František Josef Studnička
O rychlém odvození některých řad trigonometrických. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 4, 173--177

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122570`

O rychlém odvození některých řad trigonometrických.

Napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

V předcházejícím ročníku „Čas. pro pěst. math. a fys.“ ukázal jsem na dvou případech, jak možná rychle přijíti k cíli, jde-li o to, aby se obdržel příslušný výsledek, vyjadřující součet řad trigonometrických.

K tamním na str. 113 et seqq. odvozeným řadám buďtež tu připojeny některé nové, obdobným spůsobem obdržené, při čemž zároveň budiž na zřeteli vzájemnosť mezi funkcemi hyperbolickými a kyklickými, jež obyčejně se goniometrickými neb i trigonometrickými nazývají.*)

1. Zavedeme-li do známé řady logarithmické

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+y}{1-y}=\frac{y}{1}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\ldots$$

za y novou hodnotu, kladouce

$$y=ae^{ix}, \qquad a<1,$$

obdržíme především

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+ae^{ix}}{1-ae^{ix}}=\frac{a}{1}\,e^{ix}+\frac{a^3}{3}\,e^{3ix}+\frac{a^5}{5}\,e^{5ix}+\ldots;$$

uvedeme-li pak levou stranu na tvar veličiny soujemné, vznikne podlé známého pravidla

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-a^2+2ia\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+2a\cos x+a^2}{1-2a\cos x+a^2}+\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a\sin x}{1-a^2}$$

*) Vyňato z rukopisu *Studnička* „Úvod do nauky o nižších funkcích transcendentních“ §. 20.

při čemž arci nepřihlíženo ku periodě příslušné, kdežto na pravé straně objeví se dvě řady a sice

$$\frac{a}{1}\cos x+\frac{a^3}{3}\cos 3x+\frac{a^5}{5}\cos 5x+\ldots$$
$$+i\left[\frac{a}{1}\sin x+\frac{a^3}{3}\sin 3x+\frac{a^5}{5}\sin 5x+\ldots\right],$$

takže porovnáme-li na obou stranách části realní a imaginární, zjednáme si jedním rázem vzorec

$$\frac{a}{1}\cos x+\frac{a^3}{3}\cos 3x+\frac{a^5}{5}\cos 5x+\ldots=\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+2a\cos x+a^2}{1-2a\cos x+a^2}, \quad (1)$$

jakož i podobný

$$\frac{a}{1}\sin x+\frac{a^3}{3}\sin 3x+\frac{a^5}{5}\sin 5x+\ldots=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a\sin x}{1-a^2}, \quad (2)$$

z nichž obraty rozmanitými obdržeti možná vzorce jiné, neméně důležité a zajímavé, jako na př. ze vzorce (2) pro $a=1$ nebo pro $x=\frac{\pi}{2}$.*)

2. Zavedeme-li do známého vzorce

$$e^y-1=\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots$$

za y tutéž novou hodnotu, kladouce

$$y=ae^{ix}=a[\cos x+i\sin x]$$

bude na levé straně patrně

$$e^{a[\cos x+i\sin x]}-1=e^{a\cos x}[\cos(a\sin x)+i\sin(a\sin x)]-1,$$

kdežto na pravé straně se objeví dvě řady a sice

$$\frac{a}{1!}\cos x+\frac{a^2}{2!}\cos 2x+\frac{a^3}{3!}\cos 3x+\ldots$$
$$+i\left[\frac{a}{1!}\sin x+\frac{a^2}{2!}\sin 2x+\frac{a^3}{3!}\sin 3x+\ldots\right],$$

*) V tomto případě obdržíme zcela pohodlně řadu pro arctg a.

takže porovnáním obou stran podlé známého pravidla si tu zjednáme nové vzorce a sice

$$e^{a\cos x}\cos(a\sin x)-1=\frac{a}{1!}\cos x+\frac{a^2}{2!}\cos 2x+\frac{a^3}{3!}\cos 3x+\ldots, \quad (3)$$

jakož i podobný

$$e^{a\cos x}\sin(a\sin x)=\frac{a}{1!}\sin x+\frac{a^2}{2!}\sin 2x+\frac{a^3}{3!}\sin 3x+\ldots, \quad (4)$$

z nichž především plyne pro $x=\frac{\pi}{2}$

$$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\ldots,$$

$$\sin a=\frac{a}{1!}-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}-\ldots,$$

což jsou známé původní řady goniometrické.

Zavedeme-li pak do týchže vzorců $(-a)$ místo a, zjednáme si jednoduchým obratem napřed

$$1-e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)=\frac{a}{1!}\cos x-\frac{a^2}{2!}\cos 2x+\frac{a^3}{3!}\cos 3x-\ldots \quad (5)$$

a podobně

$$e^{-a\cos x}\sin(a\sin x)=\frac{a}{1!}\sin x-\frac{a^2}{2!}\sin 2x+\frac{a^3}{3!}\sin 3x-\ldots, \quad (6)$$

takže spojením vzorců (3) a (5) jakož i (4) a (6) addendo vznikne, užijeme-li funkcí hyperbolických, definovaných výrazy

$$S(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2},$$

$$K(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2},$$

v případě prvém

$$\cos(a\sin x)\,S(a\cos x)=\frac{a}{1!}\cos x+\frac{a^3}{3!}\cos 3x+\frac{a^5}{5!}\cos 5x+\ldots, \quad (7)$$

a v případě druhém

$$\sin(a\sin x)\,\mathrm{K}(a\cos x)=\frac{a}{1!}\sin x+\frac{a^3}{3!}\sin 3x+\frac{a^5}{5!}\sin 5x+\ldots,\quad (8)$$

kteréžto vzorce poskytují pro $x=\frac{\pi}{2}$ taktéž známé řady, sinusovou i kosinusovou.

Ostatně možná je stanoviti též přímo, užije-li se definice

$$\mathrm{S}(ae^{ix})=\frac{a}{1!}e^{ix}+\frac{a^3}{3!}e^{3ix}+\frac{a^5}{5!}e^{5ix}+\ldots$$

a pak známé poučky součtové

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}(a\cos x+ia\sin x)\\&=\mathrm{S}(a\cos x)\cos(a\sin x)+i\mathrm{K}(a\cos x)\sin(a\sin x).\end{aligned}$$

A podobně vedla by nás definice

$$\mathrm{K}(ae^{ix})=1+\frac{a^2}{2!}e^{2ix}+\frac{a^4}{4!}e^{4ix}+\ldots,$$

spojená s obdobnou poučkou součtovou

$$\begin{aligned}&\mathrm{K}(a\cos x+ia\sin x)\\&=\mathrm{K}(a\cos x)\cos(a\sin x)+i\mathrm{S}(a\cos x)\sin(a\sin x)\end{aligned}$$

k dalším vzorcům novým a sice

$$\mathrm{K}(a\cos x)\cos(a\sin x)=1+\frac{a^2}{2!}\cos 2x+\frac{a^4}{4!}\cos 4x+\ldots\quad (9)$$

jakož i ke vzorci

$$\mathrm{S}(a\cos x)\sin(a\sin x)=\frac{a^2}{2!}\sin 2x+\frac{a^4}{4!}\sin 4x+\frac{a^6}{6!}\sin 6x+\ldots\quad (10)$$

Ze vzorce (9) možná odvoditi další, užijeme-li té neb oné z obou stejnin známých

$$\begin{aligned}\cos 2kx&=1-2\sin^2 kx,\\&=2\cos^2 kx-1;\end{aligned}$$

obdržíť se tu po přiměřeném upravení strany pravé v případu prvním

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{K}(a) - \frac{1}{2}\,\mathrm{K}(a\cos x)\cos(a\sin x)$$
$$= \frac{a^2}{2!}\sin^2 x + \frac{a^4}{4!}\sin^2 2x + \frac{a^6}{6!}\sin^2 3x + \ldots, \tag{11}$$

a v případě druhém podobně

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{K}(a) + \frac{1}{2}\,\mathrm{K}(a\cos x)\cos(a\sin x)$$
$$= 1 + \frac{a^2}{2!}\cos^2 x + \frac{a^4}{4!}\cos^2 2x + \frac{a^6}{6!}\cos^2 3x + \ldots, \tag{12}$$

takže sečtením na obou stranách vzorců těchto vznikne

$$\mathrm{K}(a) = 1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} + \ldots,$$

což jest známá definice hyperbolického kosinusu.

Že tu ze vzorců těchto možná obdržeti zvláštní relace, netřeba zvláště připomínati; kdo by měl času k tomu, nechť ho užije na tomto vděčném, ač obmezeném poli.

O jednoduchém zařízení elektrometru kapilárního.

Napsal

Bartoloměj Navrátil,

ředitel realné školy v Prostějově.

K demonstrování malých elektromotorických sil (as okolo 1 voltu) užíváme na středních školách, tuším, že výhradně, elektrometru kvadrantního v úpravě prof. v. Langa, který mimo jiné předběžné přípravy vyžaduje též podstavec dokonale nehybný, jejž nalézti v našich budovách školních pro přerozmanité překážky, mnohdy malicherné, předce však neodstranitelné, bývá často nesnadno, někdy i nemožno. Možno, že v této příčině snáze vyhoví elektrometr kapilární v úpravě následující:

Jest to skleněná rourka ACDF (viz obr.) zahnutá v podobě **U**, jejíž část BCDF jest thermometrická trubička kapilární o průměru $^1/_3$—$^1/_4$ *mm*, části pak AB a FG, kterážto poslední má po straně výběžek G se zataveným drátem platinovým, jsou