Antonín Pleskot

O jisté vlastnosti čar algebraických a s tím souvisící větě algebraické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 3, 239--243

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122598`

stane, rovná-li se odchylka β paprsků světelných odchylce α povrchových přímek šroubové plochy od roviny kruhu (m_1).

Kružnice jdoucí buďto bodem v_1 nebo o_1 přetvoří se v cirkulárnou křivku stupně třetího, která jest cissoidálou a zároveň strofoidálou [7]), což lze i geometricky dokázati. O důkazu tom míním pojednati v článku zvláštním a uvedu jen některé druhy cissoidál:

a) Dotýká-li se kruh (m_1) přímky $o_1 v_1$ v bodu v_1 a je-li o_1 bodem úběžným přímky $v_1 p$, jest (m'_1) *cissoidou Diocles-ovou.*

b) Prochází-li kruh (m_1) bodem v_1 a má-li m_1 svůj střed ω na kruhu $(o_1 v_1)$ [8]), jest (m'_1) *trisektorií Maclaurin-ovou.*

c) Má-li kruh (m_1) některou tětivu kruhu $(o_1 v_1)$ za průměr, jest (m'_1) *ophiuridou*, neboť jedna tečna této cissoidály stojí kolmo na její asymptotě.

V BRNĚ dne 12. ledna 1906.

O jisté vlastnosti čar algebraických a s tím souvisící větě algebraické.

Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

Protneme-li algebraickou čáru K_1 libovolnou přímkou A a v průsečících vedeme tečny ke křivce a protneme-li dále touž křivku přímkou B s přímkou A rovnoběžnou, tu střed průsečíků této čáry s přímkou B shoduje se se středem průsečíků tečen s přímkou B.

Věta tato plyne přímo ze známého theoremu Newtonova o asymptotách algebraických čar.

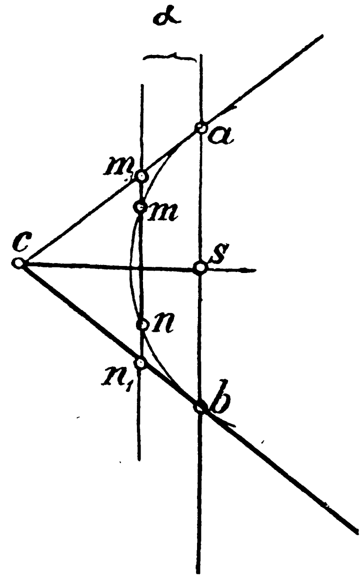
---

[7]) Je-li dán kruh K, přímka P a v ní bod o, protne kterákoliv tečna kruhu K přímku P v bodu ω; učiní-li se na této tečně $m_1\omega_1 = n_1\omega = o\omega$, obdrží se pro body m_1 a n_1 dvě geom. místa, která jsou cirkulárními křivkami stupně třetího o společném bodu dvojném o. Přejde-li však kruh K v bod, splynou křivky (m_1) a (n_1) v křivku jedinou, která se nazývá strofoidou. Lze tedy v obecném případě křivky (m_1) a (n_1) nazvati *strofoidálami.*

[8]) $(o_1 v_1)$ značí kruh o průměru $\overline{o_1 v_1}$.

Danou křivku K_1 v rovině nákresny volme jakožto centrální průmět křivky K v rovině ϱ se nacházející a přímku A za průmět nekonečně vzdálené přímky roviny ϱ. Přímku B pak možno pokládati za stopu roviny ϱ v nákresně.

Jednotlivé tečny $t_1, t_2 \ldots t_n$ vedené v průsečících přímky A s křivkou K_1 nejsou pak nic jiného než centrální obrazy asymptot $T_1, T_2 \ldots T_n$ křivky K; asymptoty tyto protínají se s tečnami $t_1, t_2 \ldots t_n$ v bodech, jež leží vesměs na přímce B



Obr. 1.

a poněvadž dle theoremu Newtonova střed průsečíků asymptot, s přímkou B shoduje se se středem průsečíků přímky B s křivkou K a tyto opět shodují se s průsečíky přímky B s křivkou K_1 jest tím věta hořejší dokázána.

Poněvadž věta Newtonova platí pro ten případ, že žádná z asymptot nepadne do vzdálenosti nekonečné, třeba předpokládati ve větě hořejší, že žádná z tečen $t_1, t_2 \ldots t_n$ není rovnoběžná s přímkou B, t. j. nestotožňuje se s přímkou A.

V ročníku 28. t. č. pod titulem „Nová vlastnost kuželoseček" uveřejnil dvorní radá prof. Zahradník poznámku o kuželosečkách, ku které v témž ročníku připojil dodatek prof. Pour a ukázal, že možno vysloviti tuto obecnější větu:

Vedeme-li libovolným bodem c (obr. 1.) ke kuželosečce tečny ca a cb, při čemž značí a a b body dotyčné, pak libovolná sečna rovnoběžná s přímkou ab protíná kuželosečku v bodech m a n a tečny v bodech m_1 a n_1 i platí pak

$$mm_1 = n_1 n.$$

Tuto větu odvodil prof. Pour z vlastnosti kružnice centrálním promítáním.

Tato věta, jak snadno se nahlédne, jest jen speciálním případem věty obecné, kterou jsme právě dokázali; neboť pro čáry stupně druhého střed středních vzdáleností průsečíků shoduje se s půlícím bodem vzdálenosti průsečíků.

Mimochodem budiž zde ukázáno, jak okamžitě tato věta pro kuželosečky z jejich polárních vlastností může býti odůvodněna.

Polára úběžného bodu α přímky ab prochází středem s úsečky ab a pólem c přímky ab; jest tedy sc polárou bodu α. Poněvadž přímka mn jest s ab rovnoběžná, půlí polára sc jak mn tak i $m_1 n_1$ a jest proto $mm_1 = n_1 n$.

Zajímavou jest applikace věty hořejší na důkaz věty v analysi často se vyskytující, jež zní:

Značí-li $\psi(x)$ a $f(x)$ dvě racionální funkce celistvé:

$$\psi(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

a jsou-li kořeny $x_1, x_2 \ldots x_n$ rovnice

$$f(x) = 0,$$

vesměs různé, pak platí

$$\Sigma \frac{\psi(x)}{f'(x)} = a_1,$$

kdež součet vztahuje se na všecky kořeny rovnice

$$f(x) = 0.$$

Abychom větu tuto geometricky odůvodnili, užijme hořejší poučky na křivku, jejíž rovnice zní

$$y(a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots a_n)-(x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n)=0,$$

čili

$$y\psi(x)-f(x)=0.$$

Volíme-li za přímku A osu X, pak průsečíky osy X s křivkou mají za úsečky kořeny rovnice

$$f(x)=0,$$

t. j. hodnoty $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Tečny vedené body $(x_1, 0), (x_2, 0) \ldots (x_n, 0)$ vyhovují podmínce, že žádná z nich nesplývá s osou X, neboť předpokládáme, že všechny kořeny $x_1, x_2 \ldots x_n$ jsou od sebe různy.

Směrnice y'_k tečny v bodě $(x_k, 0)$ jest stanovena rovnicí

$$y'_k\psi(x_k)-f'(x_k)=0,$$

z níž plyne

$$y'_k=\frac{f'(x_k)}{\psi(x_k)}.$$

Rovnice příslušné tečny pak zní

$$Y=\frac{f'(x_k)}{\psi(x_k)}(X-x_k).$$

Za přímku B volme přímku, jejíž rovnice zní

$$Y=1.$$

Úsečka průsečného bodu této přímky s tečnou má pak hodnotu

$$X=\frac{\psi(x_k)}{f'(x_k)}+x_k.$$

Úsečka středu průsečíků všech tečen body $(x_k, 0)$ vedených s přímkou B má pak úsečku ξ, jež dána jest výrazem

$$\xi=\frac{\Sigma x_k+\Sigma\frac{\psi(x_k)}{f'(x_k)}}{n},$$

aneb, ježto $\Sigma x_k=-b_1$

$$\xi=-\frac{b_1}{n}+\frac{1}{n}\Sigma\frac{\psi(x_k)}{f'(x_k)}. \qquad (\alpha)$$

Střed průsečíků přímky B s křivkou (1) plyne z rovnice

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots b_n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n = 0,$$

z níž dostaneme

$$\xi = -\frac{b_1 - a_1}{n}. \qquad (\beta)$$

Z rovnice (α) a (β) plyne

$$\sum \frac{\psi(x_k)}{f'(x_k)} = a_1.$$

Větu, kterou jsme zde dokázali, mohli bychom také přímo z theoremu Newtonova o asymptotách odůvodniti, jak jsme na jiném místě ukázali.

O jednom rozšíření rozvoje Clebsch-Gordanova.

Napsal K. Petr.

1. Rozvoj Clebsch-Gordanův vztahuje se ku formě o dvou řadách binárních proměnných (x_1, x_2), (y_1, y_2). Takovou formu lze totiž rozvinouti v řadu tvaru

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = A_0 + (xy) A_1 + (xy)^2 A_2 + \ldots + (xy)^n A_n, \quad m \geqq n, \qquad (1)$$

kde $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right)$ značí formu v (x_1, x_2) stupně m-tého, v (y_1, y_2) stupně n-tého a kde $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Výrazy A_k pak jsou formy o dvou řadách proměnných*) (x), (y) a jsou to poláry forem o jedné řadě proměnných. Jestliže jest ku př. $G(x)$ forma r-tého stupně v (x) (kterážto forma obsahovati může i jiné řady proměnné ku př. (y)), jest operace vytvořující poláru této formy dle proměnné (x) s pólem (y) takto definována

$$D_{xy} G(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} y_2\right), \qquad (2)$$

*) Místo (x_1, x_2), (y_1, y_2) ... užívati budu v násl. obvyklého zkrácení (x), (y) ...