Vilém Jung

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 4, 298--309

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122558

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Pokračování.)

Ježto funkce

$$P_\omega(z) = \omega^z \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \omega^m}{m!\,(z+m)} \tag{49'}$$

má tytéž póly *1. řádu* s týmiž residui a s jediným mezným bodem $z = \infty$ jako funkce $\Gamma(z)$, liší se tyto funkce additivně o celistvou funkci transcendentní $Q_\omega(z)$, tak že můžeme psáti*)

$$\Gamma(z) = P_\omega(z) + Q_\omega(z). \tag{50}$$

---

*) Obě tyto jednoznačné funkce $P_\omega(z)$, $Q_\omega(z)$ uvádí vlastně již *Legendre* pro *reálné z* ve svém spise: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes*, T. II., pag. 502. Paris 1826.

Definuje tu funkci

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{z-1} dy,$$

jakož i

$$\Gamma(z, x) = \int_0^x \left(\log\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx = \int_{\log\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-y} y^{z-1} dy$$

a podává rovnici

Patrno, že tu platí

$$P_\omega(z+1) - zP_\omega(z)$$

$$= \omega^z \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\omega^k}{(k-1)!\,(z+k)} - \omega^z\Big[1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z\,\omega^k}{k!\,(z+k)}\Big]$$

$$= -\omega^z\Big[1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\omega^k (z+k)}{k!\,(z+k)}\Big]$$

$$= -\omega^z\Big[1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{\omega^k}{k!}\Big] = -\frac{\omega^z}{e^\omega}.$$

$$\Gamma(z,x) = \Gamma(z) - \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{z+m}}{m!\,(z+m)},$$

která ukazuje na rozklad jednoznačné funkce $\Gamma(z)$ v součet jednoznačných funkcí $P_\omega(z)$ a $Q_\omega(z)$.

Euler-ův integrál *2-ho* způsobu, jímž *Legendre* definuje funkci $\Gamma(z)$, má smysl pouze pro komplexní hodnoty parametru z s *kladnou částí reálnou*, pro něž má hodnoty konečné. Funkce $\Gamma(z)$, $P_\omega(z)$, $Q_\omega(z)$ však existují v celé rovině komplexního argumentu z. Funkce $\Gamma(z)$, $P_\omega(z)$ mají v bodech $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ *póly 1. řádu*, funkce $Q_\omega(z)$ jest v celém konečnu *regulárnou*, všechny tři funkce mají v bodě $z = \infty$ podstatnou singularitu.

Legendre měl na mysli především reálný obor *kladný* argumentu z, potom rozšířil pojem funkční také na reálný obor *záporný*.

Při vyšetřování vlastností *Euler*-ova integrálu *2-ho* způsobu užil již také *De Gasparis* rozkladu tohoto integrálu v součet dvou omezených integrálů (Neapolská akademie 1867); nepoznal však pravou podstatu tohoto rozkladu ze stanoviska obecné theorie funkční.

To teprve vystihl *Prym* pro případ $\omega = 1$ v pojednání *Zur Theorie der Gammafunktion*. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegr. von A. L. Crelle. Bd. 82., pag. 165—172; 1877.).

Vychází tu z *Euler-Gauss*-ova součinu jakožto definice funkce $\Gamma(z)$ a dokazuje, že existuje jistá jednoznačná funkce $P(z)$, mající v místech $z = 0, -1, -2, \ldots$ póly 1. řádu, v ostatním konečnu pak regulárná, jakož i jistá jednoznačná funkce $Q(z)$ v celém konečnu regulárná.

První z nich jest úplně stanovena podmínkami

$$\lim_{m=+\infty} \frac{P(z+m)}{(m-1)!\,m^z} = 0, \qquad P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e},$$

Můžeme tedy psáti

$$(51) \qquad P_\omega(z+1) = zP_\omega(z) - \frac{\omega^z}{e^\omega}.$$

Z relací (50), (51) a relace $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ plyne

$$(52) \qquad Q_\omega(z+1) = zQ_\omega(z) + \frac{\omega^z}{e^\omega}.$$

---

druhá pak podmínkami

$$\lim_{m=+\infty} \frac{Q(z+m)}{(m-1)!\, m^z} = 1, \qquad Q(z+1) = zQ(z) + \frac{1}{e}.$$

Značí-li p, q libovolné konstanty, jest $pP(z) + qQ(z) = S(z)$ jednoznačnou funkcí hovící podmínkám

$$\lim_{m=+\infty} \frac{S(z+m)}{(m-1)!\, m^z} = k, \qquad S(z+1) = zS(z) + l;$$

tato funkce jest jimi také dostatečně určena.

Pro $p = q = 1$ jest $P(z) + Q(z) = \Gamma(z)$, při čemž jest funkce $\Gamma(z)$ dostatečně určena podmínkami

$$\lim_{m=+\infty} \frac{\Gamma(z+m)}{(m-1)!\, m^z} = 1, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Pro funkci $P(z)$ sestrojil *přímo* analytický výraz

$$P(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(z+m)}.$$

Dále konstatoval, že jest $Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$ funkcí v celém konečnu regulárnou, a předpokládaje, že jest dokázána identita *Euler-Gauss*-ova součinu s *Euler*-ovým integrálem *2-ho* způsobu, užil rozkladu

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx.$$

Srovnáním dosažených výsledků s tímto rozkladem dospěl *nepřímo* k rovnicím

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx, \qquad Q(z) = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx,$$

z čehož

Z (51) vychází pro celistvé a kladné k

$$\mathrm{P}_\omega(z+k)=(z+k-1)\,\mathrm{P}_\omega(z+k-1)-\frac{\omega^{z+k-1}}{e^\omega};$$

dosadíme-li do této rovnice postupně $k=1, 2, 3, \ldots, m$, ob-

$$\mathrm{Q}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \qquad c_k=\frac{1}{k!}\int_1^{+\infty} e^{-x}(\log x)^k\frac{dx}{x}.$$

Neprovedl tedy *Prym* rozklad funkce $\Gamma(z)$ *přímo a pouze* na základě rozkladu *Euler*-ova integrálu *2-ho* způsobu.

Ch. Hermite odůvodňuje v pojednání *Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce* (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 90, pag. 332—338; 1881) zmíněný rozklad funkce $\Gamma(z)$ *přímo* z definice *Legendre*-ovy.

Dále pak vyšetřuje pro jakékoliv kladné ω obecné funkce

$$\mathrm{P}(z)=\int_0^\omega e^{-x}x^{z-1}dx, \qquad \mathrm{Q}(z)=\int_\omega^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}dx$$

a podává pro holomorfní funkci $\mathrm{Q}(z)$, konvergentní rozvoj platný pro $\omega > 1$ a lišící se od rozvoje ve tvaru *Taylor*-ovy řady, kde jsou koefficienty vyjádřeny omezenými integrály.

Z hlediska zcela nového a obecnějšího odvozuje tento theorém důmyslným způsobem *L. Scheeffer* v pojednání *Zur Theorie der Funktionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$. (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd 97., pag 230—242; 1884).

Odvolává se na pojednání *Prym*-ovo a podotýká, že rovnice, jimiž *Prym* definoval zmíněné funkce, nelze tak snadno z integrálů tyto funkce definujících odvoditi a na základě těchto rovnic identitu těchto integrálů s jistými analytickými výrazy jako na př. s *Euler-Gauss*-ovým součinem dokázati.

Nahrazuje tyto rovnice jistými podmínkami, které lze přímo z formy oněch integrálů poznati, a jež vedou také na příslušné analytické výrazy.

Funkce $\Gamma(z)$, $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(z)$, definované zmíněnými omezenými integrály, hoví zmíněným podmínkám pro *určité hodnoty konstant*, vyskytujících se v těchto podmínkách. Dále odvádí na základě těchto podmínek analytické výrazy pro tyto funkce.

M. Lerch odvozuje v pojednání: *O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových* (Věstník Král. české spol. nauk, 1889) novým svým způsobem hlavní vlastnosti a různé relace týkající se funkce $\Gamma(z)$, užívaje výhradně theorémů a method nauky o funkcích.

držíme m rovnic; vyloučíme-li z nich $P_\omega(z+k)$ pro $k=1, 2, 3, \ldots, (m-1)$, obdržíme rovnici

$$(51') \qquad P_\omega(z+m)$$

$$= z(z+1)\ldots(z+m-1)\left\{P_\omega(z) - \frac{\omega^z}{e^\omega}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega^k}{z(z+1)\ldots(z+k)}\right\}$$

čili

$$(53) \quad P_\omega(z) = \frac{\omega^z}{e^\omega}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega^k}{z(z+1)\ldots(z+k)} + \frac{P_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}.$$

Mezi jiným podává také nový konvergentní rozvoj pro funkci $Q(z)$, mající s rozvojem *Hermite*-ovým jistou podobnost, platný však pro *všecka kladná* ω.

S tímto theorémem, jenž se zove *Prym*-ovým, zabývali se dále *J. Tannery*, *A. Genocchi*, *Hj. Mellin*, *A. Lindhagen*, *L. Bourguet* a jiní.

Srovnej tento theorém s obecným theorémem funkčním, jenž pochází od *Mittag-Leffler*-a a zní: Jednoznačná analytická funkce argumentu z, mající v celé rovině nekonečně mnoho isolovaných singulárných bodů a_m, jež mají jediný mezný bod b, v ostatní rovině pak regulárná, dá se vyjádřiti součtem nekonečné řady, konvergující *absolutně* a *stejnoměrně* v celé rovině, vyjímajíc singulárná místa a_m a jich mezný bod b. Každý z členů této řady jest funkcí argumentu z, mající mimo v hromadném bodě b pouze ještě v jednom z míst a_m *singularitu*. (Viz na př. *Dr. O. Biermann, Theorie der analyt. Funkt.* pag. 344. a násl.) Je-li $b=\infty$, jest jedna z těchto funkcí celistvou funkcí transcendentní, a pro tento případ můžeme psáti:

$$F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left[G_m\left(\frac{1}{z-a_m}\right) - f_m\left(\frac{z}{a_m}\right)\right] + G(z).$$

Při tom značí $G_m\left(\frac{1}{z-a_m}\right)$ *celistvou* funkci buď *racionální* nebo *transcendentní*, mizící s argumentem $\frac{1}{z-a_m}$, dle toho, je-li a_m *pólem* anebo *podstatně singulárným* bodem funkce $F(z)$.

Dále jsou

$$f_m\left(\frac{z}{a_m}\right) = \sum_{k=0}^{p_m} A_k^{(m)}\left(\frac{z}{a_m}\right)^k$$

polynomy argumentu $\frac{z}{a_m}$, jichž stupeň p_m dá se pro každé jednotlivé m stanoviti.

Funkce $G(z)$ jest celistvou funkcí transcendentní argumentu z.

Dejme nyní vzrůsti číslu m do $+\infty$.

V následujícím pak dokážeme, že

$$(54)\qquad \lim_{m=+\infty} \frac{P_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} = 0.$$

Se zřetelem k rovnici (49') obdržíme

$$\lim_{m=+\infty} \frac{P_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}$$

$$= \omega^z \lim_{m=+\infty} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\omega}{z+k} \cdot \lim_{m=+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^k}{k!\,(z+m+k)}.$$

Funkce ω^z má pro konečné z hodnotu konečnou.

Pro $k > |z|$ platí

$$\left|\frac{\omega}{z+k}\right| \leqq \frac{\omega}{k-|z|}.$$

Ježto jsou $|z|$, ω čísla konečná, možno voliti dostatečně velké μ tak, aby

$$\frac{\omega}{\mu-|z|} < 1.$$

Pro každé $k > \mu$ jest však

Funkci G (z) můžeme rozložiti v řadu *stejnoměrně* konvergentní tak, že

$$G(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_m(z) + g_0(z),$$

při čemž jsou $g_m(z)$, $g_0(z)$ opět celistvé funkce transcendentní argumentu z.

Potom můžeme psáti

$$F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \Phi_m(z) + g_0(z),$$

při čemž

$$\Phi_m(z) = \left[G_m\left(\frac{1}{z-a_m}\right) - f_m\left(\frac{z}{a_m}\right)\right] + g_m(z);$$

každá z těchto funkcí $\Phi_m(z)$ má v hromadném bodě $z=\infty$ podstatnou singularitu a mimo to *pouze* ještě v jednom z míst a_m buď pól aneb podstatnou singularitu.

$$\frac{\omega}{k-|z|} < \frac{\omega}{\mu-|z|} < 1,$$

proto

$$\lim_{m=+\infty} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\omega}{z+k} = 0.$$

Pro $m > |z|$ platí

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^k}{k!\,(z+m+k)}\right| \leqq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\omega^k}{k!\,(m+k-|z|)},$$

avšak

$$\frac{1}{m+k-|z|} < \frac{1}{m-|z|} \text{ pro } k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

tedy

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \omega^k}{k!\,(z+m+k)}\right| < \frac{1}{m-|z|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\omega^k}{k!} = \frac{e^\omega}{m-|z|}.$$

Ježto jsou e^ω, $|z|$ konečné positivné hodnoty, můžeme volbou dosti velkého m výraz na pravo v poslední nerovnosti libovolně zmenšiti, a proto konverguje výraz na levo v této nerovnosti k *nulle* pro $\lim m = +\infty$. Jest tedy platnost rovnice (54) dokázána.

Následkem toho plyne z rovnice (53) pro funkci $P_\omega(z)$ druhý jednoduchý konvergentní rozvoj

$$(55) \qquad P_\omega(z) = \frac{\omega^z}{e^\omega} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\omega^m}{z(z+1)\ldots(z+m)}$$

$$= \frac{\omega^z}{e^\omega}\left(\frac{1}{z} + \frac{\omega}{z(z+1)} + \frac{\omega^2}{z(z+1)(z+2)} + \ldots\right),$$

jenž jest znám pod jménem vzorce *Hočevar*-ova. Funkce $\frac{\omega^z}{e^\omega}$ má pro konečné z hodnoty konečné. Nekonečná řada v závorkách konverguje *absolutně* a *stejnoměrně* v kterémkoliv *konečném oboru* argumentu z, vyjímajíc místa $z = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots.$

Označme

$$u_m = \frac{\omega^m}{z(z+1)\ldots(z+m)},$$

a budiž p nejmenší celistvé číslo kladné, hovící podmínce

$$p > |z| + 1 \quad \text{čili} \quad p - |z| > 1.$$

Potom můžeme psáti

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_m = \sum_{m=0}^{p-1} u_m + \sum_{m=p}^{+\infty} u_m ;$$

první součet na pravo jest konečný, proto nutno vyšetřiti konvergenci druhého součtu.

Položíme-li

$$\frac{1}{|z| . (|z| - 1) \ldots (|z| - \{p - 2\}) . (\{p - 1\} - |z|)} = \alpha,$$

můžeme psáti

$$\sum_{m=p}^{+\infty} |u_m| \leqq \alpha . \left[\frac{\omega}{p - |z|} + \frac{\omega^2}{(p - |z|)(p - |z| + 1)} + \ldots\right]$$

$$< \alpha . \left[\frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \ldots\right],$$

t. j.

$$\sum_{m=p}^{+\infty} |u_m| < \alpha . (e^{\omega} - 1).$$

Ježto jsou ω, p, $|z|$ kladná čísla konečná, má výraz na pravo v poslední nerovnosti hodnotu konečnou, proto konverguje řada $\sum_{m=0}^{+\infty} u_m$ *absolutně* ve zmíněném oboru.

Budiž dále h číslo celistvé kladné, potom můžeme psáti

$$\sum_{m=p+h}^{+\infty} |u_m| < \alpha . \left[\frac{\omega^{h+1}}{(h+1)!} + \frac{\omega^{h+2}}{(h+2)!} + \ldots\right],$$

$$\sum_{m=p+h}^{+\infty} |u_m| < \alpha . \frac{\omega^h}{h!} \left[\frac{\omega}{h+1} + \frac{\omega^2}{(h+1)(h+2)} + \ldots\right].$$

Ježto jsou ω, p kladná čísla konečná, můžeme pro jakékoliv konečné $|z|$ volbou dosti velkého h učiniti výraz na pravo v poslední nerovnosti libovolně malým, tak že zbytek naší řady konverguje k nulle pro jakékoliv konečné z. Konverguje tedy řada tato *stejnoměrně* v celém konečnu, vyjímajíc místa

$$z = 0,\ -1,\ -2, \ldots.$$

Pod čarou*) jsou uvedeny některé vzorce pro hodnoty funkcí $P_\omega(z)$, $Q_\omega(z)$, je-li argument číslo celistvé.

---

*) Z rovnice (49') obdržíme pro $z = 1$

$$P_\omega(1) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{\omega^{m+1}}{(m+1)!} = 1 - \frac{1}{e^\omega},$$

z čehož plyne

$$Q_\omega(1) = \frac{1}{e^\omega}.$$

Z rovnice (51') pro $z = 1$ vychází

$$P_\omega(1+m) = m!\left\{P_\omega(1) - \frac{\omega}{e^\omega}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega^k}{(k+1)!}\right\}$$
$$= m!\left\{1 - \frac{1}{e^\omega}\sum_{k=0}^{m}\frac{\omega^k}{k!}\right\}.$$

Máme tedy pro celistvé a kladné ν relaci

$$P_\omega(\nu) = (\nu-1)!\left\{1 - \frac{1}{e^\omega}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\omega^k}{k!}\right\};$$

ježto $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$, obdržíme dále

$$Q_\omega(\nu) = \frac{(\nu-1)!}{e^\omega}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\omega^k}{k!}.$$

Na základě předcházejících úvah můžeme psáti pro $|z| < 1$

$$Q_\omega(z) = \frac{1}{z} - C + \sum_{m=1}^{+\infty}\beta_m z^m - \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\log\omega)^m}{m!}z^m\right)$$
$$\cdot\left(\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{\omega^m}{m!\,(z+m)}\right),$$

z čehož pro $z = 0$ obdržíme

$$Q_\omega(0) = -C - \sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\frac{\omega^m}{m\,.\,m!} = -C + \frac{\omega}{1\,.\,1!} - \frac{\omega^2}{2\,.\,2!} + \frac{\omega^3}{3\,.\,3!} - \cdots.$$

Dále snadno odvodíme pro celistvé a kladné ν

$$Q_\omega(-\nu) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\left\{Q_\omega(0) - \frac{1}{\omega e^\omega}\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\frac{k!}{\omega^k}\right\}.$$

Na základě rovnice (52) snadno odvodíme pro celistvé a kladné m

$$\frac{Q_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} = Q_\omega(z) + \frac{\omega^z}{e^\omega}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\omega^k}{z(z+1)\ldots(z+k)};$$

pro $\lim m = +\infty$ pak obdržíme se zřetelem k rovnicím (50) a (55)

$$\lim_{m=+\infty}\frac{Q_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} = Q_\omega(z) + P_\omega(z) = \Gamma(z)$$

čili

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\lim_{m=+\infty}\frac{Q_\omega(z+m)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)} = 1.$$

Nahradíme-li $\Gamma(z)$ *Gaussovým* limitním výrazem (13), obdržíme

$$\lim_{m=+\infty}\frac{Q_\omega(z+m)}{(m-1)!\,m^z} = 1. \tag{56}$$

Na základě (13'), (50) a (56) pak vychází

$$\lim_{m=+\infty}\frac{P_\omega(z+m)}{(m-1)!\,m^z} = 0. \tag{57}$$

Prym ukázal v pojednání *Zur Theorie der Gammafunktion*, že jest funkce $\Gamma(z)$ podmínkami (1) a (13'), funkce $P_\omega(z)$ podmínkami (51) a (57), funkce $Q_\omega(z)$ podmínkami (52) a (56) dostatečně určena; při tom měl na zřeteli případ pro $\omega = 1$.

Označme pro případ $\omega = 1$ *Prym*-ovy funkce jednoduše $P(z)$, $Q(z)$.

Potom jest

$$P(z) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(z+m)}, \tag{49''}$$

tak že obdržíme*)

*) Srovnej s funkčním theorémem: Jednoznačná analytická funkce $F(z)$ mající v celé rovině nekonečně mnoho pólů a_m, jichž jediným mezným bodem jest $z = \infty$, v ostatním konečnu pak regulárná, dá se vyjádřiti jako součet jisté funkce *holomorfní* a jisté řady nekonečné, konvergující *absolutně* a *stejnoměrně* v celém konečnu, vyjímajíc póly a_m; každý člen této řady jest racionální funkcí argumentu z, jejímž *jediným* pólem jest jeden z pólů a_m funkce $F(z)$.

$$(50') \qquad \Gamma(z) = \mathrm{P}(z) + \mathrm{Q}(z),$$

při čemž jest $\mathrm{Q}(z)$ celistvou funkcí transcendentní.

Ke vzorci (50′) dospějeme přímo také takto.

Budiž $\frac{1}{\mathrm{F}(z)}$ celistvou funkcí transcendentní p-ho rodu, mající v celé rovině nekonečně mnoho nullových bodů a_m *1-ho* řádu, jichž mezným bodem jest $z = \infty$, při čemž žádná z hodnot a_m nerovná se nulle. Potom se dá funkce $\mathrm{F}(z)$, mající v bodech a_m póly *1.* řádu s residui $c_{-1}^{(m)}$ a v bodě $z = \infty$ podstatnou singularitu, psáti ve formě *)

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{c_{-1}^{(m)} z^p}{a_m^p (z - a_m)} + \mathrm{G}(z),$$

kde jest $\mathrm{G}(z)$ celistvou funkcí transcendentní.

Dle předcházejícího jest $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ celistvou funkcí transcendentní *1-ho* rodu, mající v místech $z = -1, -2, -3, \ldots$ nullové body *1-ho* řádu; funkce $\Gamma(z+1)$ má v těchto místech póly *1.* řádu, v pólu $z = a_m = -m$ má residuum $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$.

Můžeme tedy psáti

$$\Gamma(z+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} z}{(-m) \cdot (z+m)} + \mathrm{G}(z+1)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m z}{(m-1)!\, m\, (z+m)} + \mathrm{G}(z+1).$$

---

*) Viz na př.: Dr. *O. Biermann, Theorie der analyt. Funktionen*, pag. 351.

Při tom jest p nejmenší kladné číslo — pro veškeré indexy m stejné — pro něž konverguje řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\left| \frac{1}{a_m} \right| \right)^{p+1};$$

potom také konverguje řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^p}{a_m^p (z - a_m)}$$

v kterémkoliv konečném oboru *stejnoměrně*, vyjímajíc singulárná místa a_m.

Ježto však

$$\frac{(-1)^m z}{(m-1)!\, m\,(z+m)} = (-1)^m \left[\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m-1)!\,(z+m)}\right],$$

obdržíme

$$\Gamma(z+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(z+m+1)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!} + G(z+1)$$

čili

$$\Gamma(z+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(z+1+m)} + Q(z+1).$$

Píšeme-li v poslední rovnici z místo $(z+1)$, obdržíme rovnici (50′).

Pro další rozvoj theorie funkce $\Gamma(z)$ ukázala se býti velice plodnou *Legendre*-ova definice této funkce *Euler*-ovým integrálem 2-ho způsobu. V té příčině odkazuji čtenáře především na citované již práce prof. *M. Lerch*-a: *O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových* (Věstník Král. české spol. nauk 1889), jakož i *Theorie funkce gamma* (Věstník České akademie, R. II., 1893).

(Dokončení.)

Rapports présentés au Congrès International de Physique,

réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société Française de Physique, rassemblés et publiés par *Ch. Éd. Guillaume* et *L. Poincaré.*

Referuje

Dr. **Vladimír Novák,**
professor české techniky v Brně.

(Pokračování.)

13. *Konstanta gravitační. C. V. Boys.* O měření konstanty gravitační nalezne čtenář podrobný referát v tomto časopise.*)

---

*) V. Novák, Měření konstanty gravitační a střední specifické hmoty země pg. 10. XXIX. 1890.