Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

O křivkách a plochách, jež vytvářejí spojnice sdružených bodů dvou kolineárních, zvláště pak shodných křivých řad

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 8, 236--246

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122554`

O křivkách a plochách, jež vytvářejí spojnice sdružených bodů dvou kolineárních, zvláště pak shodných křivých řad.

Dr. *Josef Klíma*.

(Došlo 28. ledna 1934.)

1. Mějme v rovině π soumístnou kolineaci polí π_1, π_2, jejímž samodružným trojúhelníkem buď abc! Obecná družina x_1, x_2 odpovídajících si bodů mějž spojnici $X \equiv x_1x_2$, která protínejž strany samodružného trojúhelníka v bodech a', b', c', a to $a' \equiv (X, bc)$ atd.! Pro všechny družiny x_1, x_2 platí, že pětice $a'b'c'x_1x_2$ jsou vzájemně projektivní[1]) a jmenují se „vrhem“ (Wurf) pětiúhelníka $abcx_1x_2$ a lze tedy mluviti o „vrhu kolineace“. Budiž y_1, y_2 další družina odpovídajících si bodů! Podle obr. 1 vytvářejí sdružené svazky paprskové o středech x_1, x_2 a y_1, y_2 kuželosečky X^2, příp. Y^2, jež jdou vrcholy a, b, c samodružného trojúhelníka a průsečíkem x sdružených paprsků x_1y_1, x_2y_2. Ježto pětice $abcx_1x_2$, $abcy_1y_2$ promítají se z x týmiž pěti paprsky, tvoří na X^2 a Y^2 projektivní vzájemné řady a proto, označíme-li průsečíky spojnice $Y \equiv y_1y_2$ se stranami bc, ca, ab body a'', b'', c'', platí $a'b'c'x_1x_2 \barwedge a''b''c''y_1y_2 \barwedge \ldots$ Též vyplývá stejnost dvojpoměru paprsků, jimiž z některého vrcholu samodružného trojúhelníku promítají se další dva vrcholy a libovolná družina odpovídajících si bodů, na př. $a\,(bcx_1x_2) = a\,(bcy_1y_2) = \ldots$

Spojnice x_1x_2, y_1y_2 odpovídajících si bodů na sdružených spojnicích x_1y_1, x_2y_2 obalují kuželosečku, dotýkající se x_1y_1, x_2y_2 a stran samodružného trojúhelníka abc. Sestrojíme-li tudíž na x_1x_2, $y_1y_2, \ldots$ body x_3, $y_3, \ldots$ odpovídající si v řadách daných odpovídajícími si vrhy kolineace, budou body x_3, $y_3, \ldots$ vyplňovati pole π_3 kolineárné jak s π_1, tak s π_2, při čemž trojúhelník samodružný abc je společný. Dostáváme tak jednoparametrovou subgrupu dvouparametrové grupy kolineací soumístných o společném samodružném trojúhelníku abc.

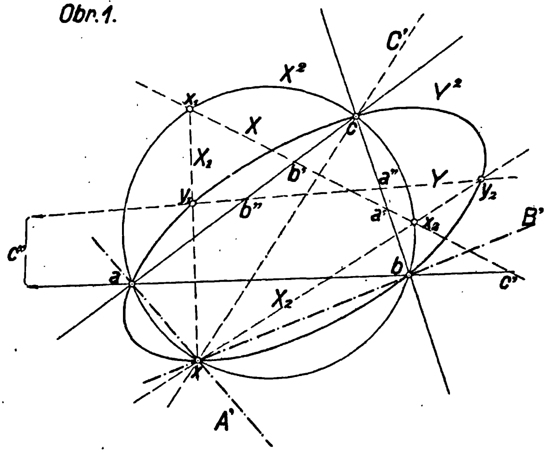
Duálně, jsou-li X_1, X_2 odpovídající si přímky a označíme-li A', B', C' spojnice průsečíku $x \equiv (X_1, X_2)$ s vrcholy a, b, c, jsou

[1]) Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, II. díl, odst. 290.

pětice $(A'B'C'X_1X_2)$ pro všechny družiny odpovídajících si přímek projektivní, a to projektivní s vrhem $(a'b'c'x_2x_1)$, jak patrno z obr. 1, kde $x_1y_1 \equiv X_1$, $x_2y_2 \equiv X_2$ a $(X_1X_2) \equiv x$. Je patrně $(A'B'X_1X_2) = (abx_1x_2) = (b'a'x_1x_2) = (a'b'x_2x_1)$ a podobně další tři rovnosti, z nichž plyne hořejší tvrzení. Počítáme-li spojnici $X \equiv \equiv x_1x_2$ k π_2, bude jí v π_1 odpovídati přímka, jdoucí bodem x_1, a proto platí též $x_1(abcx_2) = (a'b'c'x_1) = k_1 = \text{konst.}$ Stejně platí též konstantnost dvojpoměru $x_2(abcx_1) = (a'b'c'x_2) = k_2$ pro libovolný bod x_2.

Mějmež nyní v poli π_1 křivku K_1 stupně n, jež má d dvojných bodů a v bodů vratu a která má vrcholy a, b, c samodružného

Obr. 1.



trojúhelníka za α-, β-, γ-násobné body! Křivka, odpovídající K_2 v poli π_2, je téhož stupně a má body a, b, c za tolikéž násobné jako K_1. Spojnice sdružených bodů na K_1, K_2 obalují křivku K, jejíž charakteristická čísla určeme. Nejprve určeme třídu křivky K. Má-li tečna křivky K procházeti bodem p, musí na K_1, K_2 býti sdružené body x_1, x_2, jichž spojnice x_1x_2 jde bodem p. Ježto z x_1 promítají se a, b, c, x_2 paprsky o dvojpoměru k_1, musí x_1 býti na kuželosečce X_1^2, jdoucí body a, b, c, p, z jejíchž bodů se tato čtveřina promítá, dvojpoměrem k_1. Kuželosečka X_1^2 protíná K_1 ve $2n - - (\alpha + \beta + \gamma)$ bodech, jimiž jdou tečny křivky K z bodu p, čímž jsme určili třídu této křivky. Strany bc, ca, ab jsou $n - (\beta + \gamma)$-, $n - (\gamma + \alpha)$-, $n - (\alpha + \beta)$-násobnými tečnami křivky K. Spojnice d dvojných bodů křivky K_1 s odpovídajícími body křivky K_2 jsou dvojnými tečnami křivky K a v spojnic sdružených bodů vratu křivek K_1, K_2 jsou tečnami obratu křivky K. Je tudíž stupeň s křivky K:

$$s = (2n - \alpha - \beta - \gamma)(2n - \alpha - \beta - \gamma - 1) -$$
$$- 2\left[d + \binom{n - \beta - \gamma}{2} + \binom{n - \gamma - \alpha}{2} + \binom{n - \alpha - \beta}{2}\right] - 3v =$$
$$= n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) + 2d + 3v].$$

Aby bod p náležel křivce K, musí kuželosečka X_1^2, z jejíchž bodů se body a, b, c, p promítají čtveřinou paprskovou o dvojpoměru k_1, dotýkati se křivky K_1. Abychom tudíž dostávali body křivky K, sestrojujeme v síti kuželoseček, jdoucích body a, b, c, ony, jež se dotýkají křivky K_1, a na každé z nich určíme body p, aby $(abcp) = k_1$. Kuželosečky sítě (abc), jež by se dotýkaly dvojnásob křivky K_1, určovaly by dvojné body a ty, jež by oskulovaly K_1, body vratu.

K stupni křivky K lze dospěti nyní též jinak. Probíhá-li bod p libovolnou přímku P, budou příslušné kuželosečky X_1^2 tvořiti svazek, ježto mimo body a, b, c procházejí ještě bodem u přímky P, pro nějž $u\,(abcP) = k_1$. Kuželosečky svazku $(abcu)$ vytínají na K_1 bodovou involuci stupně $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$. Jestliže je křivka K_1 racionální, lze Chaslesovým korespondenčním principem určiti počet oněch skupin involuce, v nichž splývají dva body a jež určují průsečíky přímky P s K. Involuce ta obsahuje totiž $4n - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2$ takových skupin, od čehož nutno ubrati ty skupiny, jež obsahují body vratu křivky K_1 a jichž je v. Vzhledem k racionálnosti křivky K platí $(n - 1)(n - 2) - 2d + 2v + \alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)$. Dostáváme tudíž pro s totéž číslo jako nahoře.

Není-li křivka K_1 racionální, lze užíti tu řešení, uvedeného v Sturmově „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ IV. díl, str. 228, pro systém kuželoseček (μ, ν). Na libovolné přímce L určíme tuto korespondenci mezi jejími body z, z'. Libovolnému bodu z odpovídejtež dva průsečíky z' přímky L s kuželosečkou pólovou vzhledem k svazku $(abcu)$ přímé poláry bodu z ke K_1! Poláry bodu z' přímky L k svazku $(abcu)$ jdou sdruženým bodem z'_0. Probíhá-li bod z přímku L, obalují jeho přímé poláry ke K_1 křivku Z třídy $(n - 1)$. Z bodu z'_0 lze k Z vésti $(n - 1)$ tečen, jež jsou přímými polárami tolikéž bodů na L vzhledem ke K_1. Mezi body z, z' na L je příbuznost $[n - 1, 2]$-značná. Místem koincidencí $z \equiv z'$ je tudíž křivka Q stupně $n + 1$. Kuželosečka svazku $(abcu)$, jdoucí některým z průsečíků křivek Q a K_1, dotýká se K_1 v tomto bodě, ježto zde poláry jak ke K_1, tak ke kuželosečce splývají v jejich společné tečně. Pro přímku L, jdoucí r-násobným bodem z křivky K_1, odděluje se od křivky Z $(r - 1)$-krát svazek paprskový o společném středu v tomto bodě, ježto tolikrát bodem tím jde prvá polára libovolného bodu. Má tudíž křivka koincidencí Q r-násobný bod křivky K_1 za $(r - 1)$-násobný, ježto korespondence (z, z') na přímce L, jím jdoucí, je $[n - r, 2]$-značná. Jestliže křivka K_1 jde některým základním bodem svazku, na př. a, a má tam α-násobný bod, je bod a pro Q též α-násobným bodem a křivky K_1, Q mají tam společné tečny. Existuje totiž ve svazku $(abcu)$ α kuželoseček, jež se v bodě a křivky K_1 dotýkají, a tu jejich přímé poláry splývají. Prvá polára bodu a ke K_1 je stupně $(n - 1)$, jež má v a bod α-násobný, v němž tečny splývají s tečnami ke K_1 a jsou tudíž tečny ty též tečnami křivky Q. V bodě vratu křivky K_1 má Q jednoduchý bod, ale tečny tam k oběma splývají a proto jsou tam tři z průsečíků (QK_1). I je zbývajících průsečíků Q s K_1 $s = n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) + 2d + 3v]$, stejné to číslo jako nahoře.

Máme-li speciálně dvě souhlasně shodné soustavy π_1, π_2 v rovině π, jsou samodružné body b, c v kruhových bodech roviny π a třetí samodružný bod a je středem otáčení, kolem něhož otočením jedna soustava splyne s druhou. Spojujeme-li odpovídající si body na shodných křivkách K_1, K_2 stupňů n, jež jdou α-krát bodem a a β-krát kruhovými body, obalují spojnice ty křivku stupně $s = n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + 2\beta(\beta + 1) + 2d + 3v]$. Křivka K je zde též první negativní úpatnicí[2]) křivky, podobné s K_1, jež je místem půlicích bodů vzdáleností odpovídajících si bodů na K_1, K_2. Na př. souhlasně shodné řady na shodných kružnicích, jež nejdou bodem a, obalují svými spojnicemi křivku stupně $s = 2 . 3 - 2 . 2 = 2$, t. j. kuželosečku, jež má v a ohnisko. Jdou-li kružnice K_1, K_2 bodem a, pak $s = 2 . 3 - 2 - 2 . 2 = 0$, t. j. je to bod v druhém jejich průsečíku.

2. Uvažujme o dvou kolineárních prostorech Σ_1, Σ_2! Spojnice X odpovídajících si bodů x_1, x_2 tvoří tetraedrální komplex, jehož základním čtyřstěnem je samodružný čtyřstěn $abcd$ obou prostorů. Spojnice X je též průsečnicí odpovídajících si rovin ξ_1, ξ_2, z nichž prvá obsahuje přímku Y_1, jejíž odpovídající $Y_2 \equiv X$. Roviny $\alpha \equiv (bcd), \ldots$ stěn čtyřstěnu samodružného protínají spojnici $X \equiv x_1x_2$ v bodech a', b', c', d' a platí projektivnost řad $(a'b'c'd'x_1x_2)$ pro všechny spojnice x_1x_2. Obdobně svazky rovin o osách $X \equiv (\xi_1, \xi_2)$, jejichž roviny jdou vrcholy čtyřstěnu samodružného a roviny ξ_1, ξ_2, jsou projektivní, a to platí $X(abcd\xi_2\xi_1) = X(a'b'c'd'x_1x_2)$ a tuto projektivnost šesti prvků jmenujeme „vrhem kolineace“. Kolineární trsy kolem středů x_1, x_2 vytvářejí křivku třetího stupně X^3, jdoucí body a, b, c, d, x_1, x_2. Body tyto promítají se z bisekant křivky X^3 promětnými svazky. Promítáme-li na př. c, d, x_1, x_2 z bisekanty ab, bude $(cdx_1x_2) = (d'c'x_1x_2) = (c'd'x_2x_1)$ a podobně další vztahy, takže je $(abcdx_1x_2) \barwedge (a'b'c'd'x_2x_1 \barwedge X(abcd\xi_1\xi_2)$.

[2]) Viz na př. G. Loria: Spezielle algebr. u. transz. ebene Kurven, II. díl, str. 321.

Komplexová kuželosečka v libovolné rovině ϱ je obalena spojnicemi odpovídajících si řad na (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2), kde $\xi_2 \equiv \eta_1 \equiv \varrho$. Kuželosečka ta dotýká se stěn samodružného čtyřstěnu. Otáčí-li se rovina ϱ kolem své průsečnice s některou stěnou samodružného čtyřstěnu, promítá se komplexová kuželosečka v této rovině z protějšího vrcholu čtyřstěnu na stěnu do téže kuželosečky. Na př., je-li průsečnice $A \equiv (\varrho\alpha)$, je průmět ten kuželosečka, obalená přímkami X^a, jež protínají přímky A, bc, cd, db ve čtveřinách daného dvojpoměru $k = (a'b'c'd')$. Prochází-li rovina ϱ některým vrcholem samodružného tetraedru, na př. a, rozpadá se kuželosečka komplexová ve svazek o středu a a svazek o středu m na průsečnici $A \equiv (\varrho\alpha)$ tak, že, označíme-li $(A, cd) \equiv b''$, $(A, db) \equiv c''$, $(A, bc) \equiv d''$, je $(mb''c''d'') = k$. Zvolme v prostoru libovolný bod p! Necháme-li rovinu ϱ otáčeti kolem přímky pa, opíše bod m, dříve stanovený, v rovině α kuželosečku $A_p{}^2$, jdoucí body b, c, d a bodem p^a, který je průmětem bodu p z vrcholu a na protější stěnu α. Kuželová komplexová plocha bodu p je $(pA_p{}^2)$. Body x_1 prostoru Σ_1, jež spojují paprsky čtyřstěnového komplexu, jdoucí bodem p, s odpovídajícími body x_2 v Σ_2, promítají se z vrcholu na př. a kuželovou plochou 2^0, obsahující hrany ab, ac, ad, ap do kuželosečky $X_1{}^a$ v α. Stejně odpovídající body x_2 promítají se z vrcholu a kuželovou plochou 2^0, jež obsahuje též spojnice ab, ac, ad, ap, do kuželosečky $X_2{}^a$. $X_1{}^a$, $X_2{}^a$ jdou body b, c, d, p^a. Jsou proto body x_1 na křivce třetího stupně $X_1{}^3$, v níž se protínají kuželové plochy $(aA_p{}^2)$ a $(aX_1{}^a)$, body x_2 pak na odpovídající křivce 3^0 $X_2{}^3$. Obě kubiky $X_1{}^3$, $X_2{}^3$ jdou vrcholy a, b, c, d samodružného čtyřstěnu a bodem p. Probíhá-li bod p libovolnou přímku L, pak příslušné křivky $X_2{}^3$ vytvoří plochu λ_2, která je druhého stupně. Libovolná přímka prostoru Σ_2 protíná totiž plochu λ_2 ve dvou bodech, ježto spojnice bodů řady R_2 prostoru Σ_2 s odpovídajícími body odpovídající řady bodové R_1 v Σ_1 vytvořují plochu 2^0, již přímka L protíná ve dvou bodech. Plocha λ_2 obsahuje přímku L a přímku L_2 jí odpovídající v Σ_2, počítáme-li ji k Σ_1, a obsahuje vrcholy a, b, c, d, čímž je určena a vytvořena je průsečnicemi odpovídajících si rovin kolem odpovídajících přímek L, L_2. Náleží-li přímka L čtyřstěnovému komplexu, je příslušná plocha λ_2 kuželovou plochou. Stejně k přímce L přináleží plocha λ_1, obsahující body x_1 všech paprsků komplexu, jež sekou přímku L. λ_1 odpovídá v Σ_1 v kolineaci ploše λ_2 a obsahuje přímku L'_1 odpovídající přímce L, počítané k Σ_2.

Mějme nyní v prostorech Σ_1, Σ_2 odpovídající si křivky K_1, K_2 stupňů n, jež mají vrcholy a, b, c, d za α-, β-, γ-, δ-násobné body! Spojnice odpovídajících si bodů obou křivek K_1, K_2 budou vytvořovati zborcenou plochu ζ, jež je stupně $2n - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, ježto v tolika bodech protíná ji libovolná přímka L. Přímce L odpovídá podle hořejšího v prostoru Σ_2 plocha λ_2, již vyplňují body x_2

paprsků komplexu, sekoucí L, která jde body a, b, c, d a protíná tudíž mimo tyto body křivku K_2 ve $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$ bodech, jimiž jdoucí přímky plochy ζ protínají L. V tom obsažena též konstrukce průsečíků libovolné přímky L s plochou ζ. Prochází-li přímka L některým vrcholem samodružného čtyřstěnu, na př. a, je příslušná plocha λ_2 kuželovou plochou 2^0 o vrcholu v a, která jde body b, c, d. Tato kuželová plocha protíná K_2 mimo v a, b, c, d ještě ve $2n - (2\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ bodech. Jsou proto body a, b, c, d pro plochu ζ body α-, β-, γ-, δ-násobnými a průmětem plochy ζ z některého tohoto vrcholu, na př. a, na protější stěnu α je křivka třídy $2(n - \alpha) - (\beta + \gamma + \delta)$, což odpovídá výsledku v části 1, ježto křivky K_1, K_2 promítají se z a na α do kolineárních křivek stupňů $(n - \alpha)$, jež jdou samodružnými body b, c, d, β-, γ-, δ-krát.

Zborcená plocha ζ protíná rovinu stěny samodružného čtyřstěnu, na př. α, v tvořicích přímkách, jež spojují průsečíky křivky K_1 s α, jichž je $n - (\beta + \gamma + \delta)$, s odpovídajícími body na K_2 a v křivce stupně $n - \alpha$. To lze ukázati též takto: Všechny přímky tetraedr. komplexu, jež protínají libovolnou přímku L roviny α, mají své body x_1 (x_2) v rovině λ_1, jdoucí vrcholem a samodr. tetraedru, ježto plocha 2^0 λ_1 obecného případu rozpadá se tu v pár rovin, a to α a λ_1. Ježto λ_1 protíná K_1 v $(n - \alpha)$ bodech, je stupeň křivky plochy ζ v α výše udaný. Jsou tudíž roviny α, β, γ, δ stěn čtyřstěnu základního $[n - (\beta + \gamma + \delta)]$-, $[n - (\gamma + \delta + \alpha)]$-, $[n - (\delta + \alpha + \beta)]$-, $[n - (\alpha + \beta + \gamma)]$-násobnými tečnými rovinami plochy ζ.

Sestrojíme-li ve „vrzích kolineace“ $(a'b'c'd'x_1x_2)$ ... odpovídající si body $x_3, \ldots$, budou vyplňovati prostor Σ_3, kolineární s danými prostory, kde bodům a_1 odpovídá a_3, případně bodu a_2 bod a_3. Prostory Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3, \ldots$ tvoří jednomocný svazek prostorů, jehož kterékoliv dva prostory určují týž tetraedrální komplex jako Σ_1, Σ_2. Křivkám K_1, K_2 prostorů Σ_1, Σ_2 odpovídají kolineární křivky $K_3, \ldots$, jež jsou na ploše ζ. Dostáváme tak systém ∞^1 vzájemně projektivních křivek K_n na ploše ζ, jež mají v bodech a, b, c, d body α-, β-, γ-, δ-násobné a které na tvořicích přímkách plochy vytínají řady projektivní.

Aby dva paprsky X, Y tetraedrálního komplexu se protínaly v bodě p, je třeba, aby spojnice jejich bodů x_1, y_1 prostoru Σ_1, jež spojují s jich odpovídajícími body x_2, y_2, byla též paprskem komplexu. Body $x_1, \ldots$ prostoru Σ_1, jež jsou na komplexních paprscích, jdoucích bodem p, vyplňují kubiku $X_1{}^3$, jež jde body p, x_1, $y_1, \ldots, a$, b, c, d. Promítají se tudíž vrcholy samodružného čtyřstěnu a, b, c, d z dvojsečny x_1y_1 rovinami téhož dvojpoměru jako z bisekanty px_1 a proto x_1y_1 náleží čtyřstěnovému komplexu. Rovině (XY), počítané k Σ_2, odpovídá v Σ_1 rovina, jdoucí spojnicí x_1y_1. Dvojnásob tečné roviny zborcené plochy ζ dostaneme tudíž, určíme-li paprsky komplexu, jež jsou současně dvojsečnami křivky K_1, a spojíme je rovinami s jejich odpovídajícími přímkami v Σ_2. Přímek těch je ∞^1 a tvoří zborcenou plochu. Chceme-li určiti torsální přímky plochy ζ, třeba sestrojiti paprsky komplexové, jež jsou současně tečnami křivky K_1, kterých je obecně konečný počet, a tu roviny, spojující je s jejich odpovídajícími v prostoru Σ_2, jsou torsálními rovinami. Jestliže všechny tečny křivky K_1 náležejí komplexu nebo, jak říkáme, je-li K_1 komplexovou křivkou, je vytvořená plocha přímková ζ rozvinutelnou.

Uvažujme nyní speciálně o případě, kdy kolineace prostorů Σ_1, Σ_2 přejde v souhlasnou shodnost! Dva vrcholy c, d samodružného čtyřstěnu splývají v úběžném bodě o_∞ osy O, kol níž lze prostor Σ_1 šroubovým pohybem ztotožniti se Σ_2. Další dva vrcholy a, b jsou v kruhových bodech rovin, kolmých k ose O. Zaveďme kolmé promítání ve směru osy O na rovinu π, kolmou k této ose, a označme průměty stejně, ale s $'$! Prostor Σ_1 lze převésti v Σ_2 též otočením kol O o úhel 2ω (ω má znaménko při šroubovém pohybu pravotočivém $+$ a levotočivém $-$) a posunutím o délku z, jíž uvažujeme vždy $+$, a směřuje zdola nahoru, je-li osa O, jak v dalším vždy předpokládáme, svislá a je-li tudíž obraz kolmého průmětu půdorysem. Ježto speciální tetraedrální tento komplex přechází v sebe libovolným posunutím podél O, nemění se též půdorys komplexových parabol v rovinách rovnoběžných, jak nám potvrdí též konstrukce jejího půdorysu, na př. v rovině ε v obr. 2. Rovina ε určena stopou P_ε v průmětně π, jež v obr. zvolena průsečíkem (πO) a hlavní přímkou H^ε o kótě z. Přímku E_1 roviny ε, jejíž odpovídající E_2 je též v rovině ε, dostaneme, sešroubujeme-li rovinu ε do roviny ε_1 v inversním šroubovém pohybu (-2ω, $-z$). H_ε přejde ve stopu P_{ε_1} a průsečnice $E_1 \equiv (\varepsilon\varepsilon_1)$ má půdorys v příslušné ose úhlu $\widehat{P_\varepsilon P_{\varepsilon_1}}$. Půdorys komplexové paraboly ε^2 roviny ε má patrně osu v P_ε, ohnisko v O' a vrcholová tečna A' je půdorysem paprsku komplexního, který je spádovou přímkou v rovině ε. Označíme-li i interval roviny ε pro ekvidistanci z, je parametr paraboly $\varepsilon^{2\prime}$

$$p = 2 \cdot \frac{i}{\sin 2\omega} \cdot \cos \omega = i \operatorname{cotg} \omega,$$

a označíme-li ostrý úhel roviny ε s O písmenou $\varphi = \sphericalangle O\varepsilon$, t. j. $\operatorname{tg} \varphi = i/z$, pak

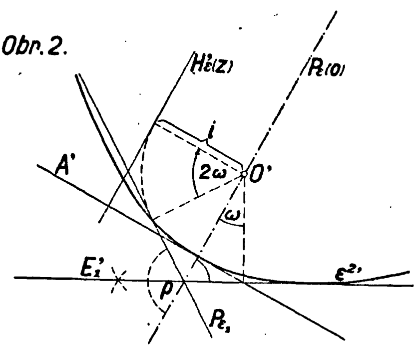
$$p = z \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \omega.$$

Tím vyjádřena úměrnost parametru p na tangentě úhlu φ, jejž svírá osa O s rovinou ε a naopak. Pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ je $p = \infty$ a parabola rozpadá se ve svazky minimálních přímek. Jestliže $\varphi = 0$, je $p = 0$, příslušná parabola roviny $\varepsilon \parallel O$ rozpadá se v pár bodový na její úběžné přímce a paprsky komplexu v rovině té tvoří jednak osnovu přímek, rovnoběžných s O, a osnovu přímek, jichž úhel ψ s O dán, jestliže vzdálenost ε od O je d: $\operatorname{tg} \psi = \frac{2d \operatorname{tg} \omega}{z}$.

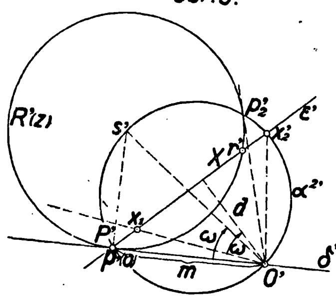
Z toho lze snadno učiniti si představu o tomto speciálním kvadratickém komplexu.

Přímky komplexu, jdoucí obecně položeným bodem p, dostaneme takto: Bodem tím mysleme si svazek rovin $\varepsilon \parallel O$ o ose $P \parallel O$! Pak v každé té rovině jde bodem p mimo přímku P, jež náleží komplexu, ještě jedna přímka tohoto komplexu, svírající s osou O úhel ψ. Svírá-li rovina ε s rovinou $\delta \equiv (PO)$ úhel β, je vzdálenost d osy O od ε pak $d = m \sin \beta$, je-li $m = p \dashv O$ (obr. 3). Tudíž $\operatorname{tg} \psi = \frac{2\,m}{z} \operatorname{tg} \omega \sin \beta$.

Obr. 2.



Obr. 3.



Stopníky r těchto přímek na rovině ${}^1\pi \perp O$, jež je nad p ve vzdálenosti z, vyplňují kružnici R, dotýkající se roviny δ v bodě na P, a jejíž střed s je na rotační válcové ploše α^2, jež je místem bodů x_2 přímek $X \equiv x_1x_2$ komplexu, jdoucích bodem p ($p's' \perp \delta'$).

Na kružnici $R' \cong R$ je též bod p'_2, odpovídající bodu $p'_1 \equiv p'$ i spatřuje se R'_1 z bodu O' pod úhlem 2ω. Na základě toho lze snadno určiti komplexový kužel libovolného bodu p, který je patrně orthogonálním. Body x_2 pro všechny paprsky komplexu, procházející bodem p, jsou na prostorové křivce kubické $X_2{}^3$, v níž protínají se válcová plocha α^2 s komplexovou kuželovou plochou (pR) mimo společnou přímku P. Křivka $X_2{}^3$ obsahuje kruhové body roviny $\pi \perp O$ a jde úběžným bodem o_∞ přímky O a je tudíž kubickou prostorovou kružnicí. Libovolná tvořicí přímka na α^2 protíná $X_2{}^3$ mimo o_∞ ještě v bodě v konečnu, jen druhý průsečík s O splývá též s o_∞ a tudíž O je asymptotou křivky $X_2{}^3$. Křivka $X_2{}^3$ prochází též bodem p.

Mějme v prostoru Σ_1 křivku algebraickou K_1 stupně n a s ní v Σ_2 shodnou odpovídající křivku K_2, z nichž K_1 a tudíž i K_2 jde

α-krát bodem o_∞ osy O a β-krát kruhovými body a_∞, b_∞ roviny π! Spojnice odpovídajících bodů obou křivek vytvořují přímkovou plochu ζ stupně $2n - (\alpha + 2\beta)$. Jestliže některá z větví křivek K_1, K_2, jdoucích bodem o_∞, se dotýká tam osy O, třeba pro každou takou větev snížiti stupeň plochy ještě o 1, ježto v případě tom obsahuje příslušná větev křivek těch nejen vrchol c, ale i d samodružného čtyřstěnu případu obecného. Průsečíky libovolné přímky L s plochou dostaneme použitím plochy 2^0 λ_2, jež je tu pravoúhlým hyperboloidem, majícím kruhové řezy v rovinách, rovnoběžných s π, a obsahujícím dvě přímky různých soustav, rovnoběžných s O. Z těchto přímek jedna je v rovině, jdoucí L rovnoběžně s O, a druhá v rovině, rovnoběžné s L a O, v níž přímky komplexu jsou rovnoběžné s L. Obě pak jsou v rovině, jdoucí osou a svírající s L' úhel $90^0 - \omega$, ovšem v příslušném smyslu. Z těchto dat lze určiti snadno kruhové řezy plochy s rovinami, kolmými k O. Křivka K_2 protíná tuto plochu mimo body o_∞, a_∞, b_∞ ve $2n - (\alpha + 2\beta)$ bodech x_2, jež, spojeny s odpovídajícími body x_1 na K_1, dají tvořicí přímky zborcené plochy, jež protínají L. Jestliže je přímka $L \parallel O$, přejde λ_2 v rotační válcovou plochu, rovnoběžnou s O, z jejíchž bodů jeví se přímky O a L pod úhlem $90^0 - \omega$, a tato protíná K_2 mimo o_∞, a_∞, b_∞ ještě ve $2n - (2\alpha + 2\beta)$ bodech, takže bod o_∞ je pro plochu α-násobným a průmět hlavní plochy má za zdánlivý obrys křivku třídy $2(n - \alpha - \beta)$, ježto křivky K_2 a K_1 mají za půdorys shodné křivky stupňů $n - \alpha$, jež jdou β-krát kruhovými body. Bodem o_∞ prochází α tvořicích přímek plochy, jež jsou vesměs v úběžné rovině. Tyto jsou úběžnými přímkami rovin, stanovených vždy odpovídajícími tečnami křivek K_1, K_2 v bodě o_∞. Vedle těchto úběžných přímek má plocha ζ ještě $(n - \alpha - 2\beta)$ úběžných přímek, jež spojují odpovídající si úběžné body křivek K_1, K_2 mimo body o_∞, a_∞, b_∞. Protíná tudíž úběžná rovina plochu ještě v křivce stupně $n - \alpha$. To lze ještě ukázati jinak. Všechny přímky komplexu, jež protínají obecnou úběžnou přímku L_∞, mají své body x_2 v rovině, rovnoběžné s osou O, a ta protíná křivku K_2 v $(n - \alpha)$ bodech, jež, spojeny s odpovídajícími body, dají tolikéž přímek, jež protínají L_∞. Lze též určiti řídicí kuželovou plochu zborcené plochy ζ. Dělíme-li stejně jako v odstavci 1 úsečky x_1x_2 v poměru λ, resp. $1/\lambda$, body x_3, x_4, dostaneme z prostorů Σ_1, Σ_2 prostory Σ_3, Σ_4, jež jsou vzájemně shodné a podobné s danými, jež lze opět ztotožniti šroubovým pohybem kol O, při čemž úhel otočení a délku posunutí lze snadno z ω a z určiti. Prostory Σ_3, Σ_4 určují týž tetraedrální komplex. Z křivek K_1 a K_2 dostaneme křivky K_3, K_4, podobné daným, jež jsou též na ploše ζ. Měníme-li λ, dostaneme na ploše ζ ∞^1 párů shodných a mezi sebou podobných křivek. Speciálně pro $\lambda = -1$ splyne K_3 s K_4 v jedinou křivku K_s, body x_3 a x_4 přejdou v x_s a přímka X

je též tečnou šroubovice bodu x_s pro šroubový pohyb o redukované výšce $v^0 = \frac{1}{2}z \operatorname{cotg} \omega$ a ose O. Dostáváme tudíž:

„Tečny všech šroubovic nějakého šroubového pohybu v bodech křivky K_s stupně n, jež jde α-krát úběžným bodem osy O šroubového pohybu a β-krát kruhovými body roviny, kolmé k ose, vyplňují zborcenou plochu ζ stupně $2n - \alpha - 2\beta$. Jestliže O je asymptotou křivky K_s, sníží se stupeň plochy o 1.“

Na př. při zborcené ploše šroubové je to dotyčný hyperbolický paraboloid ($n = 1$, $\alpha = \beta = 0$). Při vinutém sloupku tečny šroubovic v bodech normálního kruhového řezu vyplňují jednu soustavu přímek na hyperboloidu ($n = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$).

Otočíme-li průmět x'_s kol O' o 90^0 směrem šroubování dolů do bodu $\overline{x'_s}$, bude spojnice $x'_s v$, kde v je na O, a to nad průmětnou π ve vzdálenosti v^0, rovnoběžná s X. Otočíme-li tedy K'_s o 90^0 ve směru šroubování dolů do křivky $\overline{K'_s}$, je $(v\overline{K'_s})$ řídicí kuželová plocha zborcené plochy ζ. Ježto K'_s je obecně stupně $n - \alpha$, je stejného stupně úběžná křivka plochy ζ. Jestliže průmět K'_s je křivkou stupně jen r, pak na každé tvořicí přímce promítací válcové plochy křivky K_1 je $\frac{n-\alpha}{r}$ bodů křivky K_s, jimiž jdoucí vytvořující přímky plochy jsou spolu rovnoběžné. Plocha ζ má tudíž úběžnou křivku stupně r, která je však $\frac{n-\alpha}{r}$-násobnou křivkou na ploše. Protíná-li křivka K_1 a tudíž také K_2 a K_s osu O q-krát, je osa O q-násobnou tvořicí přímkou na ploše ζ. Jsou-li K_1, K_2 na rotačních válcových plochách, jež obsahují osu O, má plocha řídicí přímku, jež je v druhé společné tvořicí přímce obou válcových ploch, jak vyplývá z části 1.

Jsou-li na př. K_1 a K_2 **shodné kuželosečky**, **neobsahující** o_∞, je plocha ζ stupně 4 typu III s dvojnou kubikou, pro niž úběžná rovina je bitangenciální rovinou. **Procházejí-li kuželosečky ty bodem** o_∞, je vytvořená plocha stupně 3 o řídicí rovině, tudíž konoid (K'_s je přímkou). **Jsou-li** K_1, K_2 **kuželosečky v rovinách, jdoucích osou** O, má vytvořená plocha 4^0 O za dvojnou tvořicí přímku a její obě řídicí přímky splývají s přímkou úběžnou, jdoucí bodem o_∞, tudíž je typu VIII, zvláštní to případ Frezierova cylindroidu. Torsální přímky těchto ploch jdou dotyčnými body kuželosečky s jejími tečnami, společnými s komplexovou parabolou v její rovině. **Jsou-li kuželosečky** ty kružnicemi, zůstává vše v platnosti jen v případě, že jsou kružnice v rovinách, kolmých k ose O, je $\beta = 1$ a dostáváme plochu stupně 2.

„Spojnice odpovídajících bodů dvou shodných řad na stejných kružnicích v rovinách rovnoběžných vy-

tvářejí pro $2\omega \gtrless 180^0$ hyperboloid a pro $2\omega = 180^0$ kuželovou plochu 2^0."

*

Sur les courbes et les surfaces engendrées par les droites joignant les couples de points correspondants sur deux courbes en homographie.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur détermine les caractéristiques d'une courbe engendrée de la manière indiquée au titre, les deux courbes en homographie se trouvant dans le même plan. Cas particulier: l'homographie est une congruence. Étude analogue d'une surface gauche engendrée de la même manière, les deux courbes ne se trouvant pas dans le même plan. Cas particulier comme auparavant.