Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Několik poznámek o pectenoidu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 8, 247--253

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122550

Několik poznámek o pectenoidu.

L. Seifert v Brně.

(Došlo 25. listopadu 1933.)

Pod jménem pectenoid nacházíme v literatuře plochu čtvrtého stupně, jíž zabýval se především Ball a pak A. Del Re.[1]) Poslední přichází k ní řešením jistého elementárního problému prostorového, odvozuje rovnici a parametrické vyjádření, podává dále zobrazení na rovinu a konstrukci kuželoseček na ploše, především reálných. V tomto článku chci ukázati, že na této metricky význačné ploše se nalézá soustava prostorových racionálních křivek čtvrtého stupně zvaných Eudoxovy hypopédy, jež vedou k některým zajímavým konstruktivním vztahům, jak podobně v jiném případě plochy čtvrtého stupně ukázal prof. M. Lerch.[2])

I.

Rovnice uvažované plochy jest

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, z^2 - h^2x^2 = 0 \tag{1}$$

a lze ji patrně dostati vyloučením parametru λ^2 z rovnic

$$\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2) = h^2, \quad z^2 - \lambda^2x^2 = 0; \tag{2}$$

první z nich znamená svazek koncentrických koulí, druhá involuci rovin a oba útvary jsou vztaženy na sebe projektivně. Plocha má tři roviny souměrnosti a dvě dvojné přímky: osu OY $(x = z = 0)$ a nevlastní přímku roviny $z = 0$. V rovinách $z = \lambda x$ jsou dle rovnic (2) kružnice, v rovinách $z = \pm k$ jsou hyperboly,

$$x^2 (h^2 - k^2) - k^2y^2 = k^4, \tag{3}$$

pokud $|\, k \,| < h$. Tyto lze velmi snadno sestrojovati a lze jich použíti právě jako oněch kružnic ke konstrukcím obvyklým v deskr. geometrii, jak připomíná také A. Del Re ve vzpomenuté práci.

[1]) Ball: The Theory of Screws, Cambridge 1900; A. Del Re: Sopra una superficie del 4⁰ ordine, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XVII, 1903, p. 129.

[2]) M. Lerch: O dvou plochách stupně čtvrtého, Rozpravy České akademie, tř. II, roč. XXII, č. 36, 1913.

Poznamenejme, že velmi pěkný obrázek dostaneme, omezíme-li část plochy koulí o středu O a poloměru dostatečně velikém (asi $2h$).

Všimněme si vyjádření parametrického:

$$x = \frac{h \cos^2 \Theta \,.\, \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{h \sin \Theta \,.\, \cos \Theta \,.\, \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$
$$z = h \cos \Theta \sin \varphi. \tag{4}$$

Křivky $\Theta = \text{konst.}$ jsou rovinné v rovinách $y/x = \operatorname{tg} \Theta$, křivky $\varphi = \text{konst.}$ jsou, jak snadno patrno, na plochách

$$z^2 = h \cos \varphi \,.\, x, \tag{5}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0, \tag{6}$$
$$x^2 + y^2 - h \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} x = 0, \tag{7}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{\cos \varphi} x = 0. \tag{8}$$

Křivka $\varphi = \text{konst.}$, již budeme značiti H^φ, jest tedy průsek koule (8) s rotačním válcem (7), který se jí dotýká v bodě O. Tyto křivky slují *hypopédy.*

Rovnice tečny křivky H^φ v bodě (Θ, φ) zní:

$$\begin{aligned} X &= \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta - \varrho \sin 2\Theta, \\ Y &= \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \sin \Theta \cos \Theta + \varrho \cos 2\Theta, \\ Z &= h \sin \varphi \cos \Theta - \varrho \operatorname{cotg} \varphi \,.\, \sin \Theta. \end{aligned} \tag{9}$$

Snadno seznáme, že stopa tečny opisuje na $z = 0$ kisoidu

$$(X^2 + Y^2)\, X + \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} Y^2 = 0. \tag{10}$$

Jednoduché konstrukce v obou průmětech vyplývající z rovnic (5)—(9) ponecháváme čtenáři.

Hypopédou H^φ jde svazek ploch druhého stupně

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{\cos \varphi} x\right) - \lambda\,(z^2 - h \cos \varphi\, x) = 0; \tag{11}$$

plochy jsou rotační, střed $\left[\frac{h}{2 \cos \varphi} (1 - \lambda \cos^2 \varphi), 0, 0\right]$ se pohybuje po ose OX, osa zůstává rovnoběžna s OZ. Poloměr rovníku je $a = \frac{h}{2 \cos \varphi} (1 - \lambda \cos^2 \varphi)$, délka poloosy $b = \frac{1 - \lambda \cos^2 \varphi}{2 \cos \varphi\, (1 - \lambda)}$.

Plocha (11) seče pectenoid ještě v jiné křivce čtvrtého stupně. Vyloučením y z (1) a (11) dostáváme

$$z^2 + \frac{h}{\lambda \cos \varphi} x = 0.$$

Vidíme tedy, že křivka je opět hypopéda $H^{\varphi'}$ a srovnáním s rovnicí (5) jde

$$\cos \varphi' = -\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \text{ či } \cos \varphi' \, . \cos \varphi = -\frac{1}{\lambda}, \tag{12}$$

Dospíváme tedy k výsledku, že plochy svazku (11) sekou pectenoid v ostatních hypopédách systému, čili že *každé dvě hypopédy H^{φ}, $H^{\varphi'}$ jsou na ploše rotační.*

Volíme-li $\lambda = -1/\cos^2 \varphi$, pak $\cos \varphi' = \cos \varphi$, obě křivky splynou a plocha se pectenoidu dotýká. *Tedy tento se jeví jako obálka systému ploch rotačních druhého stupně*

$$\cos^2 \varphi \, (x^2 + y^2 + z^2) - 2h \cos \varphi \, . \, x + z^2 = 0. \tag{13}$$

Píšeme-li v rov. (11) $\lambda = -\dfrac{1}{\cos \varphi \cos \varphi'}$, dostaneme tvar symetrický

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cos \varphi \cos \varphi' + z^2 - hx \, (\cos \varphi + \cos \varphi') = 0$$

či

$$A \, (x^2 + y^2 + z^2) + z^2 + Bhx = 0.$$

To je kongruence ploch, z nichž každá obsahuje dvě hypopédy.

Zajímavá je plocha normál pectenoidu podél hypopédy H^{φ}, jež je zároveň plochou normál rotační plochy (13) podél této křivky. Parametrické vyjádření plochy (13) lze psáti

$$x = \frac{h}{\cos \varphi} (1 + \cos \alpha \cos \beta), \quad y = \frac{h}{\cos \varphi} \cos \alpha \sin \beta,$$
$$z = \frac{h}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \sin \alpha. \tag{14}$$

Normála bodu $P\,(\alpha, \beta)$ seče osu plochy v bodě

$$N \left(\frac{h}{\cos \varphi}, \; 0, -\frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \right). \tag{15}$$

Srovnáním (14) a (15) jde $Z_N/z = -1/\cos^2 \varphi$ a tedy, je-li S střed plochy (13), M stopa normály na $z = 0$, pak $SM/P_1M = -1/\cos^2 \varphi$. Poněvadž P_1 opisuje kruh (7), opisuje M také kruh a tedy stopy normál pectenoidu podél hypopédy H^{φ} opisují kružnici. Její rovnici lze snadno nalézti:

$$X^2 + Y^2 - \frac{h}{\cos \varphi} X + \frac{h^2}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} = 0, \tag{16}$$

Rovnice plochy tvořené normálami je poněkud složitá, ale lze ji napsati, uvážíme-li, že podle rovnice (5) podél H^φ platí

$$\sin^2 \alpha = (1 + \cos^2 \varphi)(1 + \cos \alpha \cos \beta).$$

Abychom zodpověděli různé otázky týkající se tečen hypopéd, použijme rovnic (9). Tažme se nejprve po geom. místě těchto tečen podél křivky $\Theta = $ konst. čili podél průseku plochy s rovinou $y/x = \operatorname{tg} \Theta$.

Z rovnic (9) je viděti okamžitě

$$X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta - \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta = 0; \tag{17}$$

průmět tečny má tedy stálý směr a tečna sama je rovnoběžná s rovinou $X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta = 0$. To ostatně je patrno i z toho, že průměty hypopéd jsou kružnice, jež se v O dotýkají osy OY.

Pro průsečík tečny s rovinou $Z = 0$ vychází

$$X = -\frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta,\ Y = \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos^3 \Theta}{\sin \Theta},\ \frac{Y}{X} = -\frac{\cos \Theta}{\sin \Theta}, \tag{18}$$

tedy *tečny hypopéd podél křivky v rovině* $y/x = \operatorname{tg} \Theta$ *protínají pevnou přímku v rovině* $Z = 0$, přímku $y/x = -\operatorname{cotg} \Theta$.

K témuž výsledku přijdeme, utvoříme-li rovnici roviny, jež spojuje tečnu s počátkem O. Dostaneme

$$X \cos \Theta + Y \sin \Theta - 2Z \operatorname{tg} \varphi = 0; \tag{19}$$

tyto roviny tvoří tedy svazek s osou $Z = 0$, $y/x = -\operatorname{cotg} \Theta$.

Z rovnic (17) a (19) jde vyloučením φ rovnice plochy těchto tečen

$$\begin{aligned} 4Z^2 (X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta)^2 [4Z^2 + (X \cos \Theta + Y \sin \Theta)] = \\ = h^4 \cos^4 \Theta \,.\, (X \cos \Theta + Y \sin \Theta)^4 \end{aligned} \tag{20}$$

II.

Všimněme si přímkové plochy tvořené asymptotami hyperbol (3) v rovinách $z = \pm k$. Rovnici její dostaneme, píšeme-li v levé straně rovnice (3) z místo k:

$$z^2 (x^2 + y^2) - h^2 x^2 = 0; \tag{21}$$

má OZ a nevlastní přímku roviny $z = 0$ za dvojnásobné řídicí, OY za dvojnou tvořicí přímku. Mimo to má v nevlastní rovině dvě imaginární přímky tvořicí $x^2 + y^2 = 0$. V rovinách $z = $ konst. jsou páry reálných přímek v mezích $z = \pm h$. Parametrické vyjádření jest

$$x = \varrho \cos^2 \varphi, \quad y = \varrho \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = \pm h \cos \varphi. \tag{22}$$

Různé křivky na ploše lze dostati, klademe-li $\varrho = f(\varphi)$. Speciálně pro $\varrho =$ konstantě dostaneme opět hypopédy, neb $x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi$ a vyloučíme-li φ z této a poslední z rovnic (22), dostaneme rotační kužel

$$x^2 + y^2 - \frac{\varrho^2}{h^2} z^2 = 0;$$

mimo to snadno vidíme, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\varrho^2 + h^2}{\varrho} x,$$

což je rovnice koule. Z obou jde rovnice válce

$$x^2 + y^2 = \varrho x. \tag{23}$$

Půdorysy hypopéd jsou tedy kružnice, jež v O se dotýkají osy OY.

Pro $\varrho = \lambda / \cos \varphi$ dostáváme elipsy v rovinách přímkou OY; jejich půdorysy jsou kruhy

$$x^2 + y^2 = \lambda^2. \tag{24}$$

Výjevy týkající se osvětlení jsou dosti složité vyjma zvláštní polohy bodu. Rovnice první poláry bodu P (x_0, y_0, z_0) jest

$$x_0 x (z^2 - h^2) + y_0 y z^2 + z_0 z (x^2 + y^2) - h^2 x^2 = 0. \tag{25}$$

Zajímavý je případ, je-li P na OY $(x_0 = z_0 = 0)$; pak poslední rovnice přejde v

$$y_0 y z^2 - h^2 x^2 = 0. \tag{26}$$

Vyloučíme-li z této a (21) veličinu z, dostaneme

$$x^2 + y^2 - y_0 y = 0 \tag{27}$$

jako půdorys meze vlastního stínu. Z (26) a (27) jde také

$$z^2 = \frac{h^2}{y_0} (y_0 - y). \tag{28}$$

Tato křivka je tedy průsek válce rotačního (27) a válce parabolického (28) a mimo to jí prochází koule

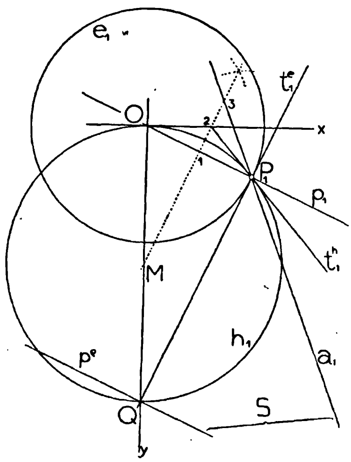
$$x^2 + \left(y - \frac{y_0^2 - h^2}{2y_0}\right)^2 + z^2 = \frac{(y_0^2 + h^2)^2}{4y_0^2}. \tag{29}$$

Půdorys meze je kruh dotýkající se osy OX, průmět do (yz) je parabola. Z rovnic (27) a (28) jde také

$$x^2 + (y - y_0)^2 = \frac{z^2}{h^2} y_0^2, \tag{30}$$

což je rovnice rotačního kuželu. Uvažovaná křivka je tedy opět hypopéda. V parametrickém vyjádření (22) odpovídají tyto křivky hodnotě $\varrho = k \operatorname{tg} \varphi$.

Podle známého teorému Koenigsova tvoří rovinné průseky osou OY a dotyčné křivky kuželů s vrcholy na této ose dva systémy sdružených čar na ploše. Průseky s rovinami $z/x = k$ promítnou se do (xy) jako soustředné kruhy $x^2 + y^2 - h^2/k^2 = 0$. Z toho vyplývají jednoduché a zajímavé konstrukce.



Buď P_1 půdorys bodu na ploše, e_1 půdorys elipsy v rovině (OPY), h_1 půdorys hypopédy řady posledně uvažované. Pak t_1^e, t_1^h jsou půdorysy dvou sdružených tečen bodu P. p_1 je obraz přímky plochy, obraz a_1 druhé hlavní tečny bodu P odděluje s p_1 harmonicky t_1^e, t_1^h. Dostaneme ji tedy snadno, učiníme-li, jak z obrazu patrno, $\overline{23} = \overline{12}$. Tečná rovina bodu P je určena přímkou p a tečnou t^e, jejíž stopa Q je na OY. Bodem Q jde tedy stopa tečné roviny p^ϱ rovnoběžně s p_1. Na ní leží stopa S hlavní tečny a. Z obrázku je snadno patrno:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\overline{13}}{\overline{1P_1}} = 2 \cdot \frac{\overline{12}}{\overline{OP_1}} = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

a odtud souřadnice bodu S

$$x_s = \frac{\varrho}{2} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad y_s = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{2 + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi},$$

kde ϱ značí délku OP_1. Odtud lze snadno napsati rovnice hlavní tečny.

Z uvedené konstrukce hlavní tečny lze také sledovati průběh asymptotických křivek v půdorysu, což ponecháváme čtenáři.

Příslušnou diferenciální rovnici těchto čar lze v uzavřeném tvaru integrovati. Půdorysy jsou čáry transcendentní a nemají asi další zajímavosti.

*

Quelques remarques sur le pectenoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

On appele pectenoïde la surface du quatrième degré dont l'équation peut s'écrire sous la forme (1). Elle a été étudiée par Ball et A. del Re (l. c.); celui-ci a trouvé surtout les droites et les coniques de la surface. Je montre, dans cet article, qu'il y a sur la surface une famille d'hippopèdes, données, dans l'expression paramétrique (4), par $\varphi = C^{te}$. Chacune d'elle est base d'un faisceau de quadriques (11) et en même temps elle est la caractéristique de la famille (13) de quadriques (φ étant variable). Le pectenoïde est donc l'enveloppe de la famille en question. Les traces des normales de la surface le long d'une telle hippopède remplissent un cercle; les tangentes des différentes hippopèdes le long de la courbe $y/x = \operatorname{tg} \Theta$ sont incidentes avec la droite $z = 0$, $y/x = -\operatorname{cotg} \Theta$.

Les asymptotes des hyperboles situées dans un plan $z = k$ engendrent une surface reglée (21) qui contient encore deux familles de hippopèdes dont les projections sur $z = 0$ sont données par les équations (23) et (27). La famille possédant la projection (27) et des courbes $z/x = k$ qui se projettent suivant les cercles concentriques, forment deux systèmes conjugués. Donc, on peut trouver une construction bien simple de la tangente asymptotique en un point général de la surface reglée en question.