Josef Kaucký

O redukci dvou součtů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 3, 201--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122604

O redukci dvou součtů.

Napsal *Jos. Kaucký.*

A. Cauchy[1] k odvození různých vzorců z vyšší analyse a diferenčního počtu s úspěchem použil symbolických rovnic. Jak sám na mnohých místech ve svých spisech praví, navazuje při tom na práce Brisson-ovy, které pravděpodobně vůbec nebyly publikovány.[2])

V tomto článku použil jsem Cauchy-ovy metody k redukci vícenásobných součtů prvního (3) a druhého druhu (6) pro případ stejných rozpětí; výsledek jsou vzorce (37) a (41).

Základní věta, na níž další úvahy jsou založeny, je vyjádřena rovnicí (17) a praví, že, je-li θ libovolná distributivní operace, $f(x)$ a $F(x)$ polynomy, pro něž platí rozklad (14), $\varphi(x)$ daná funkce, lze rovnici (15) vyhověti součtem řešení rovnic (16). Cauchy podal důkaz této věty v případě $\theta\psi(x) = D\psi(x) = \psi'(x)$ a $\theta\psi(x) = = \Delta\psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$; tento důkaz není však úplný.

V odst. 5 a 6 jsou odvozeny vzorce (9) a (12) pro jistá partikulární řešení rovnic (7) a (10), jakož i pro další úvahy důležitý vztah (13).

Zvolíme-li nyní místo rozkladu (14) rozklad v částečné zlomky (25), nastoupí na místě vztahu (24) rovnice (26). K redukčním vzorcům, které máme na mysli, dospějeme z této rovnice volbou

$$f(x) = 1,\quad F(x) = x^n,\quad \theta = \underset{\omega}{\Delta},\quad \theta = \underset{\omega}{\nabla}.$$

Dlužno podotknouti, že pro případ

$$\theta y(x) = \Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

---

[1]) Mémoire sur l'emploi des équations symboliques dans le calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies, Oeuvres (I), T. VIII, p. 28.

[2]) Viz *Mansion*, Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, Mém. cour. de Belgique 22 (1892); úvod.

Pincherle S., Funktionaloperationen und Gleichungen, Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. II, 1. Teil, 2. Hälfte, str. 769.

Cauchy [3]) udal formuli

$$\omega = \sum_{x_0}^{x}\sum_{x_0}^{x} \ldots f(x) =$$

$$= \sum_{z=x_0}^{x} \frac{(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}\,h)}{(n-1)!}(1+r)^{\frac{x-z}{\omega}-1} f(z), \quad (\alpha)$$

kde

$$\overset{n}{\Delta}\,\omega = f(x)^3).$$

Cauchy zde zavádí pojem omezeného součtu jako analogii určitého integrálu zřejmě proto, aby se vyhnul integračním konstantám. Nejen, že tento pojem je mlhavý a vysvitne až zavedením Nörlundových hlavních řešení, ale i formule horní (α) je nesprávná, jak z našeho dalšího postupu vysvitne.

Konečně nutno říci, že N. E. Nörlund dospěl cestou úplně jinou ke vzorcům (34)) a (41) ve své práci »Remarques diverses sur le calcul aux différences finies«.[4])

1. Obraťme se zprvu k významu některých symbolů, kterých v dalších úvahách častěji použijeme. Označme s p. N. E. Nörlundem *středem prvního řádu* nebo krátce *prvním středem funkce* $f(x)$ podíl

$$\underset{\omega}{\nabla} f(x) = \frac{f(x+\omega)+f(x)}{2};$$

parametr ω budeme nazývati *rozpětím* [5]).

Buďtež $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ libovolná čísla kladná. *Střed n-tého řádu* či prostě *n-tý střed funkce* $f(x)$ určíme rovnicí

$$\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}} f(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\,[\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1}}{\overset{n-1}{\nabla}} f(x)]. \tag{1}$$

Uvažujme nyní rovnici

$$\underset{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}} G_n(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \varphi(x), \tag{2}$$

---

[3]) Cauchy, loc. cit., p. 34, 9. řádek shora má dále státi

$$D^n\omega = f(x) \qquad \overset{n}{\Delta}\omega = f(x).$$

[4]) Journal de Math., 9ième série, T. II, p. 204—205.

[5]) N. E. Nörlund ve svých původních pracích pro parametr ω neužívá žádného zvláštního názvu; až ve své knize »Vorlesungen über Differenzialrechnung«, Berlin 1924, z různých důvodů nazval ω *Spanne*.

kde $\varphi(x)$ je funkce daná, G_n funkce neznámá; ***hlavní řešení***[6]) této rovnice označíme symbolem

$$G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \mathop{S} \varphi(x) \mathop{\nabla}\limits_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} x. \tag{3}$$

Výraz na pravé straně rovnice (3) se nacházející budeme nazývati *součtem prvního druhu a řádu n,* kratčeji ***prvním součtem řádu n*** (rozuměj z funkce $\varphi(x)$). Nalézti hlavní řešení rovnice (2) je úkolem t. zv. ***prvního sumačního problému.*** Obecné řešení rovnice (2) z hlavního řešení této rovnice obdržíme přičtením obecné funkce $p(x)$, která vyhovuje rovnici

$$\mathop{\nabla}\limits_{\omega_1\omega_3\ldots\omega_n}^{n} p(x) = 0.$$

V případě zvláštním $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega$ označíme střed (1) a součet (3) krátce

$$\mathop{\nabla}\limits_{\omega}^{n} f(x) \tag{1'}$$

a

$$G_n(x|\omega) = \mathop{S} \varphi(x) \mathop{\nabla}\limits_{\omega}^{n} x. \tag{3'}$$

2. Podobně *diferencí prvního řádu* nebo *první diferencí funkce* $f(x)$ označíme podíl

$$\mathop{\Delta}\limits_{\omega} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega};$$

diference n-tého řádu počítá se z rovnice

$$\mathop{\Delta}\limits_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} f(x) = \mathop{\Delta}\limits_{\omega_n} [\mathop{\Delta}\limits_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1}}^{n-1} f(x)] \tag{4}$$

Hlavní řešení rovnice

$$\mathop{\Delta}\limits_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \varphi(x), \tag{5}$$

kde $\varphi(x)$ je daná a F_n hledaná funkce, označíme symbolem

$$F_n(x|\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n) = \mathop{S}\limits_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}\limits_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} z. \tag{6}$$

Výraz na pravé straně této rovnice se nacházející nazveme ***součtem druhého druhu a řádu n*** či krátce ***druhým součtem řádu n*** (rozuměj z funkce $\varphi(x)$). Obecné řešení rovnice (5) z hlavního

---

[6]) Viz odst. 3.

řešení této rovnice obdržíme přičtením obecné periodické funkce $\pi(x)$, hovící rovnici

$$\mathop{\Delta}\limits^{n}_{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n} \pi(x) = 0.$$

V případě stejných rozpětí diferencí (4) a součet (6) krátce označíme

$$\mathop{\Delta}\limits^{n}_{\omega} f(x) \qquad (4')$$

$$\mathop{S}\limits_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}\limits^{n}_{\omega} z.^{7)} \qquad (6')$$

3. K hlavním řešením rovnic (2) a (5) dospěl N. E. Nörlund takto. Označíme-li

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} s_k \omega_k,$$

vyhovují formálně rovnicím (2) a (5) řady

$$2^n \sum (-1)^{\sum_k s_k} \varphi(x + \Omega) \qquad (\alpha)$$

a

$$(-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \sum \varphi(x + \Omega); \qquad (\alpha')$$

sčítá se přes všechna s_k, kde $s_k = 0, 1, 2, \dots$

Konvergují-li řady (α) a (α'), představují přímo hlavní řešení. Divergují-li, uvažuje Nörlund místo nich řady

$$2^n \sum (-1)^{\sum s_k} \varphi(x + \Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}$$

a

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty B_{n-1}^{(n)}(x-z) \varphi(z) e^{-\eta z} dz +$$
$$+ (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)},$$

kde $\eta > 0$ a funkce $B_\nu^{(n)}(x)$ značí Bernouilliho polynom řádu n a indexu ν, a sčítá je pomocí jím zobecněných formulí Boolovy a Euler-Maclaurinovy. O výrazech takto získaných dokazuje, že pro značně obecnou třídu funkcí $\varphi(x)$ stejnoměrně se blíží k jistým limitám, jestliže $\eta \to 0$. Tyto limity jsou hlavní řešení[8]. V dalším,

---

[7]) Nörlund v knize již citované nazývá součty $\mathop{S}\limits_{a}^{x}$ a $\mathop{S}$ *Summe* a *Wechselsumme;* v původních pracích užívá názvů *somme de première et seconde espèce.*

pokud o hlavních řešeních budeme mluviti, budeme přirozeně předpokládati jejich existenci.

4. Budiž dána lineární diferenční rovnice n-tého řádu

$$\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)\, y(x+\overline{n-k}\,\omega)=0, \tag{A}$$

$$p^{(0)}(x)=1, \qquad p^{(n)}(x) \neq 0.$$

Adjungovanou rovnici k rovnici (A) (analogickou Lagrange-ově u rovnic diferenciálních) lze psáti ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x+\overline{k-1}\,\omega)\, \bar{y}(x+k\,\omega)=0. \tag{B}$$

Označme nyní řešení (tvořící vždy fundamentální systém) rovnice (A) $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$, rovnice ($B$) $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots \bar{y}_n(x)$. Pak rovnici nehomogenní

$$\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)\, y(x+\overline{n-k}\,\omega)=\varphi(x) \tag{A_1}$$

vyhovuje partikulární řešení tvaru[9])

$$y(x)=\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{n} y_k(x) \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z)\, \bar{y}_k(z+\omega) \mathop{\Delta}_{\omega} z. \tag{C}$$

Obecné řešení rovnice (A_1) z řešení (C) obdržíme přičtením výrazu

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x), \tag{D}$$

kde $c_k(x)$ jsou »konstanty« hovící rovnici

$$\mathop{\Delta}_{\omega} c_k(x)=0;$$

součet (D) je obecné řešení rovnice (A) čili rovnice (A_1) bez pravé strany.

5*a*. Řešme nyní rovnici

$$\mathop{\Delta}_{\omega} y(x)-r\,y(x)=\varphi(x), \tag{7}$$

---

8) Pro první informaci o sumačních problémech viz můj referát o zmíněné již knize Nörlundově, Časopis 54, str. 83—87. Pro podrobnosti dlužno odkázati na původní Nörlundovy práce »Mémoire sur le calcul aux différences finies«, Acta 44 (1922), p. 71—212, »Sur certaines équations aux différences finies«, Transactions Amer. Math. Soc. Vol. 25 (1923), p. 13—98.

9) Viz na př. Guldberg-Wallenberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen, Leipzig 1911, str. 89. Označíme-li $\Sigma\,\varphi(x)$ řešení rovnice $y(x+\omega)-y(x)=o$, je patrně $\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z=\omega\,\Sigma\,\varphi(x)$.

kde r je konstanta, $\varphi(x)$ daná funkce. Rovnici (7) budeme též psáti symbolicky takto:

$$(\underset{\omega}{\Delta} - r)\, y(x) = \varphi(x).$$

Násobme ji ω a k takto vzniklé rovnici, v níž jsme položili $\varphi(x) = 0$, utvořme rovnici adjungovanou. Obdržíme

$$\bar{y}(x) - (1 + r\omega)\,\bar{y}(x + \omega) = 0;$$

partikulární řešení této rovnice je zřejmě

$$\bar{y}(x) = (1 + r\omega)^{-\frac{x}{\omega}}.$$

Dle vzorce (C) vyhovuje tedy rovnici (7) řešení

$$y(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} (1 + r\omega)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z.$$

b. Rovnici (7) lze řešiti též takto: Násobme ji zprvu ω, čímž dostaneme

$$y(x + \omega) - (1 + r\omega)\, y(x) = \omega\, \varphi(x).$$

Označme dále řešení této rovnice bez pravé strany $u(x)$. Je patrně

$$u(x) = (1 + r\omega)^{\frac{x}{\omega}}.$$

Pokusme se nyní dané rovnici vyhověti výrazem tvaru

$$y(x) = c(x)\; u(x);$$

pro $c(x)$ obdržíme, vložíme-li předešlý výraz do dané rovnice, po elementární redukci, rovnici

$$\underset{\omega}{\Delta} c(x) = \frac{\varphi(x)}{u(x + \omega)},$$

z níž plyne

$$c(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{\omega}^{x} (1 + r\omega)^{-\frac{z}{\omega} - 1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do výrazu $y(x) = c(x)\; u(x)$ a označíme-li ještě řešení rovnice (7) symbolicky

$$y(x) = \frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\Delta} - r}, \tag{8}$$

máme konečný výsledek

$$\frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\Delta} - r} = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} (1 + r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z. \tag{9}$$

6. Uvažujme dále rovnici

$$\underset{\omega}{\nabla} y(x) - r\, y(x) = \varphi(x), \tag{10}$$

kde opět r je konstanta a $\varphi(x)$ daná funkce; rovnici tuto a její řešení budeme psáti symbolicky

$$(\underset{\omega}{\nabla} - r)\, y(x) = \varphi(x),$$

$$y(x) = \frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\nabla} - r}. \tag{11}$$

Poněvadž rovnici (10) lze psáti ve tvaru

$$\left(\Delta - \frac{2(r-1)}{\omega}\right) y(x) = \frac{2}{\omega}\, \varphi(x),$$

vidíme, že jí vyhovuje partikulární řešení

$$y(x) = \frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\nabla} - r} = \frac{2}{\omega} \overset{x}{\underset{a}{S}} (2r-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z. \tag{12}$$

Položme $r = 0$ v rovnici (10) a ve výraze (12). Rovnice (10) přejde v

$$\underset{\omega}{\nabla}\, y(x) = \varphi(x);$$

je tedy

$$S \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \frac{2}{\omega} \overset{x}{\underset{a}{S}} (-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z, \tag{13}$$

kterýžto vztah není bez zajímavosti a je pro naše další úvahy důležitý.

Obecná řešení rovnic (7) a (10) z partikulárních řešení (9) a (12) obdržíme přičtením výrazů

$$C(x)(1 + r\omega)^{\frac{x}{\omega}} \quad \text{resp.} \quad C(x)(2r-1)^{\frac{x}{\omega}},$$

kde

$$C(x+\omega) - C(x) = 0.$$

Dlužno podotknouti, že v dalších úvahách budeme výslovně užívati pouze partikulárních řešení (9) a (12), neboť se zvlášť dobře hodí k odvození formulí, které máme na mysli.

7. Uvažujme libovolnou funkcionální operaci distributivní θ. Jak známo, rozumíme tím operaci, která se řídí následujícími dvěma zákony

$$\theta[\varphi(x) + \psi(x)] = \theta\varphi(x) + \theta\psi(x),$$
$$\theta[c\,\varphi(x)] = c\,\theta\varphi(x),$$

kde c je konstanta[10]).

---

[10]) Viz Pincherle S. - Amaldi U., Le operazione distributive e le loro applikazioni all' analisi, Bologna 1901; § 42—48.

Dány buďtež nyní polynomy $f(x)$ a $F(x)$ a předpokládejme, že je možný rozklad

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{i} \frac{f_\nu(x)}{F_\nu(x)}, \tag{14}$$

kde $F_1(x), F_2(x), \dots F_i(x)$ jsou dělitelé $F(x)$.

Uvažujme dále následující funkcionální rovnice, které píšeme v symbolickém tvaru

$$F(\theta)\, y(x) = f(\theta)\, \varphi(x) \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1(\theta)\, y_1(x) = f_1(\theta)\, \varphi(x) \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_i(\theta)\, y_i(x) = f_i(\theta)\, \varphi(x) \end{array}\right\} \tag{16}$$

Lze ukázati, že rovnici (15) vyhovíme výrazem tvaru

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{i} y_\nu(x). \tag{17}$$

Abychom důkaz provedli, označme

$$\frac{F(x)}{F_\nu(x)} = \overline{F}_\nu(x) \quad \nu = 1, 2, \dots i \tag{18}$$

a násobme obě strany rovnice (14) $F(x)$; tím obdržíme identitu

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{i} \overline{F}_\nu(x) f_\nu(x).$$

Dostaneme však také identitu, jestliže v této rovnici x nahradíme libovolnou distributivní operací θ [11]) a obě strany symbolické rovnice takto získané provedeme na libovolnou funkci $\varphi(x)$. Platí tudíž identicky

$$\sum_{\nu=1}^{i} \overline{F}_\nu(\theta) f_\nu(\theta)\, \varphi(x) = f(\theta)\, \varphi(x). \tag{19}$$

Aplikujme nyní na obě strany rovnice

$$F_\nu(\theta)\, y_\nu(x) = f_\nu(\theta)\, \varphi(x),$$

operaci $\overline{F}_\nu(\theta)$; užijeme-li vztahu (18), obdržíme rovnici

$$\overline{F}_\nu(\theta) F_\nu(\theta)\, y_\nu(x) = F(\theta)\, y_\nu(x) = \overline{F}_\nu(\theta) f_\nu(\theta)\, \varphi(x). \tag{20}$$

Sečtením rovnic z (20) vzniklých, dosazujeme-li postupně $\nu = 1, 2, \dots i$, plyne konečně

$$F(\theta) \sum_{\nu=1}^{i} y_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{i} \overline{F}_\nu(\theta) f_\nu(\theta)\, \varphi(x) = f(\theta)\, \varphi(x). \tag{21}$$

Tím je důkaz úplně proveden.

11) Lineární formy v θ jsou operace komutativní.

Označme ještě řešení rovnic (15) a (16) symbolicky

$$y(x) = \frac{f(\theta)}{F(\theta)} \varphi(x) \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = \dfrac{f_1(\theta)}{F_1(\theta)} \varphi(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_i(x) = \dfrac{f_i(\theta)}{F_i(\theta)} \varphi(x) \end{array}\right\} ; \tag{23}$$

rovnici (17) lze pak psáti takto

$$\frac{f(\theta)}{F(\theta)} \varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{i} \frac{f_\nu(\theta)}{F_\nu(\theta)} \varphi(x). \tag{24}$$

8. Budiž [12]) $\chi(z)$ analytická funkce komplexní proměnné z a předpokládejme, že lze zvoliti řadu kruhů $z_\nu = r_\nu e^{i\psi}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) tak, že $|\chi(z_\nu)|$ zůstává stále pod konečnou mezí, ať je ψ a ν jakékoliv a že, nanejvýš s výjimkou konečného počtu bodů, platí v intervalu

$$0 \leqq \psi \leqq 2\pi$$

stejnoměrně

$$\lim_{\nu = \infty} \chi(z_\nu) = A.$$

Potom lze psáti

$$\chi(x) = A + \sum \frac{1}{x - z} [\chi(z)],$$

kde součet Σ se vztahuje k residuím funkce $\dfrac{\chi(z)}{x - z}$ vzhledem k pólům $\chi(z)$.

9. Budiž

$$\chi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

a nechť pro jednoduchost stupeň polynomu $f(x)$ je menší než stupeň $F(x)$. Pak

$$A = 0$$

a

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{1}{x - r} \left[\frac{f(r)}{F(r)}\right]; \tag{25}$$

to je rozklad $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ v částečné zlomky.

---

[12]) Viz Lindelöf E., Calcul des résidus, Paris 1905; p. 38.

Uvažujme nyní místo rozkladu (14) rozklad (25). Rovnice (24) přejde v následující

$$\frac{f(\theta)}{F(\theta)}\varphi(x)=\sum\frac{\varphi(x)}{\theta-r}\left[\frac{f(r)}{F(r)}\right]. \tag{26}$$

kde symbol

$$\frac{\varphi(x)}{\theta-r} \tag{27}$$

značí řešení rovnice

$$(\theta-r)\,y(x)=\varphi(x). \tag{28}$$

10. Volme

$$\theta=\underset{\omega}{\Delta}. \tag{29}$$

V tomto specielním případě je

$$\frac{\varphi(x)}{\underset{\omega}{\Delta}-r}=\overset{x}{\underset{a}{S}}(1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z, \tag{9}$$

takže rovnice (26) nám dává vztah

$$\frac{f(\underset{\omega}{\Delta})}{F(\underset{\omega}{\Delta})}\varphi(x)=\sum\left[\frac{f(r)}{F(r)}\right]\overset{x}{\underset{a}{S}}(1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z=$$

$$=\overset{x}{\underset{a}{S}}\left[\sum\left[\frac{f(r)}{F(r)}\right](1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\varphi(z)\right]\underset{\omega}{\Delta}z. \tag{30}$$

Položme dále

$$f(x)=1,\quad F(x)=x^n;$$

uvážíme-li, že

$$\frac{\varphi(x)}{\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}}=\overset{x}{\underset{a}{S}}\varphi(z)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}z,$$

plyne pro tento případ

$$\overset{x}{\underset{a}{S}}\varphi(z)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}z=\overset{x}{\underset{a}{S}}\left[\sum\left[\frac{1}{r^n}\right](1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\right]\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta}z. \tag{31}$$

Hledané residuum je koeficient u r^{n-1} ve výraze

$$(1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \tag{32}$$

a rovná se

$$\frac{1}{(n-1)!}(x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots$$
$$\ldots(x-z-\overline{n-1}\,\omega) \tag{33}$$

Vložíme-li tento výraz do rovnice (31) a položíme-li dále $n+1$ za n, získáme jeden ze vztahů, které jsme měli na mysli a který vyjadřuje redukci součtu druhého druhu

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n+1} z$$

v případě stejných rozpětí.

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega}^{n+1} z = \frac{1}{n!} \mathop{\mathrm{S}}_a^x (x-z-\omega)\ldots(x-z-n\,\omega)\,\varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z. \quad (34)$$

Abychom výraz na pravé straně rovnice (34) stojící upravili, uvažme, že lze psáti

$$(x-z-\omega)(x-z-2\,\omega)\ldots(x-z-n\,\omega) =$$
$$= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-s-1}\,\omega)\,z(z+\omega)\ldots(z+s\,\omega); \quad (35)$$

položíme-li dále

$$F_{1,s}(x|\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_a^x (z+\omega)(z+2\omega)\ldots(z+s\,\omega)\,\varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z, \quad (36)$$

získáme konečnou redukční formuli

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega}^{n+1} z =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-s-1}\,\omega)\,F_{1,s}(x|\omega) \quad (37)$$

11. Volme konečně

$$\theta = \mathop{\nabla}_{\omega}.$$

V tomto případě je

$$\frac{\varphi(x)}{\mathop{\nabla}_{\omega} - r} = \frac{2}{\omega} \mathop{\mathrm{S}}_a^x (2r-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z \quad (12)$$

a rovnice (26) dává

$$\frac{f(\mathop{\nabla}_{\omega})}{F(\mathop{\nabla}_{\omega})}\varphi(x) = \frac{2}{\omega} \mathop{\mathrm{S}}_a^x \left[\sum \left[\frac{f(r)}{F(r)}\right](2r-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1}\right] \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z. \quad (38)$$

Budiž opět

$$f(x) = 1, \quad F(x) = x^n;$$

nyní

$$\frac{\varphi(x)}{\mathop{\nabla}_{\omega}} = \mathrm{S}\,\varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega}^{n} x$$

a rovnice (26) přejde v následující

$$\overset{n}{\underset{\omega}{S}} \varphi(x) \nabla x = \frac{2}{\omega} \overset{x}{\underset{a}{S}} \left[\sum \left[\frac{1}{r^n} \right] (2r-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \right] \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z.$$

Hledané residuum je

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{2}{\omega} \right)^n \overset{x}{\underset{a}{S}} (x-z-\omega) \ldots$$

$$\ldots (x-z-\overline{n-1}\,\omega)(-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z; \tag{39}$$

použijme opět vztahu (35) a klaďme, položíce zároveň $\overline{n+1}$ za n,

$$G_1, s(x \mid \omega) = \underset{\omega}{S} (x+\omega)(x+2\omega) \ldots (x+s\omega) \varphi(x) \nabla x =$$

$$= \frac{2}{\omega} \overset{x}{\underset{a}{S}} (z+\omega)(z+2\omega) \ldots (z+s\omega)(-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z \text{ [13]} \tag{40}$$

Je tedy redukce součtu prvního druhu v případě stejných rozpětí vyjádřena relací

$$\overset{n+1}{\underset{\omega}{S}} \varphi(x) \nabla x =$$

$$= \left(\frac{2}{\omega} \right)^n \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{0=s}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} x(x-\omega) \ldots$$

$$\ldots (x-\overline{n-s-1}\,\omega)\, G_1, s(x \mid \omega). \tag{41}$$

Možno tudíž říci, že v případě stejných rozpětí lze součet prvního i druhého druhu a libovolného řádu vyjádřiti lineárně pomocí příslušných součtů řádu prvního [14].

*

Sur la reduction des sommes $\overset{x}{\underset{a}{S}} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z$ et $\overset{n}{\underset{\omega}{S}} \varphi(x) \nabla x$.

(Extrait de l'article précédent.)

En partant de certaines considérations de Cauchy sur l'emploi d'équations symboliques dans diverses branches de l'analyse et du calcul aux différences finies, [15]) je donne, dans l'article précédent, une démonstration des formules (37) et (41) qui expriment la réduction des sommes de la première (3) et de la seconde espèce (6), au cas où les nombres w_k sont égaux.

---

[13]) Viz rovnici (13).
[14]) Předneseno na schůzi Jednoty čsl. mat. a fys., dne 4./XII. 1924.
[15]) (Oeuvres II), t. VIII., p. 8—38.

Le théorème qui est le point de départ de nos considérations ultérieures est exprimé par l'équation (24). Θ étant une opération distributive quelconque, $\varphi(x)$ une fonction donnée, $f(x)$ et $F(x)$ des polynomes pour lesquels la décomposition (14) existe, on peut satisfaire à l'équation (15) par la somme (17) des solutions du système des équations (16).

Pour donner une démonstration rigoureuse du théorème précédent, on peut procéder de la manière suivante. Multiplions, en tenant compte de (18), l'équation (14) par $F(x)$. On obtient une identité qui reste, manifestement, valable, si l'on remplace la variable x par Θ et que l'on applique les deux cotés de l'équation en Θ, ainsi obtenue, à une fonction $\varphi(x)$ quelconque. Donc, l'équation (19) est vraie.

Appliquons, maintenant, successivement, aux équations (16) les opérations $\overline{F_1}(\Theta), \ldots, \overline{F_i}(\Theta)$; on a le système (20), d'où l'on obtient, par une simple sommation, l'équation (21). Ainsi, le théorème énoncé est démontré.

Pour continuer, considérons d'abord les solutions particulières (9) et (12) des équations (7) et (10) et la relation (13) qui n'est pas, à mon avis, sans intérêt. Supposons, pour plus de commodité, que l'ordre de $f(x)$ soit inférieur à celui de la fonction $F(x)$ et remplaçons (14) par sa décomposition en fractions simples (25). En posant ensuite $f(x) = 1$, $F(x) = x^n$, $\Theta = \underset{\omega}{\Delta}$ ou $\Theta = \underset{\omega}{\nabla}$, on obtient par un calcul élémentaire, les formules (37) et (41).

Il est nécessaire de remarquer que Cauchy a donné, pour les cas de $\Theta\,\psi(x) = \psi(x+h) - \psi(x)$, $\Theta\,\psi(x) = D\,\psi(x) = \psi'(x)$, une démonstration du théorème mentionné plus haut et une formule de réduction (α) (voir la préface de l'article précédent); mais cette démonstration est incomplète et la formule fausse. Cauchy a introduit, pour éviter, évidemment, les constantes arbitraires, dans ses considérations la notion d'une somme définie

$$\sum_{x_0}^{x} f(x)$$

(analogie de l'intégrale définie), une notion peu précise à son époque et qui doit être remplacée par la solution principale (6) de M. N. E. Nörlund.

M. Nörlund démontra les formules (34) et (41) dans son travail „Remarques diverses sur le calcul aux différences finies"[16]) d'une manière tout à fait différente de celle employée dans cette article.

---

[16]) Journal de Mathématiques, 9 série, t. II., p. 204—205.