Antonín Jeřábek

Kterak přikročiti ku řešení pravidelného dvacítistěna, nejsou-li známy číselné vztahy částek pravidelního pětiúhelníka?

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 4, 202--205

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122572

Vzdálenosť těžiště výseku od středu koule $p_0 = \frac{3}{8}(2r - v)$,

vzdálenosť těžiště kužele od středu koule $p_2 = \frac{3}{4}(r - v)$;

je-li vzdálenosť těžiště úseku kulového od středu koule x, jest

$$x = \frac{P_0 p_0 - P_2 p_2}{P_1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 v \cdot \frac{3}{8}(2r - v) - \frac{\pi v}{3}(2r - v)(r - v) \cdot \frac{3}{4}(r - v)}{\frac{\pi v^2}{3}(3r - v)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{(2r - v)^2}{3r - v},$$

t. j. těžiště kulového úseku jest na středním poloměru a to u vzdálenosti $= \frac{3}{4}\frac{(2r - v)^2}{3r - v}$ od středu koule.

Kterak přikročiti ku řešení pravidelného dvacítistěna, nejsou-li známy číselné vztahy částek pravidelného pětiúhelníka?

Napsal

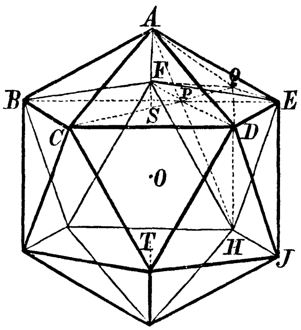
Antonín Jeřábek,

professor akademického gymnasia v Praze.

Značiž a hranu pravidelného dvacítistěna, r poloměr koule témuž vepsané, R poloměr koule opsané, ϱ pak poloměr kruhu opsaného kolem pravidelného pětiúhelníka, jehož strana se rovná a, a konečně d úhlopříčku tohoto pětiúhelníka.

Promítneme-li dva vrcholy pravidelného dvacítistěna, jež neleží na společné hraně a nejsou protějšími na př. A a H (viz obr.) na rovinu položenou koncovými body hran z A vybíhajících, jest pravoúhlý průmět bodu jednoho středem S a bodu druhého vrcholem Q pravidelného desítiúhelníka, s nímž má pravidelný pětiúhelník $BCDEF$ vrcholy své společné; i leží pak průsek P úhlopříček DF a BE na průměru pravidelného desítiúhelníka CQ, při čemž $DP \# CB$, a tedy

(1) $$DP = a.$$



Značí-li s stranu tohoto desítiúhelníka, lze snadno dokázati, že $\sphericalangle PFQ = \sphericalangle FPQ$, čili že

(2) $$QP = s.$$

Protože v pravidelném pětiúhelníku $ADJHF$ jest $DF \parallel JH$, a dle (1) $DP = JH$, jest též $HP \# JD$ a

(3) $$HP = a;$$

odkud zároveň vysvítá, že úhlopříčka HA, jsouc rovnoběžna se stranou JD, bodem P prochází.

Ježto pak $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle AHQ$ (obvodové úhly nad týmž obloukem hlavního kruhu, body A a Q vedeného),

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle PQH = \frac{\pi}{2},$$

a dle (3) $AC = PH$, jest $\triangle ASC \cong \triangle PQH$; odkud $SA = QP$ a dle (2)

(4) $$SA = s,$$

dále též $SC = QH$, a protože $SC = \varrho$,

(5) $$QH = \varrho.$$

I. Dle (4) můžeme říci:

Je-li v pravoúhlém trojúhelníku (ASC) přeponou a *a odvěsnou* ϱ, *jest* s *druhou odvěsnou.*

Povážíme-li, že $a =$ straně pravidelného pětiúhelníka $BCDEF$, dokázali jsme větu:

Čtverec strany pravidelného pětiúhelníka do kruhu vepsaného se rovná čtverci poloměru zvětšenému o čtverec strany pravidelného desítiúhelníka do téhož kruhu vepsaného. *)

II. Z výsledku (5) plyne pak $OS = \frac{1}{2}\varrho$, $OC = \sqrt{OS^2 + SC^2}$; odkud pak

$$R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{5}. \tag{6}$$

Dále pak $SA = OA - OS$, a tedy $SA = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{5} - \frac{1}{2}\varrho$, čili

$$s = \frac{1}{2}\varrho(\sqrt{5} - 1). \tag{7}$$

Potom $AC = \sqrt{2R \,.\, SA} = \sqrt{2R \,.\, s}$,

čili
$$a = \varrho\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

nebo
$$a = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \tag{8}$$

Podobně $AH = \sqrt{2R \,.\, TA} = \sqrt{2R \,.\, (s + \varrho)}$,

a také dle (6)
$$d = \varrho\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

nebo
$$d = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \tag{9}$$

*) Větu tuto dokázali jsme přísně geometricky; v důkazech, jež obyčejně bývají uváděny, buď zjevně nebo skrytě (věta Ptolemaeova) užíváno bývá obratů algebraických.

Konečně z obrazce patrno, že $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$, odkud dle (6) a (8),

$$r = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3}}. \tag{10}$$

Vyloučíme-li ze vzorců (6), (7), (8), (9) a (10) kteroukoli z veličin ϱ, R, s, a, d, r, obdržíme ostatní vztahy jejich.

Ježto větu Pythagorovu a větu (8) a (9) bez úměr dovoditi lze, vypočítali jsme způsobem tímto veškeré číselné tyto vztahy, aniž bylo potřebí utíkati se k podobnosti obrazcův.

Drobné zprávy.

(Z astronomie.)

Píše

dr. V. Láska,

assistent astronom. ústavu české university.

Veliké přízni všech astronomů těší se v době novější a to ne neprávem astrofysika, a z této opět spektrální analyse. Tato poslední byla nyní tak zdokonalena, že bylo možno přikročiti k řešení problemů daleko epochálnějších, než bylo poznání chemického složení těles nebeských.

Zvláštní náhodou žili v Praze oba ti mužové, kterým základy našeho vědění o pohybech těles nebeských děkujeme. Byl to *Kepler,* současník Tyge Brahe-a a *Doppler*, ještě nedávno professor university pražské. První nám usnadnil cestu v tom případě, kdy možno vzdálenosť určiti, poslední nás učí, jak bychom mohli i bez této se obejíti. Jak známo, sám *Zöllner* (Berichte der k. sächs. Ges. der Wiss. 1869) již před časem na to poukázal, že možno pomocí Dopplerova principu a spektroskopu určiti rychlosť, jakou se slunce kol své osy otáčí. Takové měření provedl pomocí velmi zdokonalených nástrojů *Dunér* (Astron. Nachr. č. 2968). Touto prací nejen že potvrdil dřívější výsledky *Faye-ho* a *Spörer-a*, ale i doplnil tytéž pro ony šířky (55°—75°), v kterých velmi zřídka skvrny sluneční pozorovány byly.