v níž $\quad a = 30 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5, \qquad b = 1001 = 7 \,.\, 11 \,.\, 13,$

$$N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 + 1 = 30031.$$

Avšak $N = 30031$ není číslem kmenným, nýbrž $N = 59 \,.\, 509$ (dle upozornění páně Čuprova); proto rovnice daná nemá toliko 2 řešení

$$x_1 = 1002, \qquad y_1 = 30061,$$
$$x_2 = 31032, \qquad y_2 = 31,$$

nýbrž ještě 2 jiná

$$x_3 = 59 + 1001 = 1060, \qquad y_3 = 509 + 30 = 539,$$
$$x_4 = 509 + 1001 = 1510, \qquad y_4 = 59 + 30 = 89.$$

Správně měla věta býti vyslovena takto:

„Je-li $\qquad N = ab + c$

číslem kmenným, nemůže rovnice rektangulárná

$$xy = ax + by + c$$

míti ani více ani méně než dvě celistvá kladná řešení."

Řešení ta jsou pak

$$x_1 = 1 + b, \qquad y_1 = N + a,$$
$$x_2 = N + b, \qquad y_2 = 1 + a.$$

S.

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Dokázati jest správnost stejniny

$$ab\,(a + b)\,(a^2 - b^2) + bc\,(b + c)\,(b^2 - c^2) + ca\,(c + a)\,(c^2 - a^2)$$
$$= (a + b + c)^2\,[a\,(c^2 - b^2) + b\,(a^2 - c^2) + c\,(b^2 - a^2)].$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Petr Pospíšil,* stud. VIII. tř. gym. v Brně.)

Poněvadž $a + b = (a + b + c) - c,$

$b + c = (a + b + c) - a,$ a t. d.,

jest $ab(a+b)(a^2-b^2) + bc(b+c)(b^2-c^2) + ca(c+a)(c^2-a^2)$

$$= (a+b+c)[ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)]$$
$$- abc[(a^2-b^2) + (b^2-c^2) + (c^2-a^2)]$$
$$= (a+b+c)[ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)].$$

Dalším rozkladem obdržíme, že daný výraz rovná se

$$(a+b+c)^2[ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)]$$
$$-(a+b+c)abc[(a-b) + (b-c) + (c-a)]$$
$$= (a+b+c)^2[a(c^2-b^2) + b(a^2-c^2) + c(b^2-a^2)];$$

což bylo dokázati.

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{b^2-c^2}{x+a} + \frac{c^2-a^2}{x+b} + \frac{a^2-b^2}{x+c} = 0.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Maýr*, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze.)

Jelikož $b^2 - c^2 = (b-c)(a+b+c-a)$

$c^2 - a^2 = (c-a)(a+b+c-b)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b+c-c),$

můžeme rovnici dáti podobu

$$(a+b+c)\left[\frac{b-c}{x+a} + \frac{c-a}{x+b} + \frac{a-b}{x+c}\right]$$
$$= \frac{a(b-c)}{x+a} + \frac{b(c-a)}{x+b} + \frac{c(a-b)}{x+c}.$$

Odstranivše zlomky obdržíme

$$(a+b+c)[(b-c)(x+b)(x+c) + (c-a)(x+a)(x+c)$$
$$+ (a-b)(x+a)(x+b)]$$
$$= a(b-c)(x+b)(x+c) + b(c-a)(x+c)(x+a)$$
$$+ c(a-b)(x+a)(x+b);$$

provedeme-li pak naznačené výkony, nabude rovnice tvaru

$$(a+b+c)[bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)],$$
$$= x[a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)]$$

čili $$x\,[bc\,(c-b)+ca\,(a-c)+ab\,(b-a)$$
$$=(a+b+c)\,[bc\,(b-c)+ca\,(c-a)+ab\,(a-b)],$$
z čehož $$x=-(a+b+c).$$

Úloha 3.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Baumann*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.)

Ztrojmocněním dané rovnice povstane

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}-3\left(\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}\right)$$
$$=\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x}-3\left(\sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}-\sqrt[3]{\frac{b-x}{b+x}}\right),$$

z čehož, hledíce k dané rovnici, obdržíme

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x}.$$

Odtud po náležité úpravě dospějeme k rovnici

$$4x\,[ab\,(b-a)+x^2\,(b-a)]=0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_1=0, \qquad x_{2,3}=\pm i\sqrt{ab}.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *J. Drábek*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Položme $$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=u, \quad \sqrt[3]{\frac{b+x}{b-x}}=v;$$

potom rovnice daná přechází ve

$$u-\frac{1}{u}=v-\frac{1}{v},$$
$$u^2v-uv^2+u-v=0$$

čili $$(u-v)\,(uv+1)=0.$$

Je-li $u - v = 0,$

jest $$\frac{a+x}{a-x} = \frac{b+x}{b-x},$$

z čehož $x_1 = 0.$

Z podmínky $uv + 1 = 0$

plyne však $(a + x)(b + x) + (a - x)(b - x) = 0$

a odtud $$x^2 + ab = 0,$$
$$x_{2,3} = \pm i\sqrt{ab}.$$

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{\frac{11-x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{11-x}} = \sqrt[3]{\frac{121-x^2}{1-x^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{121-x^2}}.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Strumhaus*, stud. VIII. tř. gym. v Místku.)

Ztrojmocněním dostaneme rovnici

$$\frac{11-x}{1-x} + \frac{1-x}{11-x} + 3\left(\sqrt[3]{\frac{11-x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{11-x}}\right)$$
$$= \frac{121-x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{121-x^2} + 3\left(\sqrt[3]{\frac{121-x^2}{1-x^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{121-x^2}}\right),$$

v níž součet odmocnin na levé straně rovná se součtu odmocnin na pravé straně.

Jest proto

$$\frac{11-x}{1-x} + \frac{1-x}{11-x} = \frac{121-x^2}{1-x^2} + \frac{1-x^2}{121-x^2}$$

čili

$$[(11-x)^2 + (1-x)^2](11+x)(1+x) = (121-x^2)^2 + (1-x^2)^2;$$

rovnici té lze dáti podobu

$$(11+x)(11-x)^2(1+x-11-x)$$
$$= (1-x)^2(1+x)(1+x-11-x)$$

čili $$(11+x)(11-x)^2 = (1+x)(1-x)^2.$$

Vykonáme-li naznačené mocnění a násobení, dojdeme k rovnici kvadratické

$$x^2 + 12x - 133 = 0,$$

z níž
$$x_1 = 7, \quad x_2 = -19.$$

Úloha 5.

Dokázati větu:

Je-li $N-5$ dělitelno číslem 9, není N úplný čtverec.

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *C. Tomeš*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.) Dle podmínky jest

$$N = 9k + 5.$$

Kdybychom připustili, že N může býti úplným čtvercem, bylo by nutně

$$N = (3n \pm 1)^2.$$

Potom bylo by

$$(3n \pm 1)^2 = 9k + 5$$

čili
$$9(n^2 - k) \pm 6n = 4.$$

Rovnice tato jest nepřípustná, jelikož levá strana jest 3mi dělitelna, pravá nikoliv. Nemůže tedy N býti úplným čtvercem.

Úloha 6.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)^2(x-4)^2 + 27x^2(x-2)^2}$$
$$- \sqrt{1 + x(x-1)(x-2)(x-3)} = 10.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *V. Šimůnek*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

Provedouce naznačené výkony, nabudeme rovnice

$$(x^2 - 2x + 4)\sqrt[3]{1} - (x^2 - 3x + 1)\sqrt{1} = 10;$$

poněvadž $\sqrt[3]{1}$ má 3 hodnoty, $\sqrt[2]{1}$ dvě hodnoty, jest v této rovnici zahrnuto celkem 6 rovnic. Realné kořeny obdržíme pouze z rovnic

$$(x^2 - 2x + 4) \mp (x^2 - 3x + 1) = 10$$

čili
$$x + 3 = 10, \quad x_1 = 7,$$

$$2x^2 - 5x + 5 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{65}).$$

Úloha 7.

Které hodnotě blíží se výraz

$$u = x[\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt[4]{x^4 + a^4}],$$

vzrůstá-li x do nekonečna?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Procházka,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Danému výrazu dejme podobu zlomku

$$u = \frac{x(x^2 + a^2 - \sqrt{x^4 + a^4})}{\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt[4]{x^4 + a^4}}$$

a učiňme čítatele racionálným:

$$u = \frac{x[(x^2 + a^2)^2 - (x^4 + a^4)]}{(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt[4]{x^4 + a^4})(x^2 + a^2 + \sqrt{x^4 + a^4})}.$$

Jest potom

$$u = \frac{2a^2x^3}{(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt[4]{x^4 + a^4})(x^2 + a^2 + \sqrt{x^4 + a^4})}$$

čili

$$u = \frac{2a^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}} + \sqrt[4]{1 + \frac{a^4}{x^4}}\right)\left(1 + \frac{a^2}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{a^4}{x^4}}\right)}.$$

Spěje-li x ku hodnotě $\lim x = \infty$, jest

$$\lim u = \frac{2a^2}{2 . 2} = \frac{a^2}{2}.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Pithart*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Dle binomické poučky jest

$$\sqrt{x^2 + a^2} = x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \ldots$$

$$\sqrt[4]{x^4 + a^4} = x + \frac{a^4}{4x^3} - \frac{7a^8}{32x^7} + \ldots,$$

tedy

$$u = x\left(\frac{a^2}{2x} - \frac{3a^4}{8x^3} + \ldots\right) = \frac{a^2}{2} - \frac{3a^4}{8x^2} + \ldots.$$

Vzrůstá-li x do nekonečna, mají všechny členy v této řadě hodnotu rovnou nulle mimo člen první; jest potom

$$u = \frac{a^2}{2}.$$

Úloha 8.

Dvěma odmocniti jest výraz

$$V = a^2b^2(x^2 - y^2)^2 + x^2y^2(a^2 - b^2)^2 \\ - 2abxy\left[(ax - by)^2 + (bx - ay)^2\right].$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Szalaÿ*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Daný výraz uspořádejme takto:

$$\begin{aligned} V &= a^2b^2(x^2 - y^2)^2 + x^2y^2(a^2 - b^2)^2 \\ &\quad - 2abxy(a^2x^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + a^2y^2) + 8a^2b^2x^2y^2 \\ &= a^2b^2(x^2 + y^2)^2 + x^2y^2(a^2 + b^2)^2 - 2abxy(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ &= [ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)]^2. \end{aligned}$$

Jest tedy

$$\sqrt{V} = \pm [ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)]$$

čili

$$\sqrt{V} = \pm (ax - by)(bx - ay).$$

Úloha 9.

V arithmetické řadě jest součin prvých dvou členů $m = 15$, součin následujících dvou $n = 63$. Stanovte onu řadu, její obecný člen a součtový vzorec.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Augustin Šticha,* stud. VI. tř. realné v Praze III.)

Budiž počáteční člen řady x, rozdíl y; dle podmínek úlohy jest

$$x(x + y) = m,$$
$$(x + 2y)(x + 3y) = n$$

čili

$$x^2 + xy = m,$$
$$x^2 + 5xy + 6y^2 = n.$$

Z prvé z těchto rovnic vyvoďme

$$y = \frac{m - x^2}{x}$$

a dosaďme do druhé; jest pak

$$x^2 + 5(m - x^2) + \frac{6(m - x^2)^2}{x^2} = n$$

čili $$2x^4 - (7m + n)x^2 + 6m^2 = 0.$$

Odtud ustanovíme

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7m + n \pm\sqrt{m^2 + 14mn + n^2}},$$

načež

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2m + 2n \mp\sqrt{m^2 + 14mn + n^2}}.$$

Klademe-li $m = 15$, $n = 63$, obdržíme

$$x_{1,2} = \pm 3, \qquad x_{3,4} = \pm 5\sqrt{3},$$
$$y_{1,2} = \pm 2, \qquad y_{3,4} = \pm 4\sqrt{3}.$$

Jsou tedy žádané řady tyto:

$$\begin{array}{llllll}
R_1 \equiv & 3, & 5, & 7, & 9, \ldots, & 2k + 1, \\
R_2 \equiv & -3, & -5, & -7, & -9, \ldots, & -(2k + 1), \\
R_3 \equiv & 5\sqrt{3}, & \sqrt{3}, & -3\sqrt{3}, & -7\sqrt{3}, \ldots, & (9 - 4k)\sqrt{3}, \\
R_4 \equiv & -5\sqrt{3}, & -\sqrt{3}, & 3\sqrt{3}, & 7\sqrt{3}, \ldots, & (4k - 9)\sqrt{3}.
\end{array}$$

Součtové vzorce těchto čtyř řad jsou

$$S_1 = k(k + 2), \qquad S_2 = -k(k + 2),$$
$$S_3 = k(7 - 2k)\sqrt{3}, \quad S_4 = k(2k - 7)\sqrt{3}.$$

Úloha 10.

Řada $\qquad 6, 24, 84, 276, \ldots$
vznikla tím, že jsme odečtli členy jedné řady geometrické od souhlasných členů druhé řady geometrické. Najděte obecný její člen a součtový vzorec.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Boršlica*, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Je-li první řada

$$a,\ ap,\ ap^2,\ ap^3,\ \ldots$$

a druhá

$$b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,\ \ldots,$$

jest dle úlohy

$$\begin{aligned} a - b &= 6 \\ ap - bq &= 24 \\ ap^2 - bq^2 &= 84 \\ ap^3 - bq^3 &= 276. \end{aligned}$$

Vyloučíce b, nabudeme skupiny tří rovnic

$$\begin{aligned} a\,(q-p) &= 6q - 24 \\ ap\,(q-p) &= 24q - 84 \\ ap^2\,(q-p) &= 84q - 276; \end{aligned}$$

vyloučením a obdržíme

$$\begin{aligned} p\,(q-4) &= 4q - 14 \\ p\,(2q-7) &= 7q - 23 \end{aligned}$$

a konečně po vyloučení p

$$q^2 - 5q + 6 = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} q &= 2,\quad 3, \qquad p = 3,\quad 2, \\ a &= 12,\ -6, \qquad b = 6,\ -12; \end{aligned}$$

jsou tudíž žádané řady

$$\begin{aligned} &12,\ 36,\ 108,\ 324,\ \ldots,\ 4\,.\,3^n \\ &6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots,\ 3\,.\,2^n \end{aligned}$$

aneb

$$\begin{aligned} &-6,\ -12,\ -24,\ -48,\ \ldots,\ -3\,.\,2^n \\ &-12,\ -36,\ -108,\ -324,\ \ldots,\ -4\,.\,3^n. \end{aligned}$$

Obecný člen dané řady jest tedy

$$u_n = 4\,.\,3^n - 3\,.\,2^n$$

a součtový vzorec

$$s_n = 6\,(3^n - 2^n).$$

Úloha 11.

Řada $\qquad 1,\ 4,\ 17,\ 50,\ \ldots$

vznikla tím, že jsme od členů řady geometrické odečtli souhlasné členy řady arithmetické; který jest její obecný člen a součtový vzorec?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Čupr*, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Hledané řady buďtež

$$a, aq, aq^2, \ldots$$
$$b, b + d, b + 2d, \ldots;$$

potom jest dle úlohy

$$a - b = 1$$
$$aq - b - d = 4$$
$$aq^2 - b - 2d = 17$$
$$aq^3 - b - 3d = 50.$$

Postupnou eliminací obdržíme

$$a(q-1) - d = 3$$
$$aq(q-1) - d = 13$$
$$aq^2(q-1) - d = 33,$$

dále pak

$$a(q-1)^2 = 10$$
$$aq(q-1)^2 = 20,$$

a posléze

$$q = 2,$$

z čehož

$$a = 10, \quad b = 9, \quad d = 7.$$

Jsou tedy žádané řady

$$10, \ 20, \ 40, \ 80, \ \ldots, \ 5 \,.\, 2^n$$
$$9, \ 16, \ 23, \ 30, \ \ldots, \ 7n + 2.$$

Obecný člen dané řady jest tedy

$$u_n = 5 \,.\, 2^n - 7n - 2$$

a součtový vzorec její

$$s_n = 10(2^n - 1) - \frac{n}{2}(7n + 11).$$

Úloha 12.

Řada $\quad 10, 2, 50, 38, 290, 422, \ldots$
vznikla sečtením souhlasných členů tří řad geometrických. Stanovte ony řady, jakož i obecný člen a součtový vzorec řady této.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Zahrádka,* stud. VIII. tř. g. ve Slaném.)

Značí-li x, y, z počáteční členy, u, v, w příslušné podíly hledaných řad geometrických, máme rovnice

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ xu + yv + zw &= 2 \\ xu^2 + yv^2 + zw^2 &= 50 \\ xu^3 + yv^3 + zw^3 &= 38 \\ xu^4 + yv^4 + zw^4 &= 290 \\ xu^5 + yv^5 + zw^5 &= 422. \end{aligned}$$

Eliminujeme-li vždy ze dvou po sobě jdoucích rovnic této skupiny z, nabudeme

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} x(w-u) + y(w-v) &= 10w - 2 \\ xu(w-u) + yv(w-v) &= 2w - 50 \\ xu^2(w-u) + yv^2(w-v) &= 50w - 38 \\ xu^3(w-u) + yv^3(w-v) &= 38w - 290 \\ xu^4(w-u) + yv^4(w-v) &= 290w - 422. \end{aligned}$$

Eliminujeme-li dále z této skupiny rovnic y, podobně jako prve z, nabudeme

$$\text{(C)}\qquad \begin{aligned} x\,(w-u)(v-u) &= 10\,(w-2)\,v - (2w - 50) \\ xu\,(w-u)(v-u) &= (2w - 50)\,v - (50w - 38) \\ xu^2(w-u)(v-u) &= (50w - 38)\,v - (38w - 290) \\ xu^3(w-u)(v-u) &= (38w - 290)\,v - (290w - 422). \end{aligned}$$

Konečně, dělíme-li každou z těchto rovnic předcházející a uspořádáme, dostaneme

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} 10uvw - 2\,(uv + uw + vw) + 50\,(u + v + w) &= 38 \\ 2uvw - 50\,(uv + uw + vw) + 38\,(u + v + w) &= 290 \\ 50uvw - 38\,(uv + uw + vw) + 290\,(u + v + w) &= 422. \end{aligned}$$

Označíme-li tu
$$\begin{aligned} u + v + w &= \mathrm{A}, \\ uv + uw + vw &= \mathrm{B}, \\ uvw &= \mathrm{C}, \end{aligned}$$

nabudou rovnice (D) tvaru

$$\begin{aligned} 10\,\mathrm{C} - 2\,\mathrm{B} + 50\,\mathrm{A} &= 38 \\ 2\,\mathrm{C} - 50\,\mathrm{B} + 38\,\mathrm{A} &= 290 \\ 50\,\mathrm{C} - 38\,\mathrm{B} + 290\,\mathrm{A} &= 422. \end{aligned}$$

Odtud pak snadno vypočteme

$$A = 3,\quad B = -4,\quad C = -12;$$

tedy

$$u + v + w = 3$$
$$uv + uw + vw = -4$$
$$uvw = -12,$$

pročež u, v, w jsou kořeny rovnice

$$u^3 - 3u^2 - 4u + 12 = 0$$

čili

$$(u^2 - 4)(u - 3) = 0,$$

tedy na př. $u = 2,\quad v = -2,\quad w = 3,$

a tím [ze skupin (C), (B), (A)]

$$x = 3,\quad y = 5,\quad z = 2,$$

pročež žádané řady jsou

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\ \ldots$$
$$5,\ -10,\quad 20,\ -40,\ \ldots$$
$$2,\quad 6,\quad 18,\quad 54,\ \ldots.$$

Poznámka. Volíme-li za u, v, w hodnoty 2, —2, 3 v jakémkoli jiném pořádku, dostaneme vždy tytéž řady.

Obecný člen dané řady jest

$$u_n = 3 \,.\, 2^{n-1} + 5 \,.\, (-2)^{n-1} + 2 \,.\, 3^{n-1}$$

a součtový vzorec

$$S_n = 3 \,.\, \frac{2^n - 1}{1} + 5 \,.\, \frac{(-2)^n - 1}{-3} + 2 \,.\, \frac{3^n - 1}{2}$$

čili

$$S_n = 3 \,.\, 2^n - \frac{5}{3}(-2)^n + 3^n - \frac{7}{3}.$$

Jiné řešení. Pan *Karel Rychlík*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, podal k úloze 10. a 12. důmyslné řešení obecné, z něhož tuto podstatnou část vyjímáme:

Dáno buď $2m$ členů řady

(I) $\qquad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{m-1},\ b_m,\ \ldots,\ b_{2m-1},$

která vznikla sečtením souhlasných členů m řad geometrických

(1) $\qquad a_1 \quad a_1 q_1 \quad a_1 q_1^2 \quad \ldots$

(2) $\qquad a_2 \quad a_2 q_2 \quad a_2 q_2^2 \quad \ldots$

$\qquad \ldots\ldots\ldots$

(m) $\qquad a_m \quad a_m q_m \quad a_m q_m^2 \quad \ldots.$

Mají se tyto řady stanoviti a nalézti obecný člen a součtový vzorec řady (I).

K určení veličin $a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_m, \; q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_m$ máme $2m$ rovnic

$$
\begin{array}{ll}
(0) & a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_0 \\
(1) & a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_m q_m = b_1 \\
(2) & a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + \ldots + a_m q_m^2 = b_2 \\
 & \vdots \\
(m-1) & a_1 q_1^{m-1} + a_2 q_2^{m-1} + \ldots + a_m q_m^{m-1} = b_{m-1} \\
 & \vdots \\
(2m-1) & a_1 q_1^{2m-1} + a_2 q_2^{2m-1} + \ldots + a_m q_m^{2m-1} = b_{2m-1}\,.
\end{array}
$$

Násobme rovnice (0), (1), (2), ..., $(m-1)$ po řadě čísly

$$p_{m-1}^{(1)}, \quad p_{m-2}^{(1)}, \quad p_{m-3}^{(1)}, \quad \ldots, \quad p_0^{(1)},$$

která jsou koefficienty rovnice

$$f^{(1)}(q) = p_0^{(1)} q^{m-1} + p_1^{(1)} q^{m-2} + \ldots + p_{m-1}^{(1)} = 0$$

mající kořeny $\qquad q_2, \; q_3, \; \ldots, \; q_m.$

Poněvadž jest

$$f^{(1)}(q_2) = 0, \quad f^{(1)}(q_3) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(1)}(q_m) = 0,$$

vznikne rovnice

$$(0') \qquad a_1 f^{(1)}(q_1) = b_0 p_{m-1}^{(1)} + b_1 p_{m-2}^{(1)} + \ldots + b_{m-1} p_0^{(1)}.$$

Násobíme-li týmiž čísly rovnice (1), (2), (3), ..., (m), povstane nová rovnice

$$(1') \qquad a_1 q_1 f^{(1)}(q_1) = b_1 p_{m-1}^{(1)} + b_2 p_{m-2}^{(1)} + \ldots + b_m p_0^{(1)}$$

a podobně

$$
\begin{array}{ll}
(2') & a_1 q_1^2 f^{(1)}(q_1) = b_2 p_{m-1}^{(1)} + b_3 p_{m-2}^{(1)} + \ldots + b_{m+1} p_0^{(1)} \\
 & \vdots \\
(m') & a_1 q_1^m f^{(1)}(q_1) = b_m p_{m-1}^{(1)} + b_{m+1} p_{m-2}^{(1)} + \ldots + b_{2m-1} p_0^{(1)}.
\end{array}
$$

Rovnice (0'), (1'), (2'), ..., (m') — počtem $m+1$ — jsou homogenní dle $m+1$ veličin

$$a_1 f^{(1)}(q_1), \quad p_{m-1}^{(1)}, \quad p_{m-2}^{(1)}, \quad \ldots, \quad p_0^{(1)},$$

pročež lze tyto veličiny z oněch rovnic eliminovati; obdržíme tak resultantu

$$
(\mathrm{II}) \qquad f(q_1) = \begin{vmatrix}
q_1^m, & b_m, & b_{m+1}, & \ldots & b_{2m-1} \\
q_1^{m-1}, & b_{m-1}, & b_m, & \ldots & b_{2m-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
q_1, & b_1, & b_2, & \ldots & b_m \\
1, & b_0, & b_1, & \ldots & b_{m-1}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Týmž způsobem a s týmž výsledkem vyvodili bychom rovnici pro $q_2, q_3, \ldots, q_m$; jsou tedy podíly $q_1, q_2, \ldots, q_m$ kořeny rovnice obecné $f(q) = 0,$
kterou po rozkladu dle subdeterminantů prvního sloupce můžeme psáti ve tvaru

$$f(q) = p_0 q^m + p_1 q^{m-1} + p_2 q^{m-2} + \ldots + p_m = 0;$$

koefficienty $p_0, p_1, \ldots, p_m$ jsou utvořeny z daných veličin b.

Potom jest také

$$f^{(1)}(q) = \frac{f(q)}{q - q_1}$$

a obecně
$$f^{(r)}(q) = \frac{f(q)}{q - q_r},$$

kterýžto podíl označený $f^{(r)}(q)$ jest

$$f^{(r)}(q) = p_0^{(r)} q^{m-1} + p_1^{(r)} q^{m-2} + \ldots + p_{m-1}^{(r)};$$

rovnici (0′) můžeme pak zobecniti a obdržíme k určení členu a_r vzorec

$$\text{(III)} \quad a_r f^{(r)}(q_r) = b_0 p_{m-1}^{(r)} + b_1 p_{m-2}^{(r)} + \ldots + b_{m-1} p_0^{(r)}.$$

V číselném příkladě daném úlohou 12. jest

$b_0 = 10, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 50, \quad b_3 = 38, \quad b_4 = 290, \quad b_5 = 422,$

pročež determinant (II)

$$\begin{vmatrix} q^3 & 38 & 290 & 422 \\ q^2 & 50 & 38 & 290 \\ q & 2 & 50 & 38 \\ 1 & 10 & 2 & 50 \end{vmatrix} = -1500\,q^3 + 4500\,q^2 + 6000\,q - 18000.$$

Zkrátíme-li stálým činitelem -1500, můžeme psáti

$$f(q) = q^3 - 3q^2 - 4q + 12$$

čili po snadném rozkladu

$$f(q) = (q-2)(q+2)(q-3).$$

Jest tedy $q_1 = 2, \quad q_2 = -2, \quad q_3 = 3$; mimo to jest

$$f^{(1)}(q) = q^2 - q - 6,$$
$$f^{(2)}(q) = q^2 - 5q + 6,$$
$$f^{(3)}(q) = q^2 - 4.$$

Dle vzorce (III) jest pak

$$a_1 f^{(1)}(2) = -12, \quad a_1 = 3,$$
$$a_2 f^{(2)}(-2) = 100, \quad a_2 = 5,$$
$$a_3 f^{(3)}(3) = 50, \quad a_3 = 2.$$

Daná řada vznikla tedy sečtením řad geometrických

$$\begin{array}{rrrr} 3, & 6, & 12, & 24, \ldots \\ 5, & -10, & 20, & -40, \ldots \\ 2, & 6, & 18, & 54, \ldots . \end{array}$$

Obecný její člen b_n a součtový vzorec S_n lze vyjádřiti rekurentně

$$b_n = 3b_{n-1} + 4b_{n-2} - 12b_{n-3},$$
$$S_n = 3S_{n-1} + 4S_{n-2} - 12S_{n-3} - 14.$$

Úloha 13.

A nabízí B 200 K s podmínkou, aby mu dal za první korunu 1 h, za druhou 2 h, za třetí 3 h a t. d. a) Kolik by dal B za všech 200 K? b) Až do kolika K mohl by B takovou nabídku přijati? c) Při kolika K vyzískal by B nejvíce?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Em. Tichý*, stud. VI. tř. r. v Žižkově.)

a) Za 200 K dal by B

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 200 = \frac{201 . 200}{2} h = 201 \text{ K}.$$

b) Nabídku mohl by B přijati jen do 199 K; neboť za ty dal by

$$\frac{199 . 200}{2} h = 199 \text{ K}.$$

Za x K dal by

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2} h = \frac{x(x+1)}{200} \text{ K},$$

tedy získal by obecně

$$x - \frac{x(x+1)}{200} = \frac{x(199 - x)}{200} \text{ K}.$$

c) Výraz tento má největší hodnotu při

$$x = \frac{199}{2} = 99{\cdot}5;$$

jelikož však x má býti celistvý počet korun, třeba voliti za x hodnotu celou nejbližší číslu 99·5, t. j.

$$x = 99 \quad \text{aneb} \quad x = 100;$$

v obou případech získá B 49·5 K.

Úloha 14.

Sestrojiti čtverec ABCD, dány-li vzdálenosti daného bodu O od tří vrcholů

$$OA = a, \qquad OB = b, \qquad OC = c.$$

Prof. *Jan Schimek* ve Št. Hradci.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Žák*, stud. VII. tř. r. v Brně.) Učiníme-li $BO' \perp BO$, $BO' = BO$, jest

$$\triangle ABO \cong \triangle CBO'.$$

Zvolíme-li tedy vrchol B a sestrojíme O', má vrchol C vzdálenosti $OC = c$, $O'C = a$, čímž jest úplně — ovšem dvojznačně — určen. Strana BC stanoví čtverec žádaný.

Druhé řešení. (Zaslal p. *Jan Altmann*, stud. VIII. tř. gym. v Přerově.)

Označme $AB = s$, $\sphericalangle ABO = \alpha$;

pak jest
$$a^2 = s^2 + b^2 - 2bs \cos \alpha$$
$$b^2 = s^2 + b^2 - 2bs \sin \alpha.$$

Užitím vztahu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ obdržíme rovnici

$$\left(\frac{s^2 + b^2 - a^2}{2bs}\right)^2 + \left(\frac{s^2 + b^2 - c^2}{2bs}\right)^2 = 1,$$

z níž vyplývá

$$b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \pm \sqrt{D}.$$

Diskriminantu D lze dáti podobu

$$D = \frac{1}{4}(a + c + s\sqrt{2})(a + c - s\sqrt{2})(a - c + s\sqrt{2})(-a + c + s\sqrt{2}),$$

z níž patrno, že $D = 4\Delta^2$,

značí-li Δ obsah trojúhelníka ze stran a, c, $s\sqrt{2}$.

Jest tedy $4\Delta = a^2 + c^2 - 2b^2.$

Označíme-li $\sphericalangle AOC = \beta,$

jest $$\sin\beta = \frac{a^2 + c^2 - 2b^2}{2ac},$$

tudíž $90^0 - \beta$ úhel sevřený stranami a, c v trojúhelníku ze stran a, c, $b\sqrt{2}$.

Sestrojivše úhel β z veličin daných, sestrojíme snadně též trojúhelník AOC ze stran a, c a úhlu β jimi sevřeného.

Třetí řešení. (Zaslal pan *Josef Slovák*, bohoslovec v Olomouci.)

Čtverec ABCD o straně s umístěme v pravoúhlé soustavě tak, aby vrchol A ležel na X, C na Y, B v počátku.

Potom jest bod O průsečíkem kružnic

$$(x - s)^2 + y^2 = a^2$$
$$x^2 + y^2 = b^2$$
$$x^2 + (y - s)^2 = c^2.$$

Z rovnic těchto vyvodíme

$$s^2 - 2sx = a^2 - b^2, \qquad s^2 - 2sy = c^2 - b^2,$$

pročež $$x = \frac{s^2 - a^2 + b^2}{2s}, \qquad y = \frac{s^2 - c^2 + b^2}{2s};$$

tím dospíváme k rovnici bikvadratické pro s:

$$(s^2 - a^2 + b^2)^2 + (s^2 - c^2 + b^2)^2 = 4b^2s^2$$

čili $$s^4 - (a^2 + c^2)\, s^2 + \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - b^2)^2] = 0.$$

Kořeny této rovnice lze takto sestrojiti:

Položme $$s^2 = bx, \qquad \frac{a^2 + c^2}{b} = p,$$

$$\frac{1}{2b^2}[(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - b^2)^2] = q^2;$$

potom nabude rovnice tvaru

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

čili $$x(p - x) = q^2.$$

Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník o přeponě p a výšce q, dělí výška tato přeponu v části x_1, x_2, které jsou kořeny této rovnice; strana hledaného čtverce jest pak

$$s_1 = \sqrt{bx_1} \qquad \text{aneb} \qquad s_2 = \sqrt{bx_2}.$$

Úloha 15.

V rovnoramenném trojúhelníku jest rozdíl ramene a výšky 50, rozdíl ramene a půdice 325. Vypočítejte strany trojúhelníka, poloměr kružnice opsané i kružnice vepsané.

Učitel *Frant. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *R. Hutterer*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Označme délku ramene x, půdici $2y$ a výšku v; máme pak rovnice

$$x^2 - v^2 = y^2$$
$$x - v = 50$$
$$x - 2y = 325.$$

Z prvních dvou vyvodíme

$$x + v = \frac{y^2}{50},$$

pročež
$$2x = \frac{y^2}{50} + 50;$$

dosadíce do rovnice třetí, obdržíme rovnici kvadratickou

$$y^2 - 200y - 30000 = 0,$$

z níž ustanovíme positivný kořen

$$y = 300.$$

K tomu příslušejí hodnoty

$$y = 925, \qquad v = 875.$$

Obsah trojúhelníka jest pak

$$\varDelta = vy = 262500,$$

z čehož poloměr kružnice vepsané

$$\varrho = \frac{\varDelta}{x+y} = \frac{262500}{1225} = \frac{10500}{49} = 214{\cdot}29\ldots$$

a poloměr kružnice opsané

$$r = \frac{2x^2y}{4\varDelta} = \frac{x^2y}{2vy} = \frac{x^2}{2v} = \frac{6845}{14} = 488{\cdot}93\ldots.$$

Úloha 16.

Lichoběžník $ABCD$, ve kterém jsou rovnoběžné strany $AB = 19$, $CD = 11$ a výška $v = 16$, rozděliti jest příčkou $MN \parallel AB$ tak, aby

$$ABNM = 4 \,.\, CDMN.$$

Jak dlouhá jest příčka MN a v kterém poměru dělí výšku?

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Ludvík*, stud. VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě.)

Značí-li $a = AB$, $b = CD$, u délku dělicí příčky MN, x vzdálenost její od a, máme rovnice

$$(a + u)\, x = \frac{4}{5} (a + b)\, v$$

$$(b + u)(v - x) = \frac{1}{5} (a + b)\, v.$$

Sečtouce je dostaneme

$$(a - b)\, x = v\, (a - u)$$

a dosadíce x do rovnice první

$$\frac{v\,(a + u)(a - u)}{a - b} = \frac{4(a + b)\, v}{5};$$

odtud vyplývá $$a^2 - u^2 = \frac{4}{5} (a^2 - b^2),$$

z čehož $$u = \sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{5}}.$$

Při daných hodnotách jest

$$u = 13, \qquad x = 12;$$

výška jest rozdělena v poměru

$$(v - x) : x = 1 : 3.$$

Úloha 17.

Řešiti jest rovnici

$$2 \sin x \,.\, \sin 3x = 1.$$

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mosler*, stud. VII. tř. g. v Opavě.) Užijeme-li vzorce

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

kladouce $$\alpha = 3x, \qquad \beta = x,$$

promění se daná rovnice v tuto

$$\cos 2x - \cos 4x = 1$$

čili $$\cos 2x - 2 \cos^2 2x = 0.$$

Jest tedy buď

$$\cos 2x = 0, \qquad x_1 = 45^0 \pm n\mathrm{R}$$

aneb

$$2 \cos 2x - 1 = 0,$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = 2n\mathrm{R} \pm 30^0.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Dobroslav Kalina*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Vyjádříme-li $\sin 3x$ funkcí úhlu jednoduchého dle vzorce

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

obdržíme rovnici

$$8 \sin^4 x - 6 \sin^2 x + 1 = 0,$$

z níž vychází

$$\sin x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin x_2 = \pm \frac{1}{2};$$

odtud ustanovíme úhly jako při řešení prvním.

Úloha 18.

Řešiti jest rovnici

$$2\, tg\, x - 3\, tg\, 2x = 8.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Navrátil*, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě.)

Jelikož jest $\quad \mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$,

přechází rovnice daná v tuto

$$\mathrm{tg}^3 x - 4\, \mathrm{tg}^2 x + 2\, \mathrm{tg}\, x + 4 = 0.$$

Jeden kořen jest patrně

$$\mathrm{tg}\, x_1 = 2,$$

druhé dva plynou pak z rovnice

$$\mathrm{tg}^2 x - 2\, \mathrm{tg}\, x - 2 = 0,$$

z níž

$$\mathrm{tg}\, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Příslušné úhly z tabulek snadně lze vyhledati

$$x_1 = 63^0 26' \, 6'' + 2n \,.\, \mathrm{R},$$
$$x_2 = 69^0 53' 46'' + 2n \,.\, \mathrm{R},$$
$$x_3 = 143^0 47' 37'' + 2n \,.\, \mathrm{R}.$$

Úloha 19.

Řešiti jest rovnici

$$tg\, x + tg\, 2x = n \,.\, tg\, 3x.$$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Samek*, stud. obch. akademie v Hradci Králové.)

Rovnici tuto možno psáti ve formě

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = n \,.\, \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} 2x}$$

čili $$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + n - 1) = 0.$$

Z rovnice $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$$

plyne $$2x + x = \pm n \,.\, 2\mathrm{R},$$

tudíž $$x_1 = \pm n \,.\, \frac{2}{3}\,\mathrm{R}.$$

Z druhého činitele obdržíme

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + n - 1 = 0$$

čili $$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 - n,$$

z čehož $$\operatorname{tg} x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1 - n}{3 - n}}.$$

Z výrazu tohoto plyne jednoduchá racionálná hodnota

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2 - n},$$

kterou ve svém řešení našel p. *Vojt. Průša*, stud. VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Alois Mikeska*, stud. VII. tř. g. v Místku.)

Položíme-li $$\operatorname{tg} x = t,$$

jest $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{tg} 3x = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2};$$

tím přechází daná rovnice v algebraickou

$$(n - 3)\, t^5 - 2\,(2n - 5)\, t^3 + 3\,(n - 1)\, t = 0.$$

Odtud nalezneme

$$t_1 = 0, \quad x_1 = 2n\mathrm{R},$$

$$(n-3)\,t^4 - 2\,(2n-5)\,t^2 + 3\,(n-1) = 0,$$

$$t^2_{2,3} = \frac{1}{n-3}\,[2n-5 \pm (n-4$$

jest tedy

$$t_2^2 = 3, \qquad x_2 = \pm\, n\,.\,\frac{2}{3}\,\mathrm{R},$$

$$t_3^2 = \frac{n-1}{n-3}.$$

Úloha 20.

V pravoúhlém trojúhelníku abc vedena výška cd a na přeponě přenesena úsečka am = bd. Označíme-li

$$\sphericalangle\, cab = \alpha, \qquad \sphericalangle\, acm = \varphi, \qquad \sphericalangle\, cmd = \psi,$$

dokažte, že $\quad tg\,\varphi = tg^3\,\alpha\,, \qquad tg\,\psi = \frac{1}{2}\,tg\,2\alpha.$

Řed. *A. Strnad* v Kutné Hoře.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Kettner*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.) Učiníme-li $\overline{mn} \perp \overline{ac}$, jest

$$\overline{mn} = \overline{am}\,.\,\sin\alpha = \overline{bd}\,.\,\sin\alpha = \overline{bc}\,.\,\sin^2\alpha\,;$$

mimo to

$$\overline{an} = \overline{am}\,.\,\cos\alpha = \overline{bd}\,.\,\cos\alpha = \overline{bc}\,.\,\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

$$\overline{cn} = \overline{ac} - \overline{an} = \overline{bc}\,(\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = \overline{bc}\,.\,\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$$

Jest tedy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{mn}}{\overline{cn}} = \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \operatorname{tg}^3\alpha.$$

Úhel ψ ustanovíme ze vztahu

$$\psi = \alpha + \varphi\,;$$

jest tedy $\quad \operatorname{tg}\psi = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}$

čili se zřetelem k hodnotě dříve vyvozené

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^4\alpha}.$$

Odtud zkrácením zlomku plyne

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Rudolf Janota,* stud. VI. tř. r. v Rakovníku.)

Označíme-li $\overline{am} = \overline{bd} = u, \quad \overline{cd} = v,$

jest
$$u = \frac{a^2}{c}. \quad v = \frac{ab}{c};$$

mimo to jest
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{v}{c-u}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{v}{c-2u},$$

pročež
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\frac{v}{c-2u} - \frac{v}{c-u}}{1 + \frac{v^2}{(c-u)(c-2u)}} = \frac{uv}{(c-u)(c-2u)+v^2}.$$

Dosadíme-li za u, v hodnoty hořejší, vychází
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^3}{b^3} = \operatorname{tg}^3\alpha.$$

Pro tg ψ obdržíme
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{ab}{a^2 - b^2} = \frac{\frac{a}{b}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

pročež
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Altmann Josef, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Antonín Rudolf, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 2., 3., 4., 6., 8. až 11., 15., 16., 17., 19., 20.
Archleb Jiří, t. č. správce internátu při zemské vyšší reálce v Jevíčku, úl. 1. až 20.
Balcar František, stud. V. tř. g. v Litomyšli, úl. 1., 2.

Balcar Ot., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15. až 20.
Bálka František, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 3., 7., 9., 10., 11., 13., 15., 16., 17., 19.
Barbořík Arnošt, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8., 13., 15. až 20.
Barcal Václav, stud. VI. tř. g. v Roudnici, úl. 2., 8., 9., 15., 16., 17., 19.
Bátěk Václav, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 20.
Baumann Josef, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 20.
Bernard Josef, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 1., 2., 3., 6., 8.
Bílek Josef, stud. VII. tř. g. v Klatovech, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 16., 17., 19.
Borovka F., stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 2., 3., 4., 6., 8. až 11., 13., 15., 16., 17., 19., 20.
Boubela V., stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 9., 13., 15., 16., 17., 19.
Brabec Rudolf, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 3., 6., 7., 8.
Bršlica Jan, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1. až 20.
Březina Ferdinand, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 6., 8., 9., 11., 15. až 19.
Cenefels Karel, stud. VI. tř. g. v Domažlicích, úl. 1. až 4., 8., 13., 14., 16.
Čihák Otakar, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 2., 3., 4., 6., 8.
Čupr Karel, stud. VII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1. až 20.
Dašek V., stud. V. tř. r. v Náchodě, úl. 1. až 4., 6. až 9., 11., 13., 14., 15., 17., 19., 20.
Doležal Jaromír, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 2., 3., 4., 8., 9., 18.
Doležal Ludvík, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 15. až 20.
Drábek J., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 20.
Duřpek Antonín, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15. až 20.
Eichler Jaroslav, stud. VII. tř. g. v Praze (Křemencová ul.), úl. 2., 3., 4., 6., 9., 15., 16.
Eliáš Filip, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Fajtl František, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 6., 8.
Fiala František, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 20.
Fireš Josef, stud. VI. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 2.
Formánek Otakar, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Frank K., stud. VI. tř. r. na Novém Městě v Praze, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 11., 13., 15., 16., 17., 19.

Frantík Matouš, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6., 8., 9. až 13., 15. až 20.
Fuchs Osvald, stud. VI. tř. r. na Novém Městě v Praze, úl. 1., 13., 15., 19.
Galásek J., stud. VI. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 1. až 6., 8., 9., 11., 13., 15., 16., 17., 19.
Goebl Otakar, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 3., 4., 8., 9., 11.
Grössl František, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 20.
Hájek Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Hánek Karel, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 2., 8., 9., 11., 15. až 18.
Hanslian Alois, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 4., 8., 9., 17., 19.
Hassmann Antonín, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 2., 5., 8., 9., 11., 15. až 19.
Heinrich Vladimír, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 20.
Hlava B., stud. VI. tř. r. v Praze (Ječná ulice), úl. 1. až 4., 9., 11., 13., 15., 17., 19.
Hora Alois, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 9., 10., 13., 15., 17., 20.
Horka Robert, stud. V. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 2., 3., 15., 16.
Hořejší Jan, stud. V. tř. g. v Rokycanech, úl 1., 2., 8. až 11., 13.
Hrázdil Antonín, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 20.
Hromada Karel, stud. VI. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 2. až 6., 8., 9., 13., 15.
Hromádko Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 20.
Hušek Josef, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15. až 18.
Hutterer Rudolf, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 7. až 11., 13., 15., 17., 19.
Charfreitág Vratislav, stud. VI. tř. r. v Kostelci n. Orl., úl. 8., 9., 15., 16., 17.
Janda Adolf, stud. V. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 2., 3., 6., 7., 8.
Janota Rudolf, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 1. až 20.
Jaroš Alois, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 4., 17., 18., 20.
Jendele František, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Jestřábek Karel, stud. VIII. tř. g. v Praze (Žitná ul.), úl. 1., 3., 4., 6., 8., 10., 11., 13., 15., 16., 17., 19.
Jílek František, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 20.
Jindřich J., stud. VIII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2., 3., 4., 6., 15., 17.
Jírový Otakar, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2., 6., 8., 9., 11., 15., 16., 17., 19., 20.

Jonáš Jan, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15., 16., 17., 19.
Juran Methoděj, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 15., 17., 19.
Kalina Dobroslav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 11., 13., 15. až 20.
Kasal Jan, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 1., 2., 4., 6., 8. až 11., 16., 17., 19.
Kettner Jan, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Klíma Josef, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 13., 15. až 20.
Kopeček Leopold, stud. VI. tř. r. v Telči, úl. 1. až 11., 13., 15. až 20.
Kopidlanský František, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 2., 4., 6., 9., 10., 11., 15. až 19.
Kordina Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2., 3., 4., 6. až 9., 16. až 19.
Kosmák František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4, 6., 8. až 17., 19., 20.
Kössler Miloš, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Kostelecký Josef, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 20.
Kottnauer Č., stud. VI. tř. r. na Novém Městě v Praze, úl. 1. až 4., 9., 11., 13, 15., 17., 19.
Kovářík Otakar, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 20.
Kozel Josef, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1., 2., 13.
Kroutil Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 20.
Kučera Antonín, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 2., 3., 4., 6. až 9., 16.
Kulhánek Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Kvěch Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Ladman V., stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 2., 3., 4., 15., 16., 17., 19.
Láska Arnošt, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Lašek Alois, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13. až 17., 19., 20.
Líbal Josef, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 15. až 20.
Linger František, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 16.
Los František, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Ludvík Josef, stud. VI. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1. až 11., 13., 15. až 20.

Lupíšek Antonín, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 3., 4., 8., 9., 16. až 19.
Mancl Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 4., 6. až 9., 14. až 20.
Mareda Ladislav, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15., 17., 18., 19.
Marek František, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Mareš František, stud. VII. tř. v Pardubicích, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 20.
Mašata Josef, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 20.
Maÿr Karel, stud. VI. tř. r. na Starém Městě v Praze, úl. 1. až 11., 13., 15. až 20
Michna Jan, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 20.
Mikeska Alois, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Mikulášek Adolf, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 20.
Morávek Ladislav, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 13., 15., 17., 19., 20.
Mosler Josef, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 3., 4., 6., 8. až 11., 15. až 20.
Müller Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2., 3., 6., 8., 15., 17., 18., 19.
Navrátil Josef, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Nešpor Václav, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Neužil Innocenc, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Novák Adolf, stud. VII. tř. r. v Lounech, úl. 6., 9., 10., 11., 15., 16.
Novák Antonín, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 2., 3., 4., 6., 8. až 11., 13., 15. až 18.
Novák B., stud. VII. tř. g. v Rychnově nad Kněžnou, úl. 2., 3., 4., 6., 8., 16., 17., 18.
Novák Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 2., 3., 4., 6., 8., 9., 15. až 19.
Novák Josef, stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 1. až 4., 8., 9., 10., 13., 15., 16., 17., 19.
Novotný Jan, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 8., 9., 15., 16., 17., 19.
Nový Jaroslav, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 9., 11., 13. až 17., 20.
Ort Josef, stud. VIII. tř. g. v Praze, úl. 9., 15., 16.
Pankert Robert, stud. V. tř. g. v Hradci Králové, úl. 3., 4., 6., 8., 13. až 20.
Papež František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 4., 8. až 11., 15. až 20.

Papřok Josef, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Pergler František, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 2., 3., 5. až 11., 13. až 19.
Perman Václav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 15., 16., 17., 19.
Petera Eduard, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 3. až 6., 9., 15, 19.
Pícha Václav, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 8., 15. až 20.
Pithart Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1. až 20.
Plicka Stanislav, stud. VIII. tř. g. v Roudnici, úl. 1., 2., 6., 8., 9., 15. až 20.
Popp Albert, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Pospíšil Petr, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15. až 20.
Procházka B., svob. pán, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 4., 9., 15., 16., 17.
Procházka Eduard, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 4., 6. až 13., 15. až 20.
Průša Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Praze (Žitná ul.), úl. 1. až 11., 13., 15. až 20.
Přibyl František, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 17.
Pšeničný Jan, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 13., 15., 16., 17., 19., 20.
Rádl Josef, stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 1. až 4., 6.
Raus František, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 8. až 12., 15. až 17., 19.
Redl Václav, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 2., 3., 4., 6., 15., 16., 17., 19.
Reichmann Jan, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 2., 3., 4., 15., 17., 19.
Rejholec Václav, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 15., 16.
Růžička Antonín, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1. až 4., 6., 8. až 13., 15. až 20.
Růžička Jan, učitel v Tetíně, úl. 2., 4., 9., 11., 13., 15., 16., 17., 19.
Růžička Josef, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 11., 15. až 20.
Růžička Vilibald, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Rychlík Karel, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Ryšlink Emil, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 1. až 20.
Řezníček Ferdinand, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 2., 6., 7., 8.
Řezníček Václav, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 2., 3., 4., 6., 8., 9., 15., 16., 17., 19.

Samek Josef, stud. II. roč. obchodní akademie v Hradci Králové, úl. 1. až 13., 15.
Secký František, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 6., 8., 9., 11., 15. až 18., 20.
Seifert Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Seifert Miloš, stud. V. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15., 16., 20.
Seydl Otto, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 9., 15. až 20.
Schmied Vilém, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 2., 8., 9., 15., 16., 17.
Schwarz Alfred, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Sika Josef, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 2., 3., 4., 6. až 11., 13., 15. až 19.
Sirový F., stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 3., 4., 6., 9., 15., 17., 19.
Skála Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 20.
Skolil Josef, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13. až 20.
Sládek Alois, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Slovák Josef, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Smetana Štěpán, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 13., 15. až 19.
Sobota Ferdinand, právník v Praze, úl. 1. až 20.
Spurný Karel, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Straka Methoděj, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 11., 13., 15. až 20.
Strumhaus Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Stuchlík Josef, stud. V. tř. g. v Místku, úl. 2., 6., 15.
Stypa Ladislav, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15., 16.
Suczek Jindřich, stud. VI. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 4., 6., 8., 16.
Suchánek Josef, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Sura František, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 6., 8. až 11., 15. až 20.
Surka Leopold, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Sůva Josef, stud. VI. tř. r. v Lounech, úl. 2., 3., 4., 6., 9., 10., 11., 15. až 19.
Svoboda Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Písku, úl. 1. až 9., 13., 15. až 20.
Szalay Josef, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 20.
Šabršula František, stud. VII. tř. r. v Uher. Brodě, úl. 2., 5., 6., 9., 10., 11., 15. až 19.

Šebela Mikuláš, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 2., 4., 17., 18.
Ševčík Josef, stud. VI. tř. r. v Jevíčku, úl. 2., 3., 4., 6., 8., 9., 11., 15., 16., 17.
Ších Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 13., 15. až 20.
Šilhan Ludvík, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.
Šimůnek Václav, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15. až 20.
Škrábek Karel v Mor. Budějovicích, úl. 1. až 13., 15. až 19.
Škvor Karel, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 3., 4., 6., 8., 13. až 20.
Šlégr Josef, stud. VI. tř. r. v Lounech, úl. 2., 15., 16., 17.
Šmelcer Ladislav, stud. VII. tř. g. v Písku, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15. až 19.
Šmeral Theodor, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 20.
Šnábl Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 4., 9., 13., 15. až 18.
Špíšek Julius, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Štěpánek Jan, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 4., 6. až 9., 13., 17. až 20.
Štěpánek Josef, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 10., 15., 16., 17.
Šticha Augustin, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 20.
Štojdl Jan, stud. VI. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13., 15., 16., 17., 19.
Šubrt Jaroslav, stud. V. tř. g. v Místku, úl. 3., 6.
Táborský M., stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 11., 13. až 20.
Teyssler Vratislav, stud. VII. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 2., 15., 16., 17.
Tietz Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 15., 17., 18., 19.
Tichý Emanuel, stud. VI. tř. r. v Žižkově, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 11., 13. až 20.
Tomeš Celestýn, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1. až 11., 13.
Trnka František, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6., 8. až 13., 15. až 20.
Tyleček Fr., stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Ullrich August, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 20.
Urbánek Václav, stud. VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 1. až 20.
Valach František, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Vališ Ignát, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 20.

Vavrouch Jaroslav, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 2., 4.. 6., 8., 15., 16.
Vavřinec Josef, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 20.
Veber Bohumil, stud. VI. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 4., 6. až 9., 15, 16.
Vláčilíková M., učitelka v Kojetíně, úl. 3. až 9., 11., 13., 15. až 18.
Vodák Václav, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 2., 3., 4., 15., 16., 18.
Vodehnal František, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 4., 6., 8., 9., 16., 17., 18.
Vytášek František, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 1., 3., 6., 8., 9., 13., 15., 16., 17.
Zahrádka Antonín, stud. VIII. tř. g. v Slaném, úl. 1. až 20.
Zachoval František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6. až 11., 13., 15., 16., 17., 19., 20.
Zajíček Oldřich, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 6., 8., 9., 15., 17., 19., 20.
Závada František, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 20.
Zelinka Karel, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Zermanowitsch Miliwoje, stud. VII. tř. g. v Bělehradě, úl. 2., 3., 4., 8., 9., 15., 16., 17., 19.
Zgusta Ladislav, stud. V. tř. g. v Kyjově, úl. 1., 2., 13.
Zlámal František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 4., 15. až 20.
Zlámal Jan, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 2., 3., 4., 6., 8. až 11.. 13, 16. až 20.
Zoubek Robert, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 2.. 8., 9., 15., 16.
Žáček Augustin, stud. VI. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 11., 13. až 19.
Žák Karel, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 2. až 11., 13. až 20.
Žanta Rudolf, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1. až 20.
Živnůstka Otto, stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 9., 13., 15., 16., 17., 19.
Žurek Jan, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 4., 6., 8. až 11., 13., 15. až 20.
Nepodepsaný v Brně, úl. 2., 6., 7., 17., 18.