Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

Stanovení Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 4, 342--345

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122555`

vyžaduje transformaci tohoto tvaru na (3) nebo (4). Rychleji lze téhož výsledku dosíci použitím addiční poučky

$$\sin(45^0 - x) = \sin 45^0 \cos x - \cos 45^0 \sin x$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

anebo

$$\cos(45^0 + x) = \cos 45^0 \cos x - \sin 45^0 \sin x$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}$$

načež

$$(c) \qquad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(45^0 - x) = \sqrt{2} \cos(45^0 + x).$$

Klademe-li $-x$ místo x ve vzorcích (a), (b), obdržíme též vzorec (c).

Stanovení Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníka.

Napsal

Augustin Pánek.

Kružnice poloměru r, uvnitř vepsaná danému trojúhelníku ABC o stranách a, b, c, nechť dotýká se těchto stran posloupně v bodech D, E, F (viz obr.); pak jest

$$\overline{AF} = \overline{AE}$$
$$\overline{BD} = \overline{BF}$$
$$\overline{CE} = \overline{CD}.$$

Zdvojený součet těchto tří rovnic podává obvod trojúhelníka, jenž se značí

$$a + b + c = 2s,$$

tudíž

$$\overline{AF} + \overline{BD} + \overline{CE} = s = \overline{AF} + a,$$

z čehož

$$\overline{AF} = s - a$$

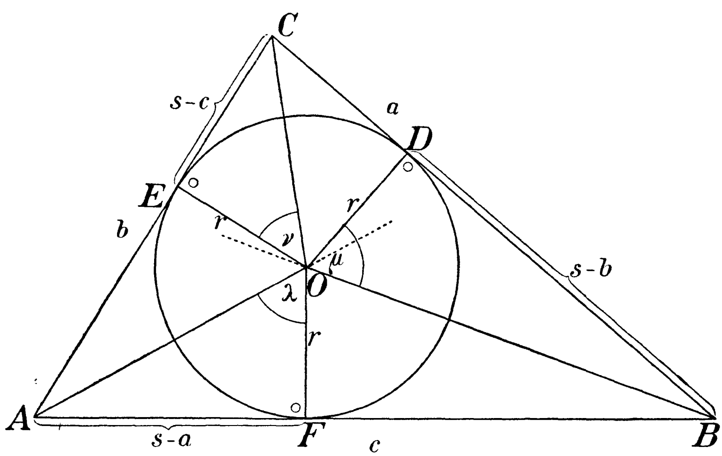
a podobně

$$\overline{BD} = s - b$$

$$\overline{CE} = s - c.$$

Nazveme-li úhly

$$AOF = \lambda, \qquad BOD = \mu, \qquad COE = \nu,$$



jest, jak z obrazce patrno,

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s-a}{r}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{s-b}{r}$$

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{s-c}{r}.$$

Úhly λ, μ, ν jsou však poloviny úhlů resp. FOE, FOD, EOD, jichž součet rovná se 360^0, pročež součet úhlů

$$\lambda + \mu + \nu = 180^0.$$

Při této supposici jest v platnosti známá, dvěma řádky dokázaná*) relace

$$\operatorname{tg}\lambda + \operatorname{tg}\mu + \operatorname{tg}\nu = \operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu,$$

jež celý výpočet činí značně jednoduchým a z níž po dosazení hořejších hodnot plyne

$$\frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r} = \frac{s-a}{r} \cdot \frac{s-b}{r} \cdot \frac{s-c}{r}$$

čili

$$3s - (a + b + c) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^2} = s,$$

z čehož vychází

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Označíme-li obsah daného trojúhelníka ABC literou Δ, jest, jak z planimetrie známo i přímo z obrazce zřejmo,

$$\Delta = \frac{a+b+c}{2}\, r = sr,$$

a vložíme-li sem vypočtěnou hodnotu r,

$$\Delta = s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Poznámka. Výpočet právě podaný jest mnohem kratší než způsob v učebnicích trigonometrie obvyklý, při němž se dvakráte upravuje Carnotova věta (cosinusová věta) za účelem stanovení vzorců

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

---

*) *Strnad,* Geometrie pro vyšší školy realné str. 141. a Geometrie pro vyšší gymnasia str. 192. V Praze, 1893.

jichž pomocí lze ploský obsah trojúhelníka

$$\Delta = \frac{ab}{2} \sin\gamma = ab \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

vyjádřiti stranami, při čemž γ značí úhel ACB trojúhelníka ABC. Vyvození toto jest také tím výhodno, že při něm vyniká geometrický význam veličin $s-a$, $s-b$, $s-c$.

Poznámka o rovnici rektangulárné.

V lonském ročníku tohoto Časopisu byla podána a na str. 353. řešena úloha dokazující větu:

„Je-li ab rovno součinu n kmenných čísel po sobě jdoucích, od 1 počínajíc, nemůže rektangulárná rovnice

$$xy = ax + by + 1$$

míti ani více ani méně než dvě celistvá kladná řešení.“

Pan Karel Čupr, stud. gymn. ve Vys. Mýtě, upozornil nás, že ani věta vyslovená ani odůvodnění její nejsou správné.

Omyl spočívá v nesprávném pochopení Euklidova důkazu o nekonečném počtu čísel kmenných.*) Jsou-li totiž a_1, a_2, a_3, ..., a_n všechna čísla kmenná od 1 do a_n, není výraz

$$N = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + 1$$

dělitelen žádným z těchto čísel, dávaje kterýmkoli z nich dělen zbytek 1. Z toho však neplyne, že N jest také číslem kmenným, nýbrž toliko, že čísel kmenných jest nekonečně mnoho.

Neboť, značí-li a_n největší známé číslo kmenné, jest buď N číslem kmenným větším než a_n aneb jest N *dělitelno číslem kmenným větším než* a_n. Není tudíž žádné číslo kmenné největším, počet jich jest neomezený.

Na str. 353. byla řešena rovnice

$$xy = 30x + 1001y + 1,$$

*) *Studnička*, Nauka o číslech str. 62.