Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Procházka; Milan Mikan

Poznámka ke konstrukci kuželoseček z prvků dílem imaginárných

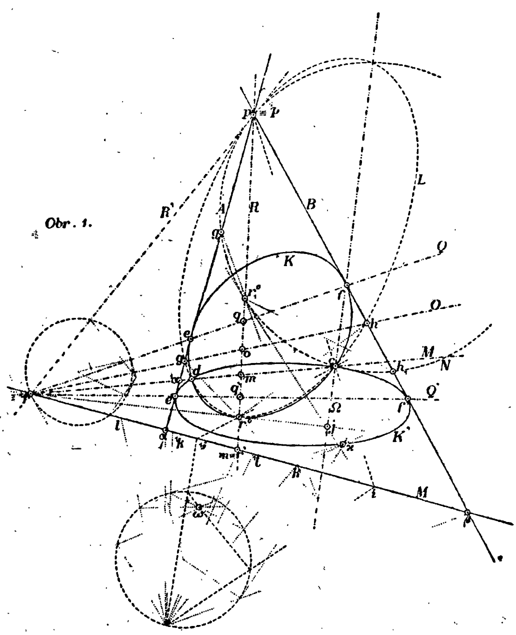
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 3, 226--247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122605

„Poznámka ke konstrukci kuželoseček z prvků dílem imaginárných."

Napsali profesor *Bedřich Procházka* a profesor *Milan Mikan,* asistent čes. vysokého učení technického v Praze.

Prof. Vincenc Jarolímek uvádí ve svém, hlavně po stránce didaktické velmi cenném, díle »Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru« mezi mnohými zajímavými



Obr. 1.

konstrukcemi v odstavci »Konstrukce kuželoseček z prvků dílem imaginárných« též konstrukci kuželosečky ze dvou sdružených bodů imaginárných, dvou sdružených tečen imaginárných a dalšího bodu reálného,[1]) již lze též jiným způsobem řešiti následovně:

1. Abychom tuto úlohu rozřešili, budeme se zabývati dříve úlohou: sestrojiti kuželosečku *K*, určenou dvěma body imaginár-

[1]) Svazek II., odst. 118.

nými a_i b_i dvěma tečnami reálnými AB a bodem reálným c, již však do jisté míry jinak rozřešíme, než jak se děje ve shora uvedeném spisu.[2]) Imaginárné body a_i b_i buďtež dány involuční řadou eliptickou (k ^1k, l ^1l) na přímce M (obr. 1.). Involuce svazku harmonických polár o středu p, daná reálnými tečnami AB jakožto samodružnými paprsky vytíná na přímce M involuci bodovou o reálných samodružných bodech $\alpha \equiv (MA)$ a $\beta \equiv (MB)$. Společná družina r r' těchto dvou soumístných involučních řad (α β) a (k ^1k, l ^1l), již známou konstrukcí docílíme, vede nás k pólu r a příslušné poláře $R \equiv \overline{pr'}$ dvou — jak uvidíme — možných kuželoseček K a K' (obr. 1.), hořejším podmínkám vyhovujících, a k pólu r' a příslušné poláře $R' \equiv \overline{pr}$ druhých dvou kuželoseček K'' a K'''. Přihlédněme zatím jen k případu prvému, jímž docílíme kuželoseček K a K'.

Další bod reálný d kuželosečky K a K' dostaneme jakožto čtvrtý bod harmonický k bodu c vůči bodům r a ^1m, kdež ^1m jest průsečíkem poláry R se spojnicí $\overline{rc} \equiv {}^1M$.

Tím je převedena tato úloha na úlohu sestrojiti kuželosečku ze dvou bodů imaginárných a_i b_i, dvou reálných bodů c d a tečny reálné A (nebo B), která nás vede ke dvěma řešením K a K', jak bylo již dříve zmíněno. Sestrojujíce tyto kuželosečky pokračujeme takto:[3]) Sestrojíme samodružné body řady involuční, v níž tečna A protíná svazek kuželoseček, určený základními body a_i b_i c d, jehož jednou zvrhlou kuželosečkou jest dvojice přímek $M \equiv \overline{a_i b_i}$ a $^1M \equiv \overline{cd}$. Druhou kuželosečku L tohoto svazku vzhledem k řešení naší vlastní úlohy, kdy i tečny AB jsou přímkami imaginárnými, zvolíme tak, aby procházela bodem p, jakožto středem hyperbolického involučního svazku harmonických polár vůči kuželosečce K nebo K' o reálných samodružných paprscích A a B. Tuto kuželosečku, určenou body a_i b_i, c d, p známým způsobem sestrojíme [4]) a vyhledáme druhý průsečný bod g kuželosečky L s tečnou A. Přihlížíme-li zároveň k tomu, že všechny kuželosečky tohoto svazku (a_i b_i, cd) jsou involutorně kollineárné dle pólu r jakožto středu a poláry R jakožto osy kollineace, bude kuželosečka L míti, jak zřejmo, spojnici $\overline{rp} \equiv R'$ za svoji tečnu a tudíž stačí ke konstrukci této kuželosečky, určené bodem p, bodem soumezným ^1p na tečně R' bodem c a involuční řadou eliptickou k ^1k, l ^1l ještě jeden její reálný bod, totiž bod r^0 na poláře R. Za tím účelem sestrojíme v involuční řadě k ^1k, l ^1l (obr. 1.) sdružený bod ^1i k bodu $i \equiv (M\overline{pc})$. Spojnice $\overline{^1ic}$ protíná R v žáda-

---

[2]) Tamtéž, svazek II., odst. 117. (v levo).

[3]) Tamtéž, svazek II., odst. 115 (na levo).

[4]) Tamtéž, svazek II. odst. 112 (na levo).

ném bodě r^0.[5]) Mimo to shledáváme, že kuželosečka L protíná tečnu B v bodě h, ležícím na kollineárném paprsku $\overline{rgh} \equiv 0$.

Abychom sestrojili průsečíky gh přímek AB s kuželosečkou L, můžeme užíti také centrálné kollineace s kružnicí N, která se v bodě p dotýká přímky R' a tudíž i kuželosečky L. Potom je bod p středem kollineace křivek L, N. Nechať zároveň kružnice N prochází bodem c; potom osa kollineace Ω křivek LN prochází též bodem tímto a průsečíkem j tečny $\overline{rr^0}$ kuželosečky L s tečnou kružnice N v bodě r^0_1, kollineárném k bodu r^0. Body gh určující osu O jsou kollienárné k průsečíkům g_1 h_1 kružnice N s přímkami AB. (Spojnice $\overline{gr^0}$, $\overline{g_1r^0_1}$ a $\overline{hr^0}$, $\overline{h_1r^0_1}$ protínají se na ose Ω.)

Ze dvojin $a\ {}^1a \equiv (A\ {}^1M)$, pg jakožto družin involuční řady vzniknuvší na tečně A sestrojíme samodružné body e a e' (obr. 1.) jakožto dotyčné body žádaných kuželoseček K a K', kteréž se současně dotýkají tečny B v kollineárných bodech f, f' vůči středu r a ose kollineace R na kollineárních paprscích Q a Q s body e a e' se nalézajících. Jsou tudíž přímky Q a Q' p o l á r a m i b o d u p vůči žádaným kuželosečkám K a K'. Je zřejmo, že paprsky $M\ {}^1M$, $R'O$ tvoří involuční svazek paprskový, jehož samodružné paprsky jsou paprsky Q, Q'. Proto i řada bodů $m\ {}^1m$, op, vzniknuvší tímto svazkem na poláře R, jest též involucí a body $q \equiv (QR)$ a $q' \equiv (Q'R)$ její body samodružné. (Příslušná konstrukce těchto bodů je z obr. 1. zřejma. Z tečen AB, dotýkajících se kuželosečky K (resp. K') v bodech ef (resp. $e'f'$) lze potom kuželosečku K (resp. K') obsahující mimo to bod c (jakož i bod d) sestrojiti známým způsobem.[6])

Vzhledem k řešení vlastní úlohy, kdy i tečny AB jsou imaginárními, bude třeba konstatovati, že b o d y gh (obr. 1.) j s o u s a m o d r u ž n ý m i b o d y i n v o l u č n í ř a d y, k t e r o u s t a n o v í n a k u ž e l o s e č c e L s v ý m i s a m o d r u ž n ý m i p a p r s k y AB i n v o l u č n í s v a z e k h a r m o n i c k ý c h p o l á r, i n d u k o v a n ý k ř i v k o u K v b o d ě p. P a p r s e k $\overline{gh} \equiv O$ s v a z k u r j e s t t u d í ž o s o u t é t o i n v o l u č n í ř a d y, v z n i k n u v š í n a k u ž e l o s e č c e L.

2. Přistupme nyní k vlastnímu případu

$$K \not\equiv a_i\, b_i,\ A_i\ B_i,\ c.$$

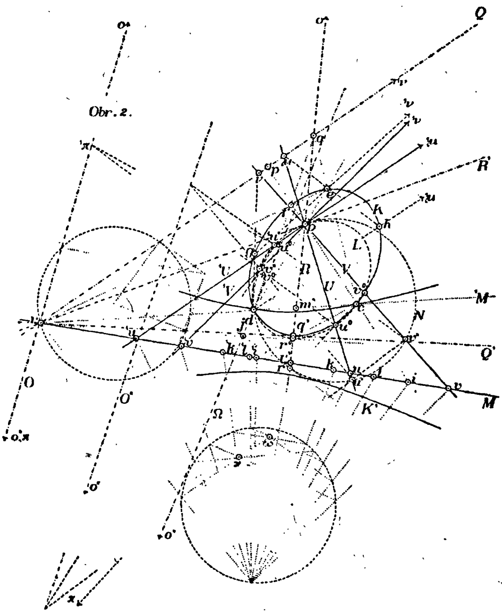
Imaginárné body sdružené $a_i\, b_i$ buďtež opět dány involuční řadou eliptickou ($k\ {}^1k$, $l\ {}^1l$) na přímce M (obr. 2.) a imaginárné tečny sdružené $A_i B_i$ jako imaginárné samodružné paprsky eliptického svazku involučního harmonických polár ($U\ {}^1U$, $V\ {}^1V$), který hledaná kuželosečka K v bodě p indukuje. Tento svazek vytíná na přímce M involuční řadu $u\ {}^1u$, $v\ {}^1v$. Společná družina těchto dvou řad soumíst-

[5]) Je zřejmo, že z právě uvedeného důvodu jest spojnice rr^0 též tečnou kuželosečky L.

[6]) Pomocí věty Pascalovy.

ných budou body $\overline{rr'}$ (obr. 2.), kdež přímka pr' jest polárou $\underline{R}$, příslušnou k pólu r vůči hledané kuželosečce K a K' a přímka $\overline{pr}$ jest polárou R', příslušnou k pólu r' vůči dalším dvěma kuželosečkám K'' a K'''.

Přihlížejíce k případu prvému (rR), sestrojíme k bodu c bod harmonicky sdružený d k bodům r a m', kde m' je průsečíkem přímky ${}^1M \equiv \overline{rc}$ s polárou R. Na to, jako v úloze předchozí, sestrojíme kuželosečku pomocnou L, procházející body $a_i\, b_i\; cd\; p$ a dotýkající se přímky $R' \equiv \overline{rp}$ v bodě p.[7]) Též zde sestrojíme bod r^0



kuželosečky L na poláře R tím, že spojíme bod r' (obr. 2.), odpovídající bodu r, v němž tečna R' přímku M protíná, s bodem p, na to spojíme bod c s bodem sdruženým ${}^1i$ k bodu $i \equiv (\overline{pc}M)$ v involuční řadě $K\,{}^1K$, $l\,{}^1l$ a bod $(R\;{}^1ic)$ jest bodem r^0 a $\overline{rr^0}$ tečnou kuželosečky L.

Jako tam vyhledáme involuční osu O involuční řady $u^0\,{}^1u^0$, $v^0\,{}^1v^0$, kterou určuje na kuželosečce L svazek $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$, tentokráte eliptický. Tehdy (obr. 1.) byla osou involuce přímka O, spojující body gh jakožto průsečíky samodružných paprsků AB svazku, jež u r č o v a l s v a z e k h a r m o n i c k ý c h p o l á r o s t ř e d u p v kuželosečce L.

---

7) Tamtéž, svazek II., odst. 112 (v levo).

V tomto případě (obr. 2.) jest to spojnice O průsečíků $\pi \equiv (\overline{u^0 v^0}, \overline{{}^1u^0\, {}^1v^0})$ a ${}^1\pi \equiv (\overline{u^0\, {}^1v^0}, \overline{{}^1u^0\, v^0})$ nesouhlasných bodů involuční řady $u^0 v^0$, ${}^1u^0\, {}^1v^0$,[8]) kteráž vzhledem ke zvláštní poloze kuželoseček K, L prochází bodem r jako dříve.

K sestrojení osy O lze užíti jako v případě předchozím centrálné kollineace kuželosečky L s pomocnou kružnicí N, dotýkající se přímky R' v bodě p jakožto středu kollineace protínající involuční svazek ($U\, {}^1U$, $V\, {}^1V$ v řadě bodové $u^\times\, {}^1u^\times\, v^\times\, {}^1v^\times$ (obr. 2.). Zvolíme tu kružnici, která prochází bodem d. Spojnice průsečíků $(\overline{u^\times v^\times}, \overline{{}^1u^\times\, {}^1v^\times})$ a $(\overline{u\, {}^1v}, \overline{{}^1uv})$ jest osou O involuce v této řadě na kružnici N.

Této ose $O^\times$ odpovídá v involuci $u^0\, {}^1u^0$, $v^0\, {}^1v^0$ žádaná osa O, s níž se na ose kollineace Ω v bodě $o^\times$ protíná, procházejíc zároveň bodem r. Osa kollineace Ω prochází bodem d a průsečíkem j tečen ke kuželosečkám L, N v kollineárných bodech r_0, $r^\times$ jako v případě předchozím.

Také zde tvoří přímky $M\, {}^1M$, $R'O$ svazek involuční o středu r, stanovící v poláře R řadu involuční $r'm'po$ ($m' \equiv ({}^1MR)$, $o \equiv (OR)$), jehož samodružnými body q a q' procházejí samodružné paprsky Q a Q' onoho svazku involučního jakožto přímky reálné.

Paprsky Q a Q' jsou opět p o l á r a m i bodu p vůči kuželosečkám K a K' a protínají je v bodech imaginárných, ve kterých se tečny $A_i\, B_i$ kuželoseček těchto dotýkají.

Z pólu p a příslušné poláry Q lze k bodu c sestrojiti další bod f křivky K tak, aby dvojpoměr $(p\, {}^1pcf) = -1$, kde ${}^1p \equiv (\overline{pcQ})$ a k bodu d týmž způsobem bod e. Reálnými body cdf a involuční řadou eliptickou ($\mu\, {}^1\mu\; v\, {}^1v$), na poláře Q bodu p vyťatou svazkem ($U\, {}^1U$, $V\, {}^1V$), je kuželosečka K stanovena a lze ji sestrojiti.[9]) Spojnice $\overline{vd}$, $\overline{{}^1ve}$ protínají se v dalším bodě g kuželosečky K a spojnice $\overline{\mu e}$ $\overline{{}^1\mu d}$ v bodě h. Ž á d a n á k u ž e l o s e č k a K j e p ě t i z t ě c h t o š e s t i r e á l n ý c h b o d ů ($cdefgh$) s t a n o v e n a.

Zvláštní případ této úlohy by nastal, kdyby bod p jakožto střed eliptického svazku harmonických polár byl o h n i s k e m, v kterémžto případě by se tento svazek stal pravoúhelným.

Další zvláštní případy úlohy $K \not\!\!Z\, (a_i\, b_i,\ A_i B_i, c)$ by též nastaly:

a) Kdyby body $a_i b_i$ ležely v úběžné přímce E_∞ a tudíž by byly samodružnými body involuční řady, určené involučním svazkem eliptickým, shodným a shodně položeným ke svazku sdružených průměrů žádané kuželosečky eliptické.

Povšimnutí zasluhuje i onen případ, kdy by $a_{i\infty}$ $b_{i\infty}$ bylo dáno směrem paprsků sdružených průměrů a tečny A_i, B_i žádané kuželosečky nahrazeny byly ohniskem.

---

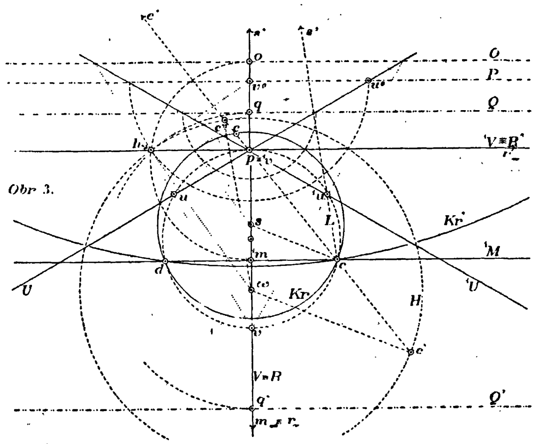
[8]) Jarolímek-Procházka: Deskr. geom. pro vys. školy technické, odstavec 78a.

[9]) Jarolímek: »Základové g. p.«, svazek II., odst. 113 (v levo).

b) Kdyby střed p eliptického svazku paprsků $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ byl bodem úběžným a proto tento svazek vlastně osnovou paprsků. Poněvadž bod p_∞ musí ležet ve vnitřní části této kuželosečky, je určená kuželosečka v tom případě hyperbolou.

c) Bod c může býti bodem úběžným a proto kuželosečka hledaná by musela být hyperbolou. Je zřejmo však, že bod c ani bod p nemohou ležet na přímce $\overline{a_i\, b_i}$.

3. Konstrukce ve článku 2. uvedené lze též použíti při úloze: »S e s t r o j i t i k r u ž n i c i K d a n o u d v ě m a t e č n a m i i m a g i n á r n ý m i $A_i\, B_i$ a b o d e m r e á l n ý m c.« Vedle těchto prvků



obsahuje árciť tato kružnice K ještě imaginárné body kruhové $a_{i\infty}\, b_{i\infty}$ na úběžné přímce E_∞ a jest tudíž vlastně zvláštním případem onoho, uvedeného v předchozím článku v oddílu *a*).

Postupujíce jako tam, určíme tečny $A_i\, B_i$ eliptickým svazkem harmonických polár $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ o středu p, jehož jednou družinou jsou paprsky centrálné $V\,{}^1V$ a druhou $U\,{}^1U$ ony, které k prvé družině souměrně jsou položeny (obr. 3.). Body $a_{i\infty}\, b_{i\infty}$ vyjádříme svazkem pravoúhlým o témže středu p (obr. 3.) a stanovíme společnou družinu RR' těchto dvou soumístných svazků, stanovící v úběžné přímce E_∞ body $r_\infty\, r'_\infty$. Je zřejmo, že v tomto případě $R \equiv V$ a $R' \equiv {}^1V$. K bodu c sestrojíme na přímce ${}^1M$ bod další d, jakožto souměrně položený dle přímky R. Po té sestrojíme, jako v předchozím článku, kuželosečku L, procházející body $a_{i\infty}\, b_{i\infty}$, cd, p, tudíž vlastně kružnici jakožto kuželosečku svazku $a_{i\infty}\, b_{i\infty}$. cd a vyhledáme osu involuce $O \perp R$ řady involuční $u\,{}^1u$, $v\,{}^1v$, jíž svazek U^1U, V^1V v kružnici L určuje (obr. 3.). Zvrhlou kuželosečku svazku tohoto budou tvořiti přímky $M \equiv E_\infty \measuredangle a_{i\infty}\, b_{i\infty}$ a ${}^1M \equiv \overline{cd}$.

V involuční řadě bodů $po \equiv (RO)$, $m_\infty \equiv (RE_\infty)^1 m \equiv {}^1MR$, sestrojíme body samodružné qq', jimiž procházejí příslušné poláry

Q, Q', $(\overline{{}^1mq} = \overline{{}^1mq'} = \sqrt{\overline{{}^1mp} \cdot \overline{{}^1mo}})$ Vyhledáme k bodu c bod $\begin{cases} e \\ e' \end{cases}$ na spojnici $\overline{cp}$ vůči bodu p a poláře $\begin{cases} Q \\ Q' \end{cases}$ harmonicky sdružený, určující s body c a d žádanou kružnici $\begin{cases} Kr \\ K'r \end{cases}$.[10])

Aby kružnice Kr byla reálná, musí býti polárou R úběžného bodu r_∞ přímka, půlící tupý úhel symetrické paprskové družiny v involuci (p).

4. Než přistoupíme k řešení úlohy: Sestrojiti kuželosečku, danou dvěma body, dvěma tečnami a družinou harmonicky sdružených pólů (jakožto nahrazující pátou určovací částku, t. j. reálný bod c): $K \mathbb{Z} (ab, AB, p\,{}^1p)$ dokážeme věty:

a) Soustavě $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$ kdež $p\,{}^1p$ je jedna a $q\,{}^1q$ druhá družina harmonických pólů, vyhovují kuželosečky jistého svazku Σ.

b) Každá kuželosečka, vyhovující soustavě $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$ náleží tomuto svazku Σ.

Důkaz. *a)* Označme $P \equiv \overline{p\,{}^1p}$, $Q \equiv \overline{q\,{}^1q}$. Vytkněme na P bod m_1 a sestrojme m_2 tak, aby $(m_1 m_2 p\,{}^1p) = -1$. Všechny kuželosečky svazku $\Sigma m \mathbb{Z} (abm_1m_2)$ mají sdružené póly $p\,{}^1p$ společny a procházejí body ab.

Svazek Σm protíná přímku Q v bodové involuci Im, v níž existuje jediná družina bodů $m'm''$ hovící též podmínce: $(m'm''q\,{}^1q) = -1$, t. j. svazek Σ_m obsahuje jedinou kuželosečku K_m soustavy $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$ určenou: $K_m \mathbb{Z} (ab, m_1 m_2, p\,{}^1p\; q\,{}^1q)$ a družině $m_1\, m_2$ na P je takto přiřazena jediná družina $m'm''$ na Q a naopak.

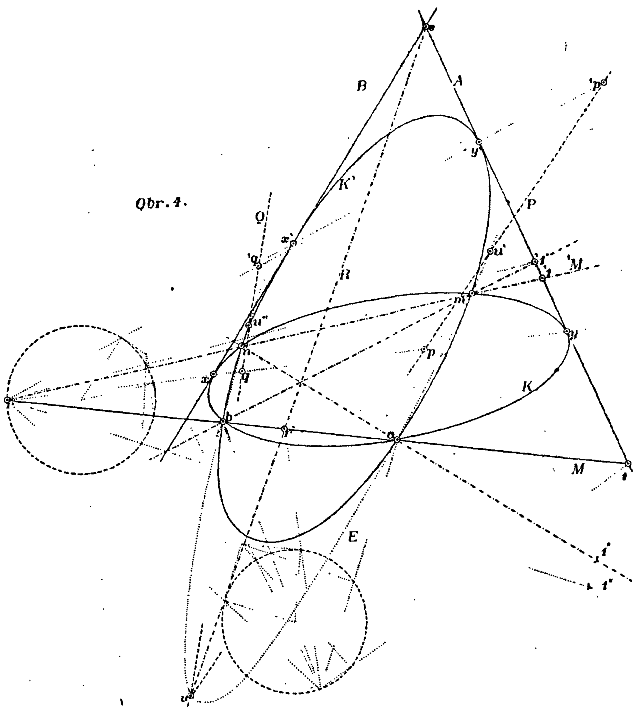
Body n_1, n_2 na P hovící také podmínce $(n_1 n_2 p\,{}^1p) = -1$ dávají další svazek Σ_n. Tento svazek Σ_n zase obsahuje jedinou kuželosečku K_n soustavy $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$, určenou: $K_n \mathbb{Z} (ab, n_1 n_2, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$ a $n_1\, n_2$ je takto opět přiřaděna jediná družina $n'n''$ na Q.

---

[10]) K jinému řešení, mnohem jednoduššímu, lze dospěti násled. úvahou: Zvolíme za poláru bodu p jakožto středu involučního svazku polár $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ nějakou přímku $P \perp V$ (obr. 3.), protínající paprsek U v bodě u^0 a paprsek V v bodě v^0. Kružnice z bodu v^0 poloměrem $\overline{v^0u^0}$ sestrojená protíná paprsek ${}^1V$ v bodě h a kolmice $\overline{h\omega}$ ke spojnici $\overline{v^0h}$ protíná V ve středu ω kružnice H určené svazkem $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ a polárou P bodu p. (Viz též: Jarolímek, svazek II., str. 73). Máme-li však sestrojiti kružnici Kr určenou svazkem polár $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ a bodem c, tu třeba přihlédnouti k tomu, že kružnice Kr a H jsou ve středové podobnosti pro bod p jakožto střed podobnosti. Proto spojnice $\overline{pc}$ protíná kružnici H v bodě c' (resp. c'') a přímka $cs \parallel c'\omega$ (resp. $cs' \parallel c''\omega$) protíná přímku V ve středu s (resp. s') žádané kružnice Kr (resp. $K'r$), čímž jest ona úplně určena.

Kuželosečky $K_m K_n$ určují svazek Σ, z jehož čtyř základních bodů dva jsou body ab, a další dva buďtež body m, n. $\Sigma \mathbb{Z} (abmn)$.

Poněvadž každá kuželosečka K_i tohoto svazku Σ protínajíc přímku P v družině $\mu_1 \mu_2$ involuce $\mathbb{Z}$ $(m_1 m_2, n_1 n_2, \mu_1 \mu_2, \ldots)$ má v bodech $p\,{}^1p$ své sdružené póly a rovněž přímku Q protínajíc v družině $\mu' \mu''$ involuce $\mathbb{Z}$ $(m'm'', n'n'', \mu'\mu'')$, má tudíž i v bodech $q\,{}^1q$ své Těmito body prochází hledané kružnice Kr, Kr', dotýkající se zá-



Obr. 4.

sdružené póly, t. j. **vyhovuje každá kuželosečka** K_i **svazku** $\Sigma \mathbb{Z} (abmn)$ **soustavě** $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$.

b) Budiž K obecná kuželosečka, hovící soustavě $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$. Ona protíná P v bodech $k_1 k_2$, kdež $(k_1 k_2 p\,{}^1p) = -1$. Ve svazku $\Sigma_k \mathbb{Z} (k_1 k_2 ab)$, k němuž K náleží, existuje tudíž tato **jediná** kuželosečka K, hovící soustavě $(ab, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$ a její průsečné body $k'k''$ s přímkou Q hoví relaci $(k'k'' q\,{}^1q) = -1$. Ve svazku Σ existuje však jediná kuželosečka $L \mathbb{Z} (mnabk_1)$, která, poněvadž prochází bodem k_1, prochází zajisté také bodem k_2 a náleží tedy svazku Σ_k. Poněvadž však současně náleží svazku Σ, jsou nejen body $p\,{}^1p$, ale i body $q\,{}^1q$ jejími harmonickými póly, i stotožňuje se L s onou **jedinou** kuželosečkou svazku Σ_k, zároveň soustavě $(ab, p\,{}^1p,$

$q\,{}^1q$) hovící. Poněvadž K je obsaženo ve svazku Σ_k, ztotožňuje se tato kuželosečka L svazku Σ s kuželosečkou K, t. j. K náleží také svazku Σ.

Soustavě (ab, $p\,{}^1p$, $q\,{}^1q$) vyhovují tedy kuželosečky jistého svazku Σ a mimo ně žádné jiné. Jedna degenerovaná kuželosečka svazku sestává z přímky $\overline{ab}$ a z přímky, oddělující body $p\,{}^1p$, jakož i body $q\,{}^1q$ s přímkou $\overline{ab}$ harmonicky.

Na základě těchto úvah přistoupíme k řešení vlastní úlohy, kdy $K \not\ni$ (ab, AB, $p\,{}^1p$), předpokládajíce, že všecky základní prvky jsou reálnými.

Jako v případech, v předchozích článcích uvedených, sestrojíme pól r a poláru R (obr. 4.). Poněvadž kuželosečky soustavy (ab, AB) jsou involutorně kollineárné dle středu r a osy R, možno sestrojiti k dané družině harmonických pólů $p\,{}^1p$ další družinu harmonických pólů $q\,{}^1q$, jíž budou též kuželosečky žádané hověti.

Dle předchozího tvoří systém kuželoseček (ab, $p\,{}^1p$, $q\,{}^1q$) svazek Σ, k jehož bodům základním náleží ab. Přímka $M \equiv \overline{ab}$ a ${}^1M$, stanovená dvojpoměrem $(rp\,r\,{}^1p\,M\,{}^1M) = -1$, tvoří jednu degenerovanou kuželosečku tohoto svazku (M a ${}^1M$ se protínají v bodě r).

Druhou kuželosečku E stanovíme tak, aby procházela body abu, kdež u leží na R a jest průsečíkem $\overline{(p\,{}^1p,\ q\,{}^1q)}$. Další dva body $u'u''$ kuželosečky E stanovíme z podmínek $(uu'p\,{}^1p) = -1$, $(uu''q\,{}^1q) = -1$.

Průsečíky mn kuželosečky E s přímkou ${}^1M$ jsou další dva základní body svazku Σ (obr. 4.).

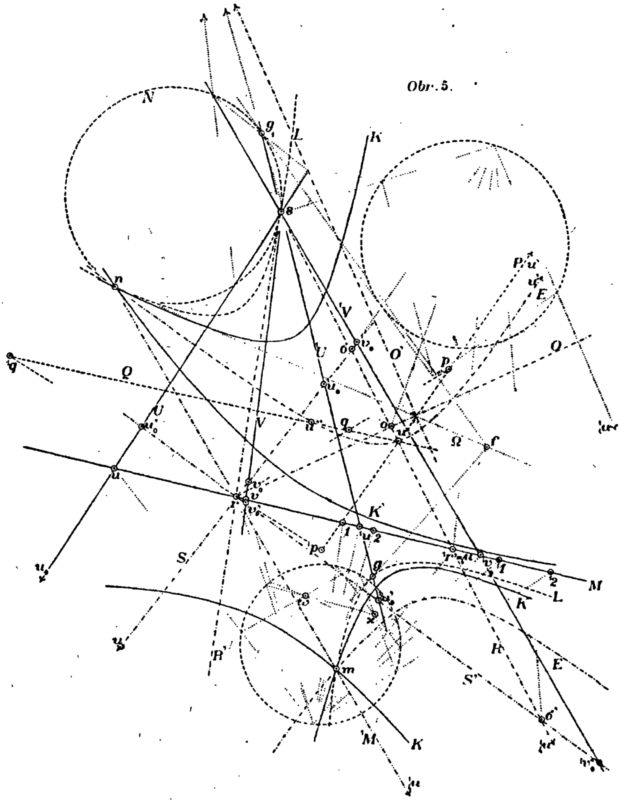
Tím úloha převedena na úlohu, sestrojiti dle předchozích článků 1., 2., ve svazku kuželoseček ($abmn$) ony kuželosečky KK', které se dotýkají tečny A a vzhledem k involuční kollineaci vůči rR též i tečny B v bodech yy' resp. xx'. Ke konstrukci samodružných bodů yy' (nebo xx') na A (nebo B) užito vhodněji známým způsobem místo kuželosečky E, jíž by bylo nutno teprve rýsovati, kromě degenerované kuželosečky ($M\,{}^1M$), jež protíná A v bodech $1\,{}^11$ další degenerované kuželosečky $\overline{(an,\ bm)}$ svazku Σ_m, protínající tečnu A v bodech $1^{\times}\,{}^11^{\times}$. (obr. 4.).

5. Konstrukce této (článek 4.) lze užíti bez závady i v případě, kdy body ab jsou imaginárně sdružené. Arciť ke stanovení průsečíků mn přímky ${}^1M$ s kuželosečkou $E \not\ni \overline{a_i b_i}.\,u^{\times}u'u''$ v předchozím článku zmíněnou, kde body $\overline{a_i b_i} \equiv M$ vyjádřeny involucí $1\,{}^11\,2\,{}^12$, $u^{\times} \equiv (PQ)$, $(p\,{}^1p\,u^{\times}\,u') = -1$, $(q\,{}^1q\,u^{\times}\,u'') = -1$, je nutno stanoviti další dva reálné body této kuželosečky.[11] Na to sestrojíme průsečné body mn přímky ${}^1M$ s kuželosečkou E jakožto druhé základní body svazku Σ ($a_i b_i m n$).

---

[11]) Tamtéž, svazek II., odst. 112 (v levo).

Kdyby však také tečny AB byly sdruženě imaginárné jakožto samodružné paprsky eliptického involučního svazku $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ o středu s (obr. 5.), užili bychom po sestrojení pólu r a příslušné poláry R jako ve článku 2. oné kuželosečky L svazku $(a_i b_i m n)$ která zároveň prochází tímto bodem s (obr. 5.), ke stanovení jedné družiny involučního svazku paprskového středu r,



Obr. 5.

totiž paprsku $\overline{rs} \equiv R'$ a parsku O, jenž je involuční osou eliptické involuce bodové, určené na křivce L svazkem $U\,{}^1U\,V\,{}^1V$. Ke konstrukci této osy O použito vlastně jako v předchozím článku 2. kollineace s kružnicí N, procházející zároveň bodem n při středu kollineace s a ose kollineace Ω, kteráž prochází bodem n a bodem průsečným t tečen ke křivkám L a N ve dvou kollineárných bodech, na př. g a g_1. Druhou kuželosečkou svazku $(\overline{a_i b_i m n})$a to degenerovanou jsou přímky $M \equiv \overline{a_i b_i}$, ${}^1M \equiv \overline{mn}$. Tyto dvě kuželosečky L a $(M\,{}^1M)$ stanoví, jak nahoře uvedeno, na poláře R dvě družiny s, $o \equiv (OR)$ a $\mu \equiv (MR)$, ${}^1\mu \equiv ({}^1MR)$ involuční řady bodové, jejíž samodružné body jsou σ, σ', které určují s bodem r p o l á r y S a S' p ó l u s vůči hledaným kuželosečkám K a K', jež dovedeme sestrojiti vzhledem k tomu, že obsahují body m n a že paprsky $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ involučního svazku harmonických polár o středu s určují na příslušné poláře S (resp. S') involuční řady harmonických pólů $u_0{}^1u_0$, $v_0{}^1v_0$ (resp. $u_0'\,{}^1u_0'$, $v_0'\,{}^1v_0'$) vůči kuželosečce K (resp. K').[12])

6. Konstrukce kuželosečky $K \not\equiv (a_i b_i, A_i B_i, p\,{}^1p)$ uvedené v předchozím článku, lze užíti při k o n s t r u k c i k r u ž n i c e, u r č e n é v e d l e o b o u b o d ů i m a g i n á r n ý c h v n e k o n e č n u $a_{i\infty} b_{i\infty}$, i n v o l u č n í m s v a z k e m s h a r m o n i c k ý c h p o l á r, d a n ý c h d r u ž i n a m i: c e n t r á l n o u $V\,{}^1V$ a s o u m ě r n o u $U\,{}^1U$ a d r u ž i n o u h a r m o n i c k ý c h p ó l ů $p\,{}^1p$ (obr. 6.).

Postupujíce jako tam, shledáme, že společnou družinou RR' svazku s $(U\,{}^1U,\ V\,{}^1V)$ a svazku promítajícího s bodu s družiny involuční řady ležící v úběžné přímce E_∞ paprsky pravoúhlými, jest družina $V\,{}^1V$. Proto přísluší bodům $p\,{}^1p$ body sdružené $q\,{}^1q$, souměrně k poláře R položené.

Abychom sestrojili body základní mn svazku $(a_{i\infty} b_{i\infty}, p\,{}^1p, q\,{}^1q)$, sestrojíme tohoto svazku zvrhlou kuželosečku, která bude se skládati z přímky $M \not\equiv \overline{a_{i\infty} b_{i\infty}}, \equiv E_\infty$ a z přímky ${}^1M$ harmonicky sdružené k přímce M vůči bodům $p\,{}^1p$, $q\,{}^1q$, tedy v tomto případě postupující úsečky $p\,{}^1p$, $q\,{}^1q$. Druhou kuželosečkou tohoto svazku, obsahující body u, u', u'' $[u \equiv (\overline{p\,{}^1p} \,.\, \overline{q\,{}^1q})$, $(u\,u'\,p\,{}^1p) = -1$, $(u\,u''\,q\,{}^1q) = -1]$, jakož i body kruhové $a_{i\infty} b_{i\infty}$, jest kružnice $F \not\equiv (a_{i\infty} b_{i\infty}, u u' u'')$.

Průsečíky přímky ${}^1M$ s kružnicí F jsou žádanými body $m\,{}^1m$. Těmito body prochází hledané kružnice Kr, Kr', dotýkající se zároveň tečen imaginárních A_i B_i. Abychom tyto kružnice sestrojili, sestrojíme kružnici L procházející bodem s a body $a_{i\infty} b_{i\infty}$, jakož i body mn. Tím je tato kružnice určena (obr. 6.). Stanovíme na ní involuční řadu bodů $u\,{}^1u$ $v\,{}^1v$, sestrojíme involuční osu O této řady, která protíná R v bodě o sdruženém s bodem s. Druhou družinou jsou body $\mu\infty$ a ${}^1\mu$.

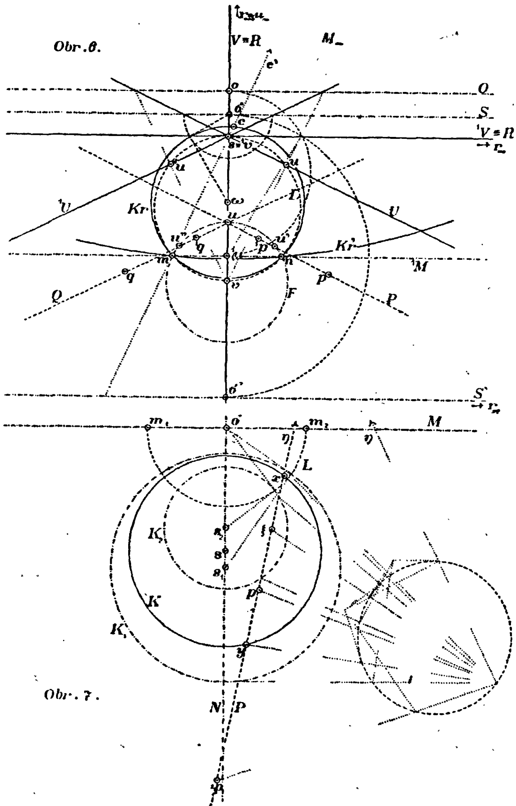
Vyhledáme samodružné body $\sigma\sigma'$ $\left(\overline{{}^1\mu\sigma} = \overline{{}^1\mu\sigma'} = \sqrt{\overline{{}^1\mu o} \,.\, \overline{{}^1\mu s}}\right)$, jimiž procházejí přímky $S \equiv \overline{r\infty\sigma}$ a $S' \equiv \overline{r\infty\sigma'}$. Vzhledem k těmto polárám S resp. S' a příslušným pólům σ resp. σ', lze z bodu m sestrojiti další body c resp. c', jimiž prochází žádaná kružnice Kr resp. Kr'.

7. K úlohám o kuželosečkách, kdy dány dva sdružené harmonické póly, připojíme ještě úlohu — ač nenálžeí ke vlastní úloze naší sestrojiti kuželosečku z částek, mezi nimiž se nalézají též dvě imaginárné tečny (článek 2.) — k o n s t r u o v a t i k r u ž n i c i

[12]) Tamtéž, svazek II., odst. 113. (na levo).

ze dvou bodů imaginárných $c_i\, d_i$ v konečnu a ze dvou sdružených pólů harmonických $p\, {}^1p$.

Buďtež body $c_i\, d_i$ dány souměrnou družinou $\overline{m_1\, m_2}$ elliptické involuce na M (obr. 7.). Na přímce $N_{(o)} \perp M$ ($\overline{om_1} = \overline{om_2}$) zvolme dva body s_1, s_2 tak, aby kružnice K_1, K_2, sestrojené z těchto bodů jakožto středů orthogonálně[13]) ku pomocné kružnici L nad $\overline{m_1 m_2}$

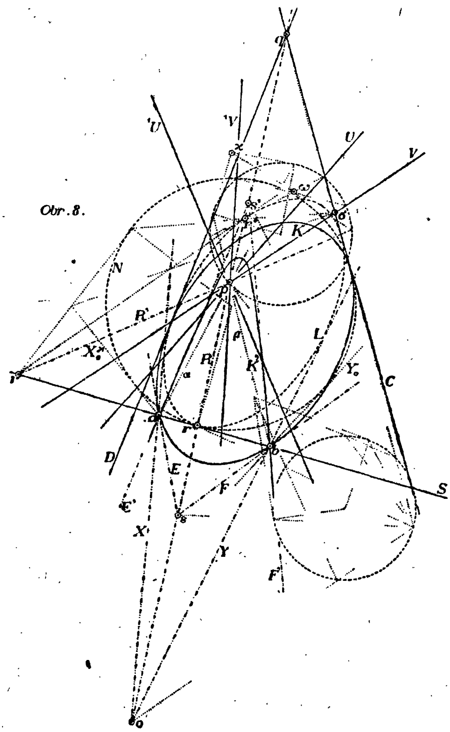


jakožto průměrem konstruované, protínaly přímku $P \equiv \overline{p\, {}^1p}$ ve dvou družinách reálných bodů. Poněvadž tyto dvě kružnice určují svazek kuželoseček $a_{i\infty}\, b_{i\infty}$, $c_i\, d_i$, náleží ony dvě družiny průsečíků involuci, jež je jimi určena, a v níž obsaženy jsou i průsečíky x, y žádané kružnice K s přímkou P jakožto jedna družina. Sestrojíme této řady involuční samodružné body ξ, η, které budou reálnými a budou oddělovati harmonicky body x, y, t. j. $(xy\xi\eta) = -1$. Poněvadž však body $p\, {}^1p$ jsou sdruženými póly žádané

[13]) Jarolímek, »Zákl. geom. polohy«, svazek V., str. 30. pod čarou.

kružnice K, musí též dvojpoměr $(xyp\,^1p) = -1$. Jsou tudíž body xy samodružnými body involuční řady, dané družinami $\xi\eta$, $p\,^1p$, jichž pomocí i kružnici žádanou K sestrojíme (obr. 7.).

8. Řešení úlohy: sestrojiti kuželosečku, jsou-li dány dva sdružené body imaginárné $a_i b_i$ dvě sdružené tečny imaginárné $A_i B_i$ a místo bodu c však tečna C, provedeme opětně jako v duálních případech, uvede-



ných ve článcích 1. a 2. tak, že rozřešíme předem snažší úlohu, kdy body ab budou reálné a tečny $A_i B_i$ sdruženě imaginárné.

Imaginárné tečny $A_i B_i$ buďtež dány involučním svazkem harmonických polár $U\,^1U\,V\,^1V$ o středu p (obr. 8.). Involuce na přímce $S \equiv ab$, daná těmito body ab jakožto reálnými samodružnými, promítá se s bodu p paprsky tvořícími involuční svazek, jehož paprsky $ap \equiv \alpha$, $bp \equiv \beta$ jsou samodružnými. Společná družina těchto soumístných svazků jsou paprsky RR', kteréž protínají přímku S v takových bodech r' a r, že k paprsku R jakožto pól přísluší bod r a paprsku R' pól r' (obr. 8.). Přihlížejme předem k pólu r a příslušné poláře R, vůči nimž opět leží kuželosečka hledaná K sama k sobě kollineárně, kde r je středem a R osou kollineace.

Proto se daná téčna C s příslušnou kollineárnou tečnou D v bodě q na poláře R protínají. Tím je převedena daná úloha na úlohu sestrojiti kuželosečku ze dvou imaginárných tečen $A_i B_i$, dvou reálných tečen CD a reálného bodu a (nebo b). Hledaná kuželosečka K jest jednou z kuželoseček osnovy určené základními tečnami $A_i B_i$, $C\ D$. Mezi nimi je jedna zvrhlá kuželosečka, skládající se ze dvou bodů $p \equiv (A_i B_i)$ a $q \equiv (CD)$ (obr. 8.).

Druhou kuželosečku L této osnovy, vzhledem k řešení vlastní úlohy (kdy i body ab jsou sdruženě imaginární) zvolíme duálně ke kuželosečce L ve článku 1. tak, aby se dotýkala přímky $S \equiv ab$ (obr. 8.). (Je zřejmo, vzhledem ku poloze kuželoseček osnovy $(A_i B_i$, $CD)$ vůči pólu r a poláře R, že kuželočeka L se dotýká přímky S v bodě $r' \equiv (RS)$.)

Známe tudíž této kuželosečky L základní prvky $A_i B_i\ C D$ a tečnu S, z nichž ji dovedeme známým způsobem sestrojiti.[14])

Sestrojíme-li s bodu a (nebo b) tečny ke kuželosečkám osnovy, tvoří tyto tečny involuční svazek, jehož samodružné paprsky jsou tečnami k žádaným kuželosečkám K nebo K', dotýkajícím se jich v tomto bodě a.[15])

Vzhledem ke shora uvedené kollineárné poloze kuželosečky K (resp. K') k pólu r a příslušné poláře R platí totéž o tečnách, vedených ke kuželosečkám téže osnovy s bodu b, které zároveň se protínají s příslušnými tečnami svazku a v bodech na poláře R. Takovými tečnami jsou pro zvrhlou kuželosečku, skládající se z bodů p a q, pro bod a přímky ap a aq, pro bod b přímky bp a bq.

Tečnami ke kuželosečce L jsou pro bod a tečna X a S (obr. 8.) a pro bod b je to tečna Y a S, kteréžto tečny XY se protínají v bodě o na poláře R.[16])

Involuční svazek a (pq, XS) jakož i involuční svazek b (pq, YS) protínají poláru R v téže involuční řadě bodů pq, or', jejímiž samodružnými body s, s' procházejí samodružné paprsky obou svazků tečnových (a i b), jakožto tečny E a F (resp. E', F') hledaných kuželoseček K (resp. K') v bodech $a\,b$. Body $a\,b$, příslušnými tečnami EF (resp. $E'F'$) a tečnou C jest potom určena kuželosečka K (resp. K') kterou známým způsobem lze sestrojiti.[17])

Zde nutno si opět povšimnouti toho, že bod o jest jakožto průsečík tečen XY z bodů $a\,b$ ke kuželosečce L sestrojených i n v o -

---

[14]) Tamtéž, sv. II., odst. 112 (na pravo).

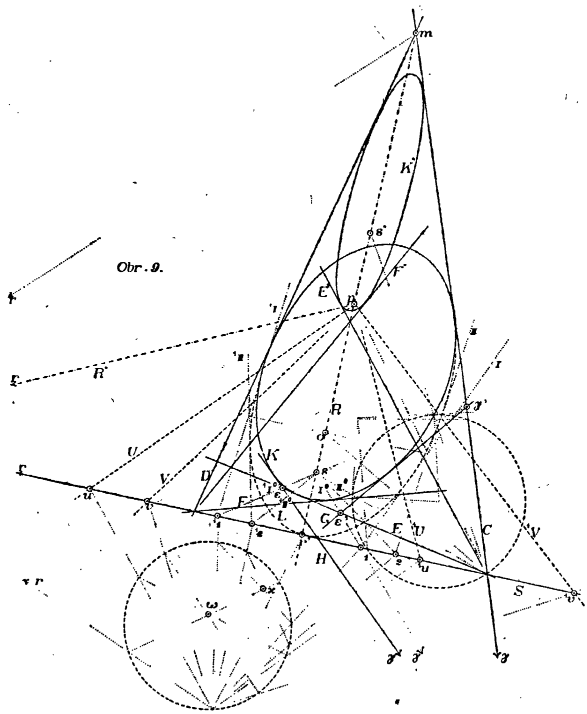
[15]) Tamtéž, sv. II., odst. 104 (na pravo).

[16]) Zde užito podobně jako v článku 1. a 2. (viz obr. 1. a 2.) centrálné kollineace pomocné kuželosečky L s kružnicí N, která se dotýká přímky S v bodě r' a tečny C. Osou kollineace je přímka S, středem kollineace σ průsečík tečny C a spojnice dotyčných bodů tečen bodem T ke křivkám L a N vedených. V této kollineaci sestrojíme k tečně X_0 bodem a ke kružnici N-vedené hledanou tečnu X ke kuželosečce L. Podobně bodem b sestrojíme ke kuželosečce L tečnu Y, kteráž s tečnou X protíná se v bodě o na R.

[17]) Tamtéž, svazek II., odst. 106 (na pravo).

lučním středem involuce paprskové (tečnové),[18]) kterou obdržíme, když z involuční řady harmonických pólů na přímce S sestrojíme tečny ke kuželosečce L, neboť tečny XY, body samodružnými ab k této křivce sestrojené, jsou zároveň samodružnými paprsky vzniknuvší paprskové involuce a tudíž se ve středu o involuce této protínají.

Tohoto názoru použijeme i v případě, kdy body ab budou imaginárnými a určeny budou eliptickou řadou harmonických pólů na přímce S.



Po řešení předchozí úlohy přistoupíme posléze k řešení vlastní úlohy: Sestrojiti kuželosečku ze dvou sdružených imaginárných bodů $a_i\,b_i$ ze dvou sdružených imaginárných tečen A_iB_i a z tečny reálné C.

Sdružené body imaginárné $a_i\,b_i$ dány jsou eliptickou involuční řadou $1\,{}^11$, $2\,{}^12$ na přímce S a sdružené tečny A_iB_i eliptickým involučním svazkem ($U\,{}^1U$; $V\,{}^1V$) o středu p (obr. 9.). Protnouce tento svazek přímkou S, vyhledáme společnou družinu $r\,r'$ vzniknuvší involuční řady $u\,{}^1u$, $v\,{}^1v$ a soumístné involuční řady $1\,{}^11$, $2\,{}^12$ známou

[18]) Ed. Weyr: „Projektivná geometrie základních útvarů prvního řádu", na str. 113.

koustrukcí.[19]) Jako ve všech předchozích případech jest opět spojnice $r'p \equiv R$ polárou bodu r vůči kuželosečce K (resp. K') a spojnice $rp \equiv R'$ polárou bodu r' vůči kuželosečce K'' (resp. K''') a kuželosečky $\begin{Bmatrix} K \text{ a } K' \\ K'' \text{ a } K''' \end{Bmatrix}$ jsou opět involutorně kollineárné vzhledem ke středu $\begin{Bmatrix} r \\ r' \end{Bmatrix}$ a ose kollineace $\begin{Bmatrix} R \\ R' \end{Bmatrix}$.

K tečně C v této kollineaci příslušná tečna D protíná se s ní v témž bodě m poláry R. Všechny kuželosečky, které vyhovují podmínce, že dotýkají se tečen $A_i B_i$, CD, tvoří osnovu kuželoseček, mezi nimiž se nalézá zvrhlá kuželosečka, skládající se z bodů $p \equiv (A_i B_i)$ a $m \equiv (CD)$ (obr. 9.). Jako druhou kuželosečku této osnovy sestrojíme opět onu L, která dotýkajíc se tečen $A_i B_i$, CD zároveň se přímky S dotýká a to v bodě $r' \equiv (SR)$.[20]) (Obr. 9.)

Tečny body imaginárnými $a_i b_i$ ke zvrhlé kuželosečce pm sestrojené, jsou arcif také imaginárné, avšak jejich průsečíky pm na poláře R jsou reálné. Také tečny z týchž bodů ke kuželosečce L sestrojené jsou imaginárné, protínají se však v bodě o taktéž reálném, na přímce R ležícím. Je to střed involuce tečnové (I ^{1}I, II ^{1}II) sestrojené body involuce harmonických pólů 1 ^{1}1, 2 ^{1}2 na přímce S ležících, ke kuželosečce L.[21]) (Obr. 9.) Druhé tečny splývají vždy s tečnou S, protínajíce se však v jejím dotyčném bodě r' s touto kuželosečkou.[22]) Na přímce R vzniklá řada involuční má družiny pm, $r'o$, jichž samodružné body ss' stanovíme jakožto póly přímky S vůči kuželosečce K a druhé možné kuželosečce K' (obr. 9.).

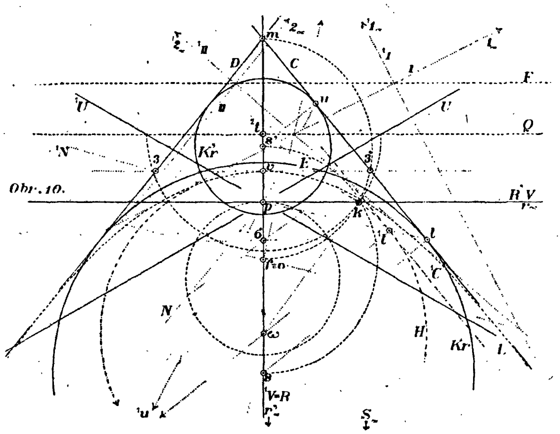
Těmito body s (nebo s'), involuční řadou harmonických pólů 1 ^{1}1, 2 ^{1}2 na příslušné poláře S a tečnou C (nebo D) jest již kuželosečka K (nebo K') stanovena a lze ji sestrojiti (obr. 9.). Sestrojíme k tečně C (nebo D) tečnu další E (nebo F) (obr. 9.), harmonicky sdruženou vůči přímkám S a s (CS) a z bodu s promítneme involuční řadu bodů 1 ^{1}1, 2 ^{1}2 paprsky I^0 ^{1}I^0, II^0 ^{1}II^0 tvořícími příslušný involuční svazek harmonických polár (s). Svazkem tímto a tečnami CDE jest kuželosečka K stanovena a můžeme ji sestrojiti[23]) tím, že sestrojíme ještě další tečnu H, spojíme-li $(CI^0) \equiv \gamma$ s průsečíkem $(E\,{}^1I^0) \equiv \varepsilon$. Potom spojíme průsečík $(C\,{}^1I^0) \equiv \gamma$ s průsečíkem $(E'\,{}^1I^0) \equiv \varepsilon$ a

[19]) Tamtéž, sv. II., odst. 112 (na pravo).
[20]) Tamtéž, sv. II., odst. 118.
[21]) Eduard Weyr: Projektivná geometrie základních útvarů prvního řádu na str. 113.
[22]) Konstrukci těchto tečen lze arcif provésti, aniž by bylo třeba rýsovati kuželosečku L, určenou tečnami CSD, dotyčným bodem r' tečny S a eliptickým svazkem (p).
[23]) Tamtéž, svaz. II., odst. 112 (na pravo).

dostaneme tečnu G. Takovým způsobem můžeme docíliti další tečny kuželosečky K.

Stejně by se řešila úloha, kdyby imaginárné tečny $A_i B_i$ byly nahrazeny ohniskem anebo kdyby body $a_i b_i$ byly úběžnými, určenými řadou involuční, stanovenou ve přímce úběžné směry paprsků invol. svazku sdružených průměrů žádané kuželosečky eliptické. K těmto případům nutno přidružiti případ ještě specielnější, kdy dáno ohnisko a směry dvou dvojic sdružených průměrů žádané kuželosečky, arciť vedle tečny reálné.

10. Zvláštní případ úlohy uvedené ve článku předchozím je sestrojení kružnice ze dvou sdružených tečen imagi-



nárných a reálné tečny, $Kr \measuredangle (a_{i\infty} b_{i\infty}, A_i B_i, C)$, kdež $a_{i\infty} b_{i\infty}$ značí kruhové body stanovené v úběžné přímce S_∞ pravoúhlým svazkem paprskovým o středu p. Tečny $A_i B_i$ buďtež určeny (obr. 10.) eliptickým svazkem harmonických polár $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ o středu p. Centrální paprsky $V\,{}^1V$ svazku $U\,{}^1U$, $V\,{}^1V$ jsou společnou družinou obou těchto svazků soumístných. Proto je ${}^1V \equiv R$ polárou bodu $r_\infty \equiv (R' S_\infty)$ kdež $R' \equiv V$ pro kružnice Kr, Kr' (a obdobně R'' polárou bodu $r'_\infty \equiv (R S_\infty)$ pro kružnice Kr'', Kr''', kteréž však jsou v našem případě imaginárné). Kružnice Kr, Kr' náleží osnově kuželoseček, jejíž základní tečny jsou $A_i B_i$, CD, kdež D je tečna kollineárná k C v involutorné kollineaci (rR). V této osnově je obsažena (obdobně jako v případě obecném ve článku 9.) degenerovaná kuželosečka, sestávajíc z bodů $p \equiv (A_i B_i)$, $m \equiv (CD)$ (obr. 10.) a kuželosečka L, určená tečnami $A_i B_i$, CDS_∞, kteráž je parabolou, poněvadž tentokráte tečna S_∞ je přímkou úběžnou. Ježto v kvadratické involuci tečen I ¹II, II ¹II na kuželosečce L vedených družinami bodové involuce $1_\infty\ {}^1 1_\infty$, $2_\infty\ {}^1 2_\infty$ o samodružných bodech $a_{i\infty} b_{i\infty}$ vždy I $\perp$ ¹I, II $\perp$ ¹II (obr. 10.), je spojnice $(\mathrm{I}\,{}^1\mathrm{I}).(\mathrm{II}\,{}^1\mathrm{II}) \equiv F$ řídící přímkou paraboly L a ovšem též jednou stranou polárného trojúhelníku kuželosečky L vzhledem k tomu, že je jí opsán úplný čtyřstran $I\,{}^1I\,II\,{}^1II$. Střed o této tečnové involuce, jakožto průsečík druhých dvou diagonálných stran úplného čtyřstěnu je protějším vrcholem polárného trojúhelníku a tedy pólem řídící přímky F, t. j. ohniskem $f \equiv o$ paraboly L. $f \equiv o$, připadající arciť na osu paraboly $R \equiv {}^1V$, tvoří s bodem $r'\infty$ jednu družinu bodové involuce na R, k níž náleží také družina mp. Poněvadž však bod $r'\infty$ je úběžný, je $f \equiv o$ středem této involuce, jejíž samodružné body s, s' jsou póly přímky $S\infty$ vůči žádaným kružnicím Kr, $K'r$, tedy jejich středy.

Parabolu L, její řídicí přímku F a tečny $I \perp {}^1I$, $II \perp {}^1II$ arciť netřeba k sestrojení bodu $f \equiv o$ rýsovati.

K sestrojení ohniska f stačí sestrojiti její vrcholovou tečnu E a vrchol v. Tečnu E sestrojíme z reálných tečen $CDS\infty$ a z eliptického svazku $U\,{}^1U\;V\,{}^1V$ jakožto tečnu, kteráž stojí k ose paraboly R kolmo, aniž bychom poláru bodu p rýsovali. Poněvadž subtangenta paraboly je vrcholem $v \equiv (ER)$ rozpůlena, sestrojíme nyní elementárním způsobem dotyčné body tečen CD a ohnisko $f \equiv o$,

načež $\overline{os} = \overline{s'o} = \left|\sqrt{\overline{op}\,.\,\overline{om}}\right|$. K témuž výsledku dospějeme však také následní jednoduchou konstrukcí.

Zvolme libovolnou přímku $Q \perp R$ (obr. 10), jakožto poláru bodu p vůči jisté kružnici H dotýkající se také imaginárných tečen $A_i B_i$, jejíž střed ω jako v článku 3. sestrojíme.

Tato kružnice H jest podobná a podobně položená ke kružnici Kr resp. Kr' dle středu p. Sestrojme tedy ${}^1C \parallel C$ jakožto tečnu k H, její dotyčný bod ${}^1t$, $\omega{}^1t \perp {}^1C$ $(C\,.\,p\,{}^1t) \equiv t$, jakožto dotyčný bod t tečny C s kružnicí Kr. Podobně druhý průsečík $(H\,.\,\omega\,{}^1t) \equiv {}^1u$ dává $(p\,{}^1u\,.\,C) \equiv u$ jakožto dotyčný bod tečny C s druhou kružnicí Kr'.

11. Řešení úlohy, kdy kuželosečka K určena bude dvěma imaginárnými body, dvěma imaginárnými tečnami a dvěma sdruženými harmonickými polárami, provedeme způsobem reciprokým k onomu případu (článek 5.), kdy kuželosečka je určena vedle imaginárných bodů a tečen dvěma sdruženými harmonickými póly.

Tak jako se stalo ve článku 4. a 5., lze dokázati duálně, že s o u s t a v ě k u ž e l o s e č e k u r č e n ý c h t e č n a m i AB a d v ě m a d r u ž i n a m i h a r m o n i c k ý c h p o l á r $P\,{}^1P$, $Q\,{}^1Q$ h o v í k u ž e l o s e č k y j i s t é o s n o v y.

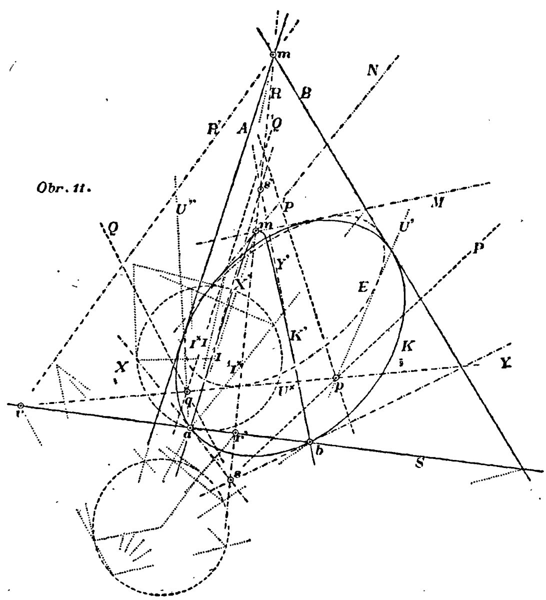
---

[21]) Jarolímek, svazek II., odst. 112 (na pravo). K rovnoběžce N, vedené bodem p a přímkou D, sestrojíme ve svazku p $(U\,{}^1U,\;V\,{}^1V)$ paprsek sdružený ${}^1N$, který protíná tečnu D v bodě $3 \equiv (D\,{}^1N)$. Kdybychom totéž provedli se zřetelem k tečně C, dostali bychom druhý bod $3'$ (obr. 10), souměrný k bodu 3 vůči ose R paraboly. $E \equiv \overline{33'}$ je další tečna paraboly, kolmá k ose R, tudíž procházející vrcholem v.

Na základě této věty přistoupíme nejprve k řešení úlohy $Kz,(ab,AB,P\,{}^1P)$,[25]) kdež body ab i tečny AB jsou reálné. Sestrojíme opět jako dříve pól r a poláru R, vůči nimž jsou kuželosečky soustavy ab, AB involutorně kollineárné a vůči nimž sestrojme ke družině $P\,{}^1P$ družinu harmonických polár $Q\,{}^1Q$, jež též žádané kuželosečce hoví (obr. 11.).

Dle této věty tvoří soustava kuželoseček $(AB,\ P\,{}^1P,\ Q\,{}^1Q)$ duálně ke článku 4. osnovu Ω, k jejímž základním přímkám náleží

Obr. 11.



AB (duálně k bodům ab). Bod $m \equiv (AB)$ a bod ${}^1m$ (duálně ku přímce ${}^1M$ v odst. 4b.) bude stanoven jako průsečík čtvrtých harmonických paprsků, určených polárami $P\,{}^1P$ resp. $Q\,{}^1Q$ ke spojnicím bodu m s průsečíkem polár $(P\,{}^1P) \equiv p$ resp. $(Q\,{}^1Q) \equiv q$. Body $m\,{}^1m$ tvoří zvrhlou kuželosečku soustavy $(AB,\ P\,{}^1P,\ Q\,{}^1Q)$ duálně ku přímkám $M\,{}^1M$ článku 4b.

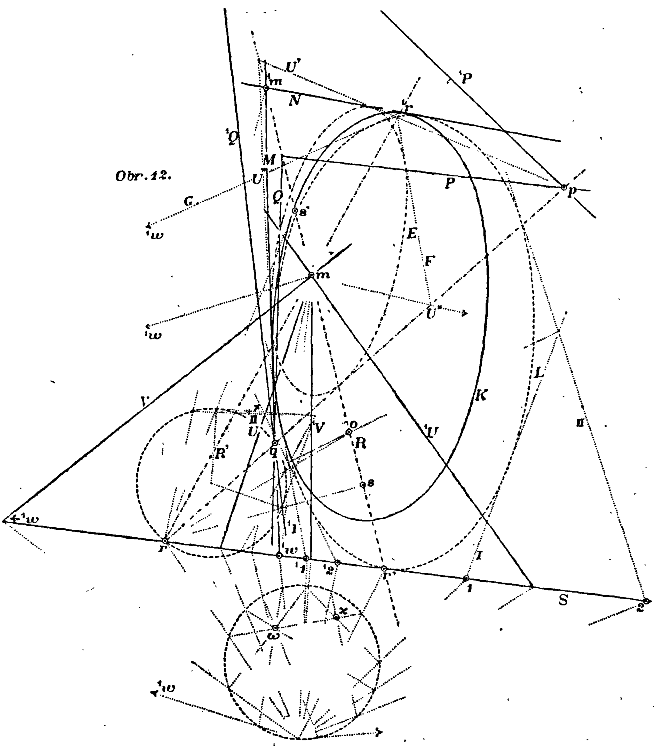
Druhou kuželosečku E osnovy Ω stanovíme tak, aby se dotýkala tečen AB a $U^{\times}$, kde $U^{\times}$ prochází bodem r a jest spojnicí bodů $(P\,{}^1P) \equiv p$, $(Q\,{}^1Q) \equiv q$ (duálně k bodu $u \equiv p\,{}^1p,\ q\,{}^1q$ ve článku 4b). Další tečny $U'U''$ kuželosečky E stanovíme z podmínek: $(U^{\times}U'P\,{}^1P) = -1, (U^{\times}U''Q\,{}^1Q) = -1$ (duálně k bodům $u'u''$ v článku 4b).

[25]) Kde arci $P\,{}^1P$ značí dvě sdružené harmonické poláry vůči hledané kuželosečce K.

Tečny M, N bodem ^1m ke kuželosečce E vedené jsou další dvě základní přímky osnovy Ω (duálně k bodům mn, v nichž ve článku 4b přímka ^1M s kuželosečkou E se protíná).

Tím úloha převedena na úlohu, sestrojiti dle předchozího článku 8. v osnově kuželoseček $ABMN$ ony kuželosečky K resp. K', které procházejí bodem a a vzhledem k involuční kollineaci vůči r, R

Obr. 12.



též i bodem b, a v nich se dotýkají tečen XX' resp. tečen YY' a jež následovně sestrojíme.

Přihlédneme-li ke konstrukci duální ve článku 4b, obr. 4., shledáváme, že hledané tečny XX' (resp. YY') vedené v bodech a (resp. b) (obr. 11.) jsou duální k dotyčným bodům yy' (resp. xx') žádaných kuželoseček KK' na tečnách A (resp. B) (obr. 4.) jakožto samodružným bodům involuční řady $I\,{}^1I$, $I^*\,{}^1I^*$ (v obr. 4. vyznačena jenom konstrukce bodů yy' a bodů xx' vynechána, ježto $\overline{yx}$ i $\overline{y'z'}$ prochází bodem r).

Jsou tudíž hledané tečny XX' (obr. 11.) samodružnými paprsky svazku paprskového a ($I\,{}^1I$, $I^{\times}\,I^{\times}$) (reciprokého k řadě bodové na tečně B v obr. 4.), kde $l \equiv \overline{am}$, ${}^1l \equiv \overline{a\,{}^1m}$, $l^\times \equiv \overline{a\,(AN)}$, ${}^1l^\times$ $\overline{a\,(BM)}$. Obdobně tečny YY' jsou samodružnými paprsky svazku b.

Posléze zbývá pouze sestrojiti kuželosečku K (resp. K') z bodů ab, příslušných tečen XY (resp. $X'Y'$) a z tečen AB.

12. Kdyby však body ab i tečny AB byly útvary imaginárnými, potom nutno ke stanovení tečen MN bodem ${}^1m$ ke kuželosečce $E \barwedge (A_i B_i U^\times U' U'')$ $(U^\times \equiv \overline{pq})$, $(P\,{}^1P\,U^\times U') = -1$, $(Q\,{}^1Q\,U^* U'') = -1)$ sestrojiti další tečnu této kuželosečky[26]) (obr. 12.). Ježto však také body ab jsou imaginárnými jakožto samodružné body eliptické řady involuční $1\,{}^11\,2\,{}^12$ ve přímce $S \equiv \overline{a_i b_i}$, užijeme pro sestrojení pólu r a příslušné poláry R jako ve článku 9. oné kuželosečky L soustavy $A_i B_i MN$, která zároveň se dotýká přímky S[27]) (obr. 11.) v bodě r', ke stanovení jedné družiny involuční řady na poláře R, totiž bodu $r' \equiv (RS)$ a bodu o, jenž jest involučním středem involuce paprskové $(I\,{}^1I)$ $(II\,{}^1II)$ na kuželosečce L, stanovené řadou $1\,{}^11$, $2\,{}^12$.

Druhou a to degenerovanou kuželosečkou osnovy $(A_i B_i MN)$ jsou body $m \barwedge A_i B_i$ a ${}^1m \barwedge MN$, kteréž tvoří druhou družinu involuční řady na přímce R, jejímiž samodružnými body jsou body ss', které jsou póly poláry S vůči hledaným kuželosečkám K a K' (odst. 9.), jež dovedeme sestrojiti na základě toho, že dotýkají se tečen M a N a že řada $1\,{}^11$, $2\,{}^12$ se promítá s bodu s (nebo s') involučním svazkem harmonických polár $\overline{s1}\,\overline{s\,{}^11}$, $\overline{s2}\,\overline{s\,{}^12}$ (resp. $\overline{s'1}\,\overline{s'\,{}^11}$, $\overline{s'2}\,\overline{s'\,{}^12}$) vůči kuželosečkám K (resp. K')[28]). —

Zvláštní případ určení kuželosečky K nastane tehdy, kdy jedna ze sdružených polár je přímkou úběžnou a druhá průměrem. —

*

Remarque au sujet de la construction de coniques déterminées par des éléments en partie imaginaires.

(Extrait de l'article précédent.)

Prof. Jarolímek fait mention, dans le 2e tome de son ouvrage: „Principes de la géométrie de position dans le plan et dans l'espace"

---

[26]) Tamtéž, svazek II., odst. 112. (na pravo). V obrazci 11. sestrojena tečna F, která s tečnami $U^\times U' U''$ a s dotyčným bodem $\equiv (RU^\times)$ na $U^\times$ určují kuželosečku E.

[27]) K sestrojení této kuželosečky L sestrojena ještě další reálná tečna G způsobem uvedeným v Jarolímkově Geometrii polohy sv. II., odst. 112. (na pravo) z tečen MNS a svazku $(U\,{}^1U,\ V\,{}^1V,\ R\,R')$ (obr. 12.) jakožto přidružená k tečně M. K paprsku $mu \equiv m\,(MS)$ sestrojíme ve svazku $m\,(U\,{}^1U,\ V\,{}^1V)$ paprsek sdružený $m\,{}^1u$, protínající tečnu S právě v bodě ${}^1u$ k paprsku $m\,{}^1m \equiv R$ téhož svazku paprsek sdružený $mr \equiv R'$, protínající tečnu N v bodě ${}^1r$. Spojnice ${}^1u\,{}^1r$ jest potom žádanou tečnou G.

[28]) Tamtéž, odst. 113.

de la solution du problème suivant: „Construire une conique déterminée par deux points imaginaires conjugués, par deux tangentes imaginaires conjuguées ainsi que par un point réel“, mais il n'en effectue pas la construction.

Les auteurs donnent la solution de ce problème par une construction particulière en faisant emploi d'une conique auxiliaire qu'il faut construire d'avance pour le cas où les éléments qui déterminent la conique sont réels tous ou en partie. La solution du problème est accompagnée par celle du problème corrélative, ainsi que par des cas de coniques particulières, notamment du cercle. A la fin, les auteurs traitent des problèmes où le point réel ou la tangente réelle, déterminant la conique, sont remplacés, resp., par deux pôles conjugués ou par deux polaires conjuguées.