejí-li síly též na rychlostech.

§ 4. *Skupina všech pošinutí a otočení v Lagrange-ových souřadnicích.* Soustava měj vazby $\varphi_\pi = c_\pi$, $\pi = 1,\ldots,p$, o nichž platí věta prvá, t. j. je-li jednou polohou soustavy $(x, y, z)\varrho$, druhou $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\overline{\varrho}$ jest,

$$\varphi_\pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varphi_\pi(x, y, z),$$

je-li
$$\bar{\varrho} = \varrho S.$$

Transformace S značí zase skupinu všech pošinutí a otočení, jejíž vzorcové vypsány v § 1.

Zaveďme nyní místo $3n$ Descartesových souřadnic do vzorců transformace S jiné proměnné pomocí transformace H, jež dána vzorci

$$(24)\quad \begin{aligned} \alpha_\mu &= \psi_\mu(x_i, y_\varkappa, z_\lambda), & \mu &= 1, \ldots, m, \quad \text{kde } m = 3n - p, \\ \beta_\pi &= \varphi_\pi(x, y, z), & \pi &= 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Poloha $\bar{\varrho}$ dána v této soustavě souřadnic proměnnými $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, kde

$$(25)\quad \bar{\alpha}_\mu = \psi_\mu(\bar{x}_i, \bar{y}_\varkappa, \bar{z}_\lambda), \qquad \bar{\beta}_\pi = \varphi_\pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Veličiny α jsou Lagrange-ovy všeobecné souřadnice, jež zavedeny v § 3. odst. 2. Tam udán též význam výrazu $\psi(x_i, y_\varkappa, z_\lambda)$.

Přesvědčme se nyní, že pomocí vzorců H lze vskutku proměnné x, y, z vyjádřiti veličinami α, β.

Soustavu vzorců $\alpha_\mu = \psi_\mu$ lze dle $x_i, y_\varkappa, z_\lambda$ řešiti, čímž obdržíme transformační vzorce z § 3. odst. 2., jimiž Lagrangeovy souřadnice zavedeny,

$$(11)\quad x_i = F_i(\alpha), \qquad y_\varkappa = G_\varkappa(\alpha), \qquad z_\lambda = H_\lambda(\alpha).$$

Zbývající veličiny $x_\varrho, y_\sigma, z_\tau$ lze (viz § 3. odst. 2.) pomocí rovnic $\varphi_\pi(x, y, z) = c_\pi$ vyjádřiti veličinami $x_i, y_\varkappa, z_\lambda$. Proto obdržíme řešením rovnic $\varphi_\pi = \beta_\pi$ proměnné $x_\varrho, y_\sigma, z_\lambda$ jako funkci veličin β_π a všech $x_i, y_\varkappa, z_\lambda$; vyjádříme-li ještě tyto Descartesovy souřadnice pomocí rovnic (11) veličinami α, obdržíme, že

$$(26)\quad x_\varrho = f_\varrho(\alpha, \beta), \qquad y_\sigma = g_\sigma(\alpha, \beta), \qquad z_\tau = h_\tau(\alpha, \beta).$$

Celkem jest tedy inversní transformace H^{-1} dána vzorci

$$\begin{aligned} (11)\quad & x_i = F_i(\alpha) & y_\varkappa &= G_\varkappa(\alpha) & z_\lambda &= H_\lambda(\alpha), \\ (26)\quad & x_\varrho = f_\varrho(\alpha, \beta), & y_\sigma &= g_\sigma(\alpha, \beta), & z_\tau &= h_\tau(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Stran indexů $i, \varkappa, \lambda, \varrho, \sigma, \tau$ viz § 3. odst. 2.

Zaveďme nyní do vzorců skupiny S

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\overline{x}_\nu &= a_1 x_\nu + a_2 y_\nu + a_3 z_\nu + a_0\,,\\
\overline{y}_\nu &= b_1 x_\nu + b_2 y_\nu + b_3 z_\nu + b_0\,, \qquad \nu = 1, \ldots, n,\\
\overline{z}_\nu &= c_1 x_\nu + c_2 y_\nu + c_3 z_\nu + c_0\,,
\end{aligned}
$$

pomocí transformace H nové proměnné α, β. Tím obdržíme transformaci, jež převádí α, β v $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, která vznikne, provedeme-li nejprve transformaci H^{-1} danou vzorci (11) a (26), pak S, jejíž rovnice jsou (27), a konečně H danou vzorci (25). Třeba tedy nalézti transformaci $\mathrm{H}^{-1}\mathrm{SH}$.

Utvořme nejprve SH. Dosadíme-li z rovnic (27) za proměnné $\overline{x}_\nu$, $\overline{y}_\nu$, $\overline{z}_\nu$ do rovnic (25), obdržíme, poněvadž funkce φ_π jsou invarianty skupiny S, že

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
\overline{\beta}_\pi &= \varphi_\pi(x, y, z),\\
\overline{\alpha}_\mu &= \psi_\mu(a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i + a_0\,,\ b_1 x_\varkappa + b_2 y_\varkappa + \ldots + b_0\,,\\
&\qquad\qquad c_1 x_\lambda + \ldots + c_0).
\end{aligned}
$$

Vyhledáme-li nyní transformaci $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{SH})$ ze vzorců (28), (11) a (26), obdržíme

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
\overline{\beta}_\pi &= \beta_\pi\,, & \pi &= 1, \ldots, p,\\
\overline{\alpha}_\mu &= \chi_\mu(\alpha, \beta, a, b, c)\,, & \mu &= 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Všimněme si nyní blíže funkcí χ_μ. Každá z funkcí těch závisí obecně ne jen na Lagrange-ových souřadnicích α, ale též na proměnných β, poněvadž nelze předpokládati, že indexy i, $\varkappa$, λ probíhají tytéž hodnoty. Náleží-li na př. x_3 mezi veličiny x_i, není nutno, aby též y_3 byla jednou z proměnných $y_\varkappa$. y_3 může náležeti mezi hodnoty y_σ. Jak ze vzorců (28) patrno, objeví se ve funkcích ψ_π veličina y_3, když x_3 náleží mezi hodnoty x_i. Eliminujeme-li pak x_3 a y_3 pomocí vzorců (11) a (26), nahradíme sice x_3 jen funkcí veličin α, ale y_3 funkcí veličin α i β, ježto y_3 náleží mezi proměnné $y_\sigma = g_\sigma(\alpha, \beta)$.

Dále závisí χ_μ na parametrech a, b, c substituce S, poněvadž funkce ψ_μ ve vzorcích (28) tyto hodnoty obsahují.

Lze snadno dokázati,*) že vzorci (29) dána zase šesti-

*) *Lie-Engel*, Theorie der Transformationsgruppen, Teubner, 1888, sv. I. str. 24. — Viz též *Scheffers*, Continuirliche Gruppen, Cap. 6, § 4.

členná skupina transformací, jež ke každé své transformaci obsahuje inversní. Provedeme-li po transformaci, jež dána vzorci (29), zase transformaci téže skupiny

$$(30) \qquad \bar{\bar{\beta}}_\pi = \bar{\beta}_\pi, \qquad \bar{\bar{\alpha}}_\mu = \chi_\mu(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}),$$

obdržíme eliminací proměnných $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ z rovnic (29) a (30), že

$$(31) \qquad \bar{\bar{\beta}}_\pi = \beta_\pi, \qquad \bar{\bar{\alpha}}_\mu = \chi_\mu(\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}),$$

kde A, B, C jsou parametry substituce S, jež vznikne, provedeme-li nejprve transformaci S s parametry a, b, c, pak transformaci S s parametry $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Dále lze veličiny $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ zvoliti jako funkce parametrů a, b, c tak, že rovnice (31) redukují se na

$$\bar{\bar{\beta}}_\pi = \beta_\pi, \qquad \bar{\bar{\alpha}}_\mu = \alpha_\mu;$$

i zde jest transformace S, mající parametry $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ inversní k transformaci S, jež má parametry a, b, c.

Ale již vzorci

$$(32) \qquad \bar{\alpha}_\mu = \chi_\mu(\alpha, \beta, a, b, c), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

dána šestičlená skupina transformací $\mathfrak{A}$, jež převádí proměnné α v hodnoty $\bar{\alpha}$. Neboť veličiny β_π se vůbec transformací (29) nezmění. Proto lze rovnice (30) nahraditi ihned soustavou

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu = \chi_\mu(\bar{\alpha}, \beta, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Z předchozího plyne pak, že postup obou vypsaných transformací lze nahraditi transformací

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu = \chi_\mu(\alpha, \beta, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$$

a že veličiny $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ lze zvoliti tak, aby výsledná transformace redukovala se na identickou $\bar{\bar{\alpha}}_\mu = \alpha_\mu$.

Proto dána vzorci (32) skupina takové povahy jako S. Nevezmeme-li v dalším na veličiny β ohled, což přípustno, poněvadž vazby $\beta_\pi = c_\mu$ jsou pro danou soustavu konstantami, jest transformace $\mathfrak{A}$ dána vzorci

(33) $\qquad \alpha_\mu = \chi_\mu(\alpha, a, b, c), \qquad \mu = 1, \ldots, m.$

Veličiny a, b, c jsou koefficienty orthogonalní substituce. Ať tedy počítáme v Lagrange-ových neb Descartesových souřadnicích, můžeme vždy nalézti šestičlenou skupinu, jež udává, jak se souřadnice soustavy změní, přejde-li tato do jiné polohy pošinutím a otočením.

Symboly infinitesimálních transformací této skupiny jsou výrazy $V_i f$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, vypsané v § 1., počítáme-li v souřadnicích Descartesových. Užíváme-li Lagrange-ových, lze symboly skupiny $\mathfrak{A}$, jež dána vzorci (33), buď z těchto vzorců neb přímo z výrazů V_i odvoditi. Označme je v dalším

$$U_i f \equiv \sum_1^m{}^\mu \eta_{i\mu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu}, \qquad i = 1, \ldots, 6,$$

kde $\eta_{i\mu}$ závisí na souřadnicích α.

Již v § 1. uvedena t. zv. rozšířená skupina všech pošinutí a otočení, která představuje transformaci stavu x, y, z, x', y', z' ve stav $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}'$. Tam udány též symboly $V'_i f$, $i = 1, \ldots, 6$, této skupiny.

Obdobným způsobem lze rozšířiti skupinu $\mathfrak{A}$. K tomuto rozšíření přijdeme následujícím způsobem:

Znázorněme polohu α i $\overline{\alpha}$ bodem m-rozměrného prostoru a představme si, že bod α i bod $\overline{\alpha}$ se pohybuje. V době t zaujímají body polohu α resp. $\overline{\alpha}$, kde $\overline{\alpha} = \alpha\mathfrak{A}$. Po době dt zaujímají tyto body polohy β resp. $\overline{\beta}$, kde $\beta_\mu = \alpha_\mu + \alpha'_\mu dt$, $\overline{\beta}_\mu = \overline{\alpha}_\mu + \overline{\alpha}'_\mu dt$, $\mu = 1, \ldots, m$. Žádáme-li nyní opět, aby $\overline{\beta} = \beta\mathfrak{A}$, při čemž $\mathfrak{A}$ značí transformaci s týmiž parametry jako $\mathfrak{A}$ původní, jež převádí α v $\overline{\alpha}$, závisí rychlosti $\overline{\alpha}'$ na α i α'. Jak tyto veličiny souvisí, plyne ze vzorců

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \alpha\mathfrak{A} & \overline{\alpha}_\mu &= \chi_\mu(\alpha, a, b, c), \\ \overline{\beta} &= \beta\mathfrak{A} & \overline{\alpha}_\mu + \overline{\alpha}'_\mu dt &= \chi_\mu(\alpha + \alpha' dt, a, b, c), \end{aligned} \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

z nichž plyne

$$\overline{\alpha}_\mu = \chi_\mu(\alpha, a, b, c), \quad \overline{\alpha}'_\mu = \sum_1^m{}^s \frac{\partial \chi_\mu}{\partial \alpha_s} \alpha'_s.$$

Těmito $2m$ rovnicemi dána t. zv. rozšířená transformace, kterou v dalším značíme $\mathfrak{A}'$. Transformace ta udává, jak souvisí stav α, α' se stavem $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha}'$, souvisí-li polohy obou soustav tímtéž pošinutím a otočením v době t i $t + dt$.

Lze snadno dokázati, že též transformace $\mathfrak{A}'$ tvoří skupinu*) jako $\mathfrak{A}$. Symboly**) $U'_i f$, $i = 1, \ldots, 6$, infinitesimalních transformací skupiny $\mathfrak{A}'$ lze odvoditi ze symbolů $U_i f$ skupiny $\mathfrak{A}$, jež považujeme za známé. Jsou-li symboly ty dány vzorci

$$U_i f \equiv \sum_1^m {}_\mu \, \eta_{i\mu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\mu},$$

jsou symboly rozšířené skupiny $\mathfrak{A}'$

$$U'_i f \equiv U_i f + \sum_1^m {}_\mu \frac{\partial f}{\partial \alpha'_\mu} \sum_1^m {}_s \frac{\partial \eta_{i\mu}}{\partial \alpha_s} \alpha'_s, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Co v tomto § odvozeno, lze shrnouti v poměrně jednoduchý výsledek. Vznikne-li jedna poloha soustavy z druhé pošinutím a otočením, souvisí polohy ty, ať užíváme Descartesových či Lagrange-ových souřadnic, jistou transformací P; transformace ty tvoří šestičlenou skupinu. V Descartesových souřadnicích jest skupina $P \equiv S$, v Lagrange-ových jest $P \equiv \mathfrak{A}$. Souvisí-li polohy soustavy touže transformací P v době t i $t + dt$, souvisí stavy soustavy rozšířenou transformací P'. Též transformace P' tvoří šestičlenou skupinu. Použijeme-li opět obecných souřadnic stavu u_σ, jež zavedeny v § 3., a je-li u stav původní, $\overline{u}$ stav transformovaný, jest $\overline{u} = uP'$. Skupina P' vytvořena infinitesimalními transformacemi

$$W'_i f \equiv \sum_1^s {}_\sigma \, \psi_\sigma(u) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma}, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Počítáme-li v souřadnicích Descartesových, jest $P' \equiv S'$ a $W'_i \equiv V'_i$, užíváme-li souřadnic Lagrange-ových, jest $P' \equiv \mathfrak{A}'$ a $W'_i \equiv U'_i$.

(Pokračování.)

*) *Lie, Engel,* „Transformations-Gruppen" svazek I., str. 524.

**) Tamtéž, sv. I., str. 526.