Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Geometrické odvození vzorců pro algebraický součet stejnorodých primitivních funkcí goniometrických různých argumentů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 4, 337--342

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122561`

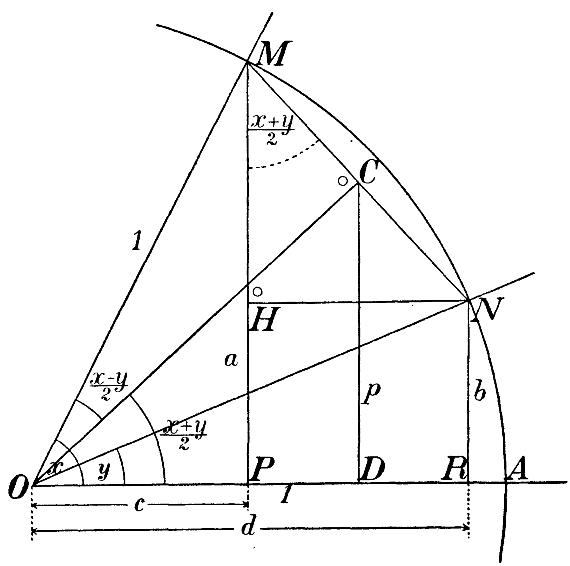
Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Geometrické odvození vzorců pro algebraický součet stejnorodých primitivních funkcí goniometrických různých argumentů.

Napsal

Augustin Pánek.

Buďtež dány úhly $AOM = x$, $AON = y$ v první čtvrti (obr. 1.), jichž společný vrchol O pokládejme za střed kružnice



Obr. 1.

poloměru $\overline{OA} = 1$. Spustíme-li s bodů M a N kolmice na $\overline{OA}$ a označíme-li $\overline{PM} = a$, $\overline{RN} = b$, pak $\overline{OP} = c$, $\overline{OR} = d$, bude

$$a = \sin x, \quad b = \sin y, \quad c = \cos x, \quad d = \cos y.$$

Vedeme-li spojnici $\overline{MN}$ a z vrcholu O rovnoramenného trojúhelníka ONM symmetrálu úhlu $NOM = x - y$, která protíná stranu $\overline{MN}$ v bodě C, jest

$$\widehat{COM} = \widehat{NOC} = \frac{x-y}{2}$$

a tedy

$$\widehat{AOC} = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Ještě uvažme, že součet rovnoběžných stran v pravoúhlém lichoběžníku $PRNM$ jest roven dvojnásobné střední příčce, tak že

$$a + b = 2 \,.\, \overline{CD} = 2p.$$

Z obrazce zřejmo, že

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a + b = 2p \\ &= 2 \,.\, \overline{OC} \sin \frac{x+y}{2} \\ &= 2 \,.\, \cos \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}, \end{aligned}$$

tedy

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \tag{1}$$

Z téhož obrazce dále patrno, že

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= c + d = 2 \,.\, \overline{OD} \\ &= 2 \,.\, \overline{OC} \cos \frac{x+y}{2} \\ &= 2 \,.\, \cos \frac{x-y}{2} \,.\, \cos \frac{x+y}{2}, \end{aligned}$$

tudíž

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \tag{2}$$

Spustíme-li s bodu N kolmici $\overline{NH}$*) na PM, lze stanoviti

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= a - b = \overline{HM} \\ &= \overline{MN} \,.\, \cos\frac{x+y}{2} \\ &= 2\overline{MC} \cdot \cos\frac{x+y}{2} \\ &= 2 \,.\, \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2},\end{aligned}$$

pročež

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{3}$$

Konečně

$$\begin{aligned}\cos x - \cos y &= c - d = -\overline{PR} = -\overline{HN} \\ &= -\overline{MN}\sin\frac{x+y}{2} \\ &= -2\overline{MC} \,.\, \sin\frac{x+y}{2} \\ &= -2 \,.\, \sin\frac{x-y}{2} \cdot \sin\frac{x+y}{2}\end{aligned}$$

a tedy

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.\text{**)} \tag{4}$$

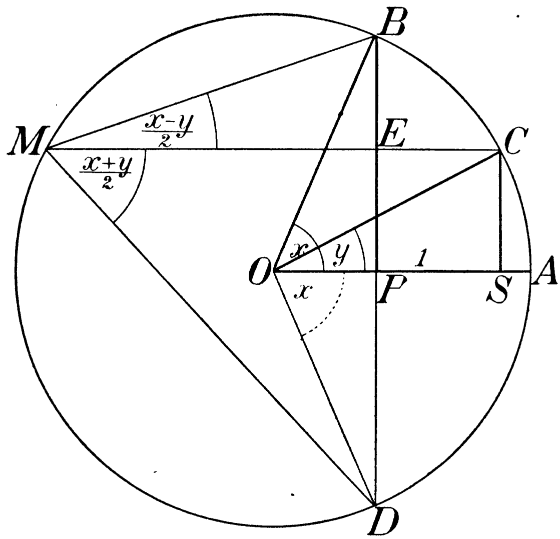
Poznámka I. Vzájemným dělením identických rovnic (1) a (2) povstane známý důležitý vzorec, který lze odvoditi takto.

Narýsujme úhly $AOB = x$, $AOC = y$ (obr. 2.). a společný jich vrchol O pokládejme za střed kružnice o poloměru $\overline{OA} = 1$. Spusťme dále s bodů B a C kolmice $\overline{BP}$, $\overline{CS}$ na $\overline{OA}$ a veďme bodem C rovnoběžku k poloměru $\overline{AO}$, která protne kružnici v bodě M. Spojíme-li pak bod D, symmetrální bodu

*) Pravoúhlý lichoběžník $PRNM$ s výškou $\overline{NH}$ vyskytuje se velmi často v geometrických úvahách.

**) Srovnej *Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch*, svaz. II. str. 110., kde podobným způsobem jsou odvozeny tyto vzorce. — *Pleskot, Geometrické odvození vzorců pro součet goniometrických funkcí.* Viz tento Časopis z r. 1894.

B — vzhledem k symmetrále $\overline{OA}$ — s bodem M a vedeme-li spojnici $\overline{MB}$, bude obvodový úhel $CMD = \frac{x+y}{2}$, ježto příslušný středový úhel $COD = x - y$, a podobně $\sphericalangle\, CMB = \frac{x-y}{2}$, poněvadž $\sphericalangle\, COB = x - y$.



Obr. 2.

Jak z obrazce lze přímo vyčísti, je

$$\sin x + \sin y = \overline{PB} + \overline{SC} = \overline{DP} + \overline{PE}$$
$$= \overline{DE} = \overline{ME} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2};$$

podobně stanovíme

$$\sin x - \sin y = \overline{PB} - \overline{SC} = \overline{PB} - \overline{PE}$$
$$= \overline{EB} = \overline{ME} \operatorname{tg} \frac{x-y}{2},$$

načež oboustranným dělením prvé rovnicí druhou a současným krácením $\overline{ME}$ na pravé straně obdržíme žádaný vzorec

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}.$$

Poznámka 2. Velmi důležitý vzorec pro

$$\cos x + \sin x$$

obyčejně se převádí na (1) nebo (2).

Rychleji dospějeme k cíli, vyjdeme-li od addiční poučky

$$(a') \qquad \sin(45^0 + x) = \sin 45^0 \cos x + \cos 45^0 \sin x,$$

z níž, ježto

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vychází

$$\sin(45^0 + x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$$

a tedy

$$(a) \qquad \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(45^0 + x).$$

Jak patrno, lze výsledek tento přímo napsati, máme-li na mysli vzorec (a').

Mohli jsme též vyjíti od addiční poučky

$$(b') \qquad \cos(45^0 - x) = \cos 45^0 \cos x + \sin 45^0 \sin x$$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}},$$

tudíž

$$(b) \qquad \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(45^0 - x),$$

kterýžto resultát se převede na tvar (a), píšeme-li v něm

$$\cos(45^0 - x) = \sin[90^0 - (45^0 - x)] = \sin(45^0 + x).$$

Obvyklý způsob stanovení vzorce pro

$$\cos x - \sin x$$

vyžaduje transformaci tohoto tvaru na (3) nebo (4). Rychleji lze téhož výsledku dosíci použitím addiční poučky

$$\sin(45^0 - x) = \sin 45^0 \cos x - \cos 45^0 \sin x$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

anebo

$$\cos(45^0 + x) = \cos 45^0 \cos x - \sin 45^0 \sin x$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

načež

$$(c) \qquad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(45^0 - x) = \sqrt{2} \cos(45^0 + x).$$

Klademe-li $-x$ místo x ve vzorcích (a), (b), obdržíme též vzorec (c).

Stanovení Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníka.

Napsal

Augustin Pánek.

Kružnice poloměru r, uvnitř vepsaná danému trojúhelníku ABC o stranách a, b, c, nechť dotýká se těchto stran posloupně v bodech D, E, F (viz obr.); pak jest

$$\overline{AF} = \overline{AE}$$
$$\overline{BD} = \overline{BF}$$
$$\overline{CE} = \overline{CD}.$$

Zdvojený součet těchto tří rovnic podává obvod trojúhelníka, jenž se značí

$$a + b + c = 2s,$$

tudíž