František Josef Studnička

O rozkladu lomených funkcí algebraických v částečné zlomky pomocí derivačních determinantů sfenoidalních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 1--10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122579`

O rozkladu lomených funkcí algebraických v částečné zlomky pomocí derivačních determinantů sfenoidalních.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

Zavedeme-li označení

$$(1) \qquad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

$$(2) \qquad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

představuje, jakož známo, podíl

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = f(x)$$

za současně platné podmínky

$$m < n$$

ryze lomenou algebraickou funkci racionální, obsahuje-li jak φ tak ψ pouze celistvé a positivní mocnitele.

K různým účelům, zejména integračním, rozkládá se funkce f v tak zvané *částečné* zlomky tvaru

$$\frac{A_\varkappa}{(x-a)^\varkappa},$$

kdež $A_\varkappa$ značí konstantu, a pak kořen rovnice

$$(4) \qquad \psi(x) = 0,$$

možná-li polynom (2) rozložiti v součin tvaru

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-m)^\mu,$$

kdež celistvý a positivní mocnitelové hoví podmínce

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu = n,$$

načež rozkladný úkol vede k stejnině

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{\varkappa=0}^{\alpha-1} \frac{A_\varkappa}{(x-a)^{\alpha-\varkappa}} + \sum_{\varkappa=0}^{\beta-1} \frac{B_\varkappa}{(x-b)^{\beta-\varkappa}} + \ldots + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \frac{M_\varkappa}{(x-m)^{\mu-\varkappa}},$$

vyžadující stanovení konstant

$$A_\varkappa, B_\varkappa, \ldots, M_\varkappa, (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

pro jednotlivé hodnoty přípony $\varkappa$, což děje se, jakož známo, způsoby rozmanitými.

Nejdokonalejší methoda jest arci ta, kteráž vede *přímo* k určení kteréhokoli z čitatelů zde se vyskytujících, a to *independentně*.

Poněvadž jest postup týž, vyjdeme od kořenové hodnoty a, a položíme-li, chtějíce stanoviti konstanty $A_\varkappa$,

$$(6) \qquad \frac{\psi(x)}{(x-a)^\alpha} = \chi(x),$$

obdržíme místo vzorce (3).

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \chi(x)} = \sum \frac{A_\varkappa}{(x-a)^\alpha} + \ldots,$$

z čehož vyplyne napřed

$$(7) \qquad \frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + (x-a)^\alpha F(x),$$

kdež význam funkce $F(x)$ jest patrný, a po k-krát opakované derivaci pak

$$D^\varkappa \left(\frac{\varphi}{\chi}\right) = k!\, A_\varkappa + (x-a) \,.\, \Phi(x),$$

tak že dosadivše sem, kdež Φ jest výraz známý,

$$x = a,$$

zjednáme si napřed relaci

$$\Big/_{x}^{a} D^{\varkappa}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) = k!\, A_{\varkappa},$$

a užijeme-li známého vzorce derivačního *)

$$(8)\quad D^{\varkappa}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) = \frac{(-1)^{\varkappa}}{\chi^{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \varphi, & \chi, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \varphi', & \chi', & \chi, & 0, & \dots, & 0 \\ \varphi'', & \chi'', & 2\chi', & \chi, & \dots, & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \varphi^{(\varkappa)}, & \chi^{(\varkappa)}, & k_1\chi^{(\varkappa-1)}, & k_2\chi^{(\varkappa-2)}, & \dots, & k\chi' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\varkappa}}{\chi^{\varkappa+1}} \Delta_{\varkappa+1},$$

konečně hledaný výraz independentní

$$(9)\qquad A_{\varkappa} = \frac{(-1)^{\varkappa}}{k!} \Big/_{x}^{a} \frac{\Delta_{\varkappa+1}}{\chi^{\varkappa+1}}.$$

K témuž výsledku bychom přišli, kdybychom místo derivování relace (7) byli užili poučky Maclaurinovy ve tvaru

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi(a)}{\chi(a)} + \frac{x-a}{1!} \Big/_{x}^{a} D\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!} \Big/_{x}^{a} D^2\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + \dots$$
$$+ \frac{(x-a)^{\varkappa}}{K!} \Big/_{x}^{a} D^{\varkappa}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) \dots$$

a provedli pak příslušné identifikování.

Ze vzorce (8) a (9) obdrží se zároveň, rozložíme-li příslušný determinant *sfenoidalní* podle prvků posledního řádku, **) vzorec *rekurrentní*

---

*) Viz: *Studnička* „O počtu differencialním", II. vyd. Praha, 1878, pag. 46.

**) Takového rekurrentního rozkladu determinantu sfenoidalního poprvé užito v mém pojednání „*Ueber ein Analogon der Euler'schen Zahlen*", Sitzb. d. kön. b. Ges. d. Wiss. 1900 IX. pag. 3.

$$(10)\qquad {}^{x}/^{\alpha}\, k!\,\chi\, A_{\varkappa} = \varphi^{(\varkappa)} - A_0\,\chi^{(\varkappa)} - k\,A_1\,\chi^{(\varkappa-1)}$$
$$- k(k-1)\,A_2\,\chi^{(\varkappa-2)} - \ldots - k!\,A_{\varkappa-1}\,\chi',$$

z něhož se postupně stanoví po sobě jdoucí čitatelové

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_{\alpha-1}.$$

Jest-li pak ve zvláštním případě

$$\chi(x) = 1,$$

obdrží se jak ze vzorce (9) tak z (10) jednodušší výraz

$$(11)\qquad A_{\varkappa} = \frac{1}{k!}\,{}^{x}\!/^{\alpha}\ \varphi^{(\varkappa)},$$

jejž i přímo z relace (7) možná stanoviti.

Poněvadž tu hraje hlavní úlohu derivační determinant (8), jehož vyčíslení snadno se provésti dá snížením stupně a redukováním jeho na stupeň druhý podle schematu

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, 0, 0, 0 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, 0, 0 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, 0 \\ \alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4, \varepsilon_4 \\ \alpha_5, \beta_5, \gamma_5, \delta_5, \varepsilon_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2', \gamma_2, 0, 0 \\ \beta_3', \gamma_3, \delta_3, 0 \\ \beta_4', \gamma_4, \delta_4, \varepsilon_4 \\ \beta_5', \gamma_5, \delta_5, \varepsilon_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_3', \delta_3, 0 \\ \gamma_4', \delta_4, \varepsilon_4 \\ \gamma_5', \delta_5, \varepsilon_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_4', \varepsilon_4 \\ \delta_5', \varepsilon_5 \end{vmatrix},$$

zavedeme-li sem kratší označení

$$(\alpha_1\,\beta_{\varkappa}) = \beta_{\varkappa}', \qquad (\beta_2'\,\gamma_{\varkappa}) = \gamma_{\varkappa}', \qquad (\gamma_3'\,\delta_{\varkappa}) = \delta_{\varkappa}',$$

a poněvadž podle známého Harriotova mechanismu početního snadno se provádějí vytčené substituce do polynomů daných, jest stanovení čitatelů zlomků částečných i při větším jich počtu zcela jednoduché a snadné, jakož poznati možná z příkladu*) dosti složitého

$$\frac{8x^5 - 97x^4 + 457x^3 - 1015x^2 + 1039x - 376}{(x-3)^4 \,.\, (x-1)^2}$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{3} \frac{A_{\varkappa}}{(x-3)^{4-\varkappa}} + \sum_{\varkappa=0}^{1} \frac{B_{\varkappa}}{(x-1)^{2-\varkappa}}.$$

*) Viz: *Lobatto* „Lessen over de Differentiaal- en Integraal-Rekening“ I. Deel (Amsterdam, 1851), pag. 116.

Napřed si tu zjednejme

$$\varphi'(x) = 40x^4 - 388x^3 + 1371x^2 - 2030x + 1039,$$
$$\varphi''(x) = 160x^3 - 1164x^2 + 2742x - 2030,$$
$$\varphi'''(x) = 480x^2 - 2328x + 2742$$

a pak se zřetelem ku prvnímu kořenu

$$\chi(x) = (x - 1)^2, \quad \chi'(x) = 2(x - 1), \quad \chi''(x) = 2,$$

načež si zjednáme známou substitucí napřed

$$\begin{array}{c|cccccc} \varphi & 8, & -97, & 457, & -1015, & 1039, & -376 \\ \hline 3 & 8, & -73, & 238, & -301, & 136, & \mathbf{32} \end{array}$$

a podobně dále pro první derivaci

$$\begin{array}{c|ccccc} \varphi' & 40, & -388, & 1371, & -2030, & 1039 \\ \hline 3 & 40, & -268, & 567, & -329, & \mathbf{52} \end{array},$$

pak pro druhou derivaci

$$\begin{array}{c|cccc} \varphi'' & 160, & -1164, & 2742, & -2030 \\ \hline 3 & 160, & 684, & 690, & \mathbf{40} \end{array}$$

a konečně pro derivaci třetí

$$\begin{array}{c|ccc} \varphi''' & 480, & -2328, & 2742 \\ \hline 3 & 480, & -888, & \mathbf{78} \end{array},$$

a mimo to pro druhou funkci přímo

$$\chi(3) = 4, \quad \chi'(3) = 4, \quad \chi''(3) = 2, \quad \chi'''(3) = 0,$$

tak že se pro příslušný determinant derivační obdrží výraz

$$\Delta_{\varkappa+1} = \begin{vmatrix} 32, & 4, & 0, & 0 \\ 52, & 4, & 4, & 0 \\ 40, & 2, & 8, & 4 \\ 78, & 0, & 6, & 12 \end{vmatrix}.$$

I bude tu podle vzorce (9) pro $\varkappa = 0$

$$A_0 = \frac{\Delta_1}{\chi} = \frac{32}{4} = 8,$$

dále pak pro $\varkappa = 1$

$$A_1 = \frac{-1}{1!}\frac{\Delta_2}{\chi^2} = \frac{-1}{4^2}\begin{vmatrix} 32, & 4 \\ 52, & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{5},$$

pro $\varkappa = 2$ dále

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{\Delta_3}{\chi^3} = \frac{1}{2 \cdot 4^3}\begin{vmatrix} 32, & 4, & 0 \\ 52, & 4, & 4 \\ 40, & 2, & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -10, & 1 \\ -12, & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{2},$$

a konečně pro $\varkappa = 3$

$$A_3 = \frac{-1}{3!}\frac{\Delta_4}{\chi^4} = \frac{-1}{6 \cdot 4^4}\begin{vmatrix} 32, & 4, & 0, & 0 \\ 52, & 4, & 4, & 0 \\ 40, & 2, & 4, & 4 \\ 78, & 0, & 6, & 12 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{vmatrix} -8, & 1 \\ 8, & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{4}.$$

Abychom pak určili čitatele B_0, B_1, zjednejme si přímo

$$\varphi(1) = 16, \qquad \varphi'(1) = 32,$$

a jelikož tu platí pro druhý kořen

$$\chi(x) = (x-3)^4, \qquad \chi'(x) = 4(x-3)^3,$$

druhé dvě hodnoty substituční

$$\chi(1) = 16, \qquad \chi'(1) = -32,$$

načež náš determinant derivační bude

$$\Delta_{\varkappa+1} = \begin{vmatrix} 16, & 16 \\ 32, & -32 \end{vmatrix},$$

a tedy podle vzorce (9) se obdrží pro $\varkappa = 0$

$$B_0 = \frac{\Delta_1}{16} = \frac{16}{16} = \mathbf{1},$$

a taktéž pro $\varkappa = 1$

$$B_1 = \frac{-\Delta_2}{16^2} = -\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{4},$$

čímž úkol náš ukončen.

Závěrečný výsledek našeho rozkladu poskytuje tedy součet částečných zlomků

$$\frac{8}{(x-3)^4}+\frac{5}{(x-3)^3}-\frac{2}{(x-3)^2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}.$$

Poznámka.

Jest-li nějaký kořen rovnice (4) *soujemný*, dejme tomu a, musí též hodnota konjugovaná býti kořenem, jelikož výraz (2) obsahuje koefficienty vesměs realné, tak že, platí-li tu o kořenu prvním

$$a = p + qi,$$

bude současně kořen druhý

$$b = p - qi,$$

příslušní pak čitatelové zlomků částečných stanou se taktéž soujemnými, stanovení jich pak provádí se dosti snadno způsobem dřívějším.

Chceme-li se však vyhnouti členům imaginarním, spojíme dva linearní faktory z obou těchto kořenů plynoucí v jeden, tak že obdržíme

$$(12)\qquad (x-a)(x-b) = x^2 - 2px + p^2 + q^2 = \mathrm{T},$$

načež rozklad hledaný obdrží tvar

$$(13)\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\mathrm{T}^\alpha \chi(x)} = \sum_{\varkappa=0}^{\alpha-1} \frac{\mathrm{A}_\varkappa + \mathrm{B}_\varkappa x}{\mathrm{T}^{\alpha-\varkappa}} + \ldots,$$

kdež nutno stanoviti pro čitatele hodnoty $\mathrm{A}_\varkappa$, $\mathrm{B}_\varkappa$.

A tu nevede vzorec tak jednoduchý, jakým jest (9), k cíli konečnému, nýbrž nejlépe methoda známá, užívající hodnot kořenových, arci v úpravě tomuto tvaru přiměřené, jakouž tuto připojujeme.

Položíme-li se zřetelem ke vzorci (12) a (13)

$$(14)\qquad \frac{\varphi(x)}{\mathrm{T}^\alpha . \chi(x)} = \frac{\mathrm{A}_0 + \mathrm{B}_0 x}{\mathrm{T}^\alpha} + \frac{\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 x}{\mathrm{T}^{\alpha-1}} + \ldots,$$

obdržíme převedením jmenovatele na stranu pravou

$$\varphi(x) = (A_0 + B_0 x)\chi(x) + T \,.\, f(x),$$

kdež význam faktoru f jest patrný; dosadíme-li sem pak za x buď soujemnou hodnotu a nebo b, vznikne z ní relace

$$M \pm Ni = [A_0 + B_0(p \pm qi)] \,.\, [P \pm Qi],$$

zavedeme-li podle známého rozkladu funkcí soujemných φ a χ

$$(15) \qquad \varphi(p \pm qi) = M \pm Ni,$$
$$(16) \qquad \chi(p \pm qi) = P \pm Qi;$$

porovnáme-li pak v předcházející relaci stejnorodé členy, zjednáme si linearní rovnice

$$(17) \qquad A_0 P - B_0(pP - qQ) = M,$$
$$(18) \qquad A_0 Q + B_0(qP + pQ) = N,$$

z nichž se obyčejným řešením určí jak A_0 tak B_0.

Abychom pak určili další čitatele, převeďme první člen rozkladu (14) na stranu levou, čímž obdržíme

$$\frac{\varphi(x) - (A_0 + B_0 x)\chi(x)}{T^\alpha \,.\, \chi(x)} = \frac{A_1 + B_1 x}{T^{\alpha-1}} + \frac{A_2 + B_2 x}{T^{\alpha-2}} + \ldots;$$

a poněvadž tu na levé straně jak čitatel tak jmenovatel se anulluje pro obě dřívější hodnoty kořenové, musí kvadratický výraz T i v čitateli býti faktorem,*) tak že tu možná jím krátiti, načež zbude k dalšímu rozkladu

$$\frac{\varphi_1(x)}{T^{\alpha-1}\chi(x)} = \frac{A_1 + B_1 x}{T^{\alpha-1}} + \frac{A_2 + B_2 x}{T^{\alpha-2}} + \ldots,$$

při čemž se postupuje týmže způsobem, a takto krok za krokem přichází ku poznání dvojic součinitelových $A_\varkappa$, $B_\varkappa$.

Jest-li pak ve zvláštním případě

$$\chi(x) = 1,$$

---

*) Týž závěrek dovoluje i relace z posledního vzorce přímo plynoucí, odstraníme-li jmenovatele strany levé,

$$\varphi(x) - (A_0 + B_0 x)\chi(x) = T \,.\, \Phi(x),$$

kdež význam funkce Φ jest patrný.

stane se počet naznačený a v řešení rovnic (17) a (18) vrcholící mnohem jednodušším, poněvadž tu

$$P = 1, \quad Q = 0,$$

a tedy rovnice tyto nabudou tvaru

$$A_0 + B_0 p = M,$$
$$B_0 q = N,$$

z něhož snadno se obdrží

$$(19) \qquad A_0 = M - \frac{Np}{q}, \quad B_0 = \frac{N}{q}.$$

Připomenouti ještě sluší, že tímto způsobem možná rozklad provésti v případě nejjednodušším, kde rovnice (4) obsahuje více kořenů soujemných, nestejných, ale neopakovaných; avšak rychleji se tu přijde k cíli pouhým krokem prvním zde vytčeným a pro každý kořen zvláště opakovaným.

Abychom pak ukázali konkretně tento postup, připojujeme ještě rozklad ryze lomené funkce algebraické

$$\frac{x^5 + 2x^3 + x}{(x^2 - 2x + 2)^3} = \sum_{\varkappa=0}^{2} \frac{A_\varkappa + B_\varkappa x}{(x^2 - 2x + 2)^{3-\varkappa}},$$

kdež jest, jakož snadno se poznává,

$$a = 1 + i, \quad b = 1 - i, \quad \chi(x) = 1.$$

Jestiť tu především

$$\varphi(1 + i) \equiv -7 + i = A_0 + B_0 (1 + i),$$

z čehož porovnáním plyne

$$A_0 = -8, \quad B_0 = 1;$$

převedeme-li pak první takto určený zlomek na levou stranu a zkrátíme-li příslušným trinomem, zbude k dalšímu rozkladu

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 4}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{A_1 + B_1 x}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \dots,$$

tak že vytčeným postupem si zjednáme relaci

$$\varphi_1(1+i) = 6 + 10i = A_1 + B_1(1+i),$$

z níž vyplývá

$$A_1 = -4, \quad B_1 = 10;$$

a převedeme-li částečný zlomek tyto koefficienty obsahující na stranu levou a zkrátíme-li opět týmže trinomem, zbude

$$\frac{x+4}{x^2-2x+2} = \frac{A_2 + B_2 x}{x^2-2x+2},$$

kdež netřeba dalších výpočtů. Jestiť tedy výsledek našeho takto provedeného rozkladu

$$\frac{x^5+2x^3+x}{(x^2-2x+2)^3}$$

$$= \frac{x-8}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{10x-4}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{x+4}{x^2-2x+4},$$

což bychom i pomocí poučky o neurčitých součinitelích obdrželi, avšak řešením *šesti* rovnic linearních, arci valně zjednodušených, jakož si laskavý čtenář sám doloží.

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu.

Napsal

Jan Sobotka,
professor české vysoké školy technické v Brně.

1. Kdežto způsoby grafického integrování doznaly značného zdokonalení a rozsáhlého užití jmenovitě ve vědách inženýrských přičiněním odborníků, mezi nimiž sluší p. professora *Josefa Šolína* v prvé řadě jmenovati,*) bylo dosud o grafickém integrování differencialních rovnic velmi málo psáno. Důvod toho

---

*) Na doklad toho poukazuji k literarním poznámkám činěným ve známém díle „*Abdank-Abakanowicz*: Die Integraphen", deutsch von E. Bitterli, Leipzig 1889 na str. 141. a 142.