O mathematické a morální naději.

Sepsal

Augustin Pánek.

Část II.

O naději moralní.

§. 7.

Věty, které podává mathematická čili objektivní naděje, určují očekávání nehledě ku poměrům osob, kteréž se podnikům věnují; při podnicích těchto, z nichž arci buď zisk nebo ztráta vyplývá, přijímá za podmínku, pak jsme již seznali, aby beze všeho důvodu žádná strana větší výhody neměla. Ačkoliv podmínky jistých podniků vůbec nebo vzhledem k zevnějším okolnostem tytéž jsou, přece mohou dle osobních (subjektivních) poměrů rozdílnými býti. Osoba, značným majetkem vládnoucí, snadněji vynaloží na podnik nějaký větší sumu než osoba, která menšími prostředky vládne. Mathematická naděje ve zdar podniku jest pro jednu i pro druhou osobu táž. Jinak jest však, berou-li se v uvážení subjektivní poměry. Má-li na př. někdo 1000 zl., oželí snadněji ztrátu 10 zl. než ten, jenž vládne pouze 100 zl. Jiného významu, jiné *důležitosti* čili jiné *moralní hodnoty* má 10 zl. pro toho, jenž vládne 100 zl. než pro onoho, jenž má 1000 zl. svého jmění. Rovněž i jiný význam má očekávaný zisk 10 zl. pro vlastníka 100 zl., nežli pro vlastníka 1000 zl.

Tímto způsobem zjednali jsme si pojem subjektivního významu sumy očekávané.

Tento pojem nazval *Laplace* *) *„fortune morale, espérance morale“* naproti *„fortune physique“*, *Daniel Bernouilli* pak *„mensura sortis“* a *Grunert* **) *„erwartetes, moralisches Vermögen“*, ač se též může nazvati *„subjektivní naději.“*

Nazveme-li vůbec jmění J, zisk nebo ztrátu α, lze důležitost hodnoty α co ztrátu vyjádřiti poměrem.

---

*) Theorie analytique des Probabilités. Chap. X pag. 432. De l' espérance morale.

**) Viz *Klügel*, Mathematisches Wörterbuch. 5. Th., 2. Bd. Leipzig, 1831.

$$Z = \frac{a}{J - a}, \qquad (1)$$

načež důležitost hodnoty ziskem rozmnoženého majetku bude

$$V = \frac{a}{J + a}; \qquad (2)$$

rozdíl pak ztráty a zisku

$$Z - V = \frac{2a^2}{J^2 - a^2}. \qquad (3)$$

Někdo má, dejme tomu, jmění 500 zl. Utrpí-li ztrátu 100 zl., zbudou mu 400 zl. a 100 zl. představuje nyní $^1/_4$ jeho majetku; získá-li však 100 zl., bude míti 600 zl. jmění a pak bude 100 zl. představovati $^1/_6$ jeho majetku, tedy měří $^1/_{12}$ v tomto případu rozdíl ztráty a zisku.

Z toho patrno, že jest ukládajícímu peníze na zisk nebo ztrátu opatrnosti třeba; platiť zde věta: *zisk určité velikosti má pro tutéž osobu menší důležitost nežli ztráta stejné velikosti.*

Srovnáme-li hodnoty, které táž část peněz jakožto zisk nebo ztráta pro osoby různého jmění má, obdržíme úměry,

$$V_1 : V_2 = \frac{a}{J_1 + a} : \frac{a}{J_2 + a} = (J_2 + a) : (J_1 + a), \qquad (4)$$

$$Z_1 : Z_2 = \frac{a}{J_1 - a} : \frac{a}{J_2 - a} = (J_2 - a) : (J_1 - a), \qquad (5)$$

t. j. význam téže sumy co $\left\{\begin{matrix}\textit{zisku}\\ \textit{ztráty}\end{matrix}\right\}$ *pro osoby různého jmění jest v obráceném poměru k majetku* $\left\{\begin{matrix}\textit{ziskem}\\ \textit{ztrátou}\end{matrix}\right\}$ zmenšenému.

Pro zámožného má proto zisk nebo ztráta téže sumy význam menší, nežli pro méně zámožného. Z toho lze vysvětliti, že se stejně zámožné osoby spolčují k dosažení jistého účelu, neboť pro ně má zisk nebo ztráta týž význam.

Chceme-li vyhledati velikost ztráty, zvanou x, která má rovnou důležitost se ziskem, položme dle vzorce (1) a (2)

$$\frac{x}{J - x} = \frac{a}{J + a}, \qquad (6)$$

z čehož pak se snadným řešením obdrží

$$x = \frac{J\alpha}{J + 2\alpha} \text{ *)}. \tag{7}$$

Podobně bude, pojmenujeme-li zisk y, který má rovnou důležitost se ztrátou,

$$\frac{\alpha}{J - \alpha} = \frac{y}{J + y}, \tag{8}$$

z čehož pak plyne

$$y = \frac{J\alpha}{J - 2\alpha}. \tag{9}$$

Tento vývoj lze též takto pojmouti: Značí-li J jmění a α hodnotu zisku nebo ztráty jakési osoby, pak jest naděje vzhledem k velikosti ztráty

$$Z = \frac{\alpha}{J}, \tag{10}$$

a vzhledem k očekávanému zisku

$$V = \frac{\alpha}{J + \alpha}. \tag{11}$$

Má-li tedy někdo 500 zl. jmění, pak má ztráta 100 zl. důležitost $^1/_5$ a zisk téže sumy $^1/_6$.

Porovnáme-li zisk a ztrátu, platí srovnalost

$$Z : V = \frac{\alpha}{J} : \frac{\alpha}{J + \alpha} = 1 : \frac{J}{J + \alpha}. \tag{12}$$

Prohrává-li hráč a snaží-li se setrváním ve hře ztráty zpět vydobýti, jedná nepředloženě, neboť naděje ve výhru čím dále tím více mizí. Abychom blíže naznačili hodnotu naděje při n-násobné ztrátě sumy a, srovnáme zisk a ztrátu dle (1) a (2), načež bude

$$Z : V = \frac{\alpha}{J - n\alpha} : \frac{\alpha}{J + (n+1)\alpha} \tag{13}$$

a rozdíl zisku a ztráty

$$Z - V = \frac{(1 + 2n)\alpha^2}{(J - n\alpha)[J + (n + 1)\alpha]}. \tag{14}$$

Opakuje-li se však ztráta a zisk n krát po sobě, jest dle (13) konečně

*) **Tuto hodnotu uvádí *Buffon* ve svém „Essais d'arithmétique morale"; týž byl prvním, který tento počet naznačil.**

$$x = \frac{J}{J + (2n+1)\alpha}, \tag{15}$$

$$y = \frac{J}{J - (2n+1)\alpha}. \tag{16}$$

§. 8.

Pokládáme-li podlé *Daniela Bernouilliho**) veličinu α za velmi malou vzhledem k J, pak se zisk a ztráta k sobě blíží.

Budíž jmění, které se nepřetržitě mění, $J + x$, pak jest proměna v majetku vzhledem k zisku

$$dV = \frac{dx}{J + x},$$

a tedy důležitost všech přírůstků zisku

$$V = \int \frac{dx}{J + x} = l\,(J + x) + C.$$

značí-li C stalou integrační.

Pro prvopočátečný stav $V = 0$, jest též $x = 0$, takže

$$V = l\,(J + x) - l\,J = l\,\frac{J + x}{J}, \tag{1}$$

t. j. míra důležitosti majetku x k rozmnožení J.

Podobně vyjádří se proměna v majetku vzhledem ke ztrátě

$$dZ = \frac{dx}{J - x},$$

a tedy důležitost všech ztrát

$$Z = \int \frac{dx}{J - x} = C - l\,(J - x);$$

když $Z = 0$, jest též $x = 0$, tedy $C = l\,J$, takže

$$Z = -l\,(J - x) + l\,J = \frac{J}{J - x}. \tag{2}$$

Má-li se určiti ztráta, jejíž důležitost rovná se zisku α, pak jest dle (1) a (2)

$$l\,\frac{J + \alpha}{J} = l\,\frac{J}{J - x},$$

z kteréž rovnice se řešením obdrží

*) Commentarii Acad. Petrop., T. 5. Specimen theoriae novae de mensura sortis.

$$x = \frac{J\alpha}{J+\alpha}.\text{*)} \tag{3}$$

Podobně zisk, který pro určitou ztrátu při určitém majetku rovnou důležitost má, jest opět dle (1) a (2)

$$l\frac{J+y}{J} = l\frac{J}{J-\alpha},$$

a tedy

$$y = \frac{J\alpha}{J-\alpha}. \tag{4}$$

Položíme-li ve vzorci (15) a (16) §. 7., $n = 0$, obdržíme tytéž hodnoty.

O užití vzorce (1) dí *Bernoulli*: Jen o člověku právě hladem umírajícím říci dlužno ve smyslu moralním, že *ničím* nevládne, že jmění jeho jest rovno nulle. Člověk, jemuž žebrota ročně 10 zl. vynáší, ani 50 zl. nepřijme s výminkou, by žebroty se odřekna jiným spůsobem výživu svou vyhledával.

Třeba by obyčejně se říkalo, že ten nemá praničeho, jiný ještě méně nežli nic, přece osoby takové postavení své jinak si cení. Pročež musíme řečenému J určitou hodnotu jmění jejich značící přiřknouti, které nikdy nulle se nerovná. Vůbec při počtu tomto necení se jmění něčí pouze dle majetku, jímž okamžitě vládne, nýbrž dle *všech* prostředků výživy jeho, jakož i dle toho, jak užívá své síly a schopnosti a všech jiných výhod, kterých mu život poskytuje.

Je-li naděje příznivá, že se původní jmění nějaké osoby o veličinu α_1 zvětší, a nazveme-li p_1 pravděpodobnost, že se tento případ stane, jest podle (1)

$$R_1 = p_1\, l\frac{J+\alpha}{J}, \tag{5}$$

což znamená *moralní naději ve výhru,* kdežto dle vzorce (2) §. 1. byla mathematická naděje $p_1\,\alpha_1$. Zmenší-li se však původní jmění o veličinu α_2 a nazveme-li příslušnou pravděpodobnost p_2, bude naopak podle (2)

$$S = p_2\, l\frac{J}{J-\alpha_2}. \tag{6}$$

*) *Buffon* uvádí hodnotu tak, jak jest ve vzorci (7) §. 7. naznačena a kteráž jest tedy menší než tato.

Jeden z těchto případů jistě nastane a proto jest hodnota moralní naděje

$$N = p_1 \, l \, \frac{J + \alpha_1}{J} + p_2 \, l \, \frac{J}{J - \alpha_2}, \tag{7}$$

při čemž

$$p_1 + p_2 = 1.*)$$

Podlé toho, mnoho-li může osoba ze svého jmění na jistý případ věnovati, cení *Daniel Bernouilli* **) relativní důležitost přírůstku α_1 k původnímu jmění J dle vzorce (5).

Možná-li vůbec nadíti se výher $a, b, c, \ldots$ s příslušnými pravděpodobnostmi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, jest dle (5) naděje moralní ve výhru celou

$$R = \alpha \, l \, \frac{J + a}{J} + \beta \, l \, \frac{J + b}{J} + \gamma \, l \, \frac{J + c}{J} + \ldots$$

anebo poněvadž platí, jak známo,

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 1,$$

$$R = l \, [(J + a)^\alpha \, (J + b)^\beta \, (J + g)^\gamma \ldots] - l J, \tag{8}$$

Důležitost čili moralní hodnota majetku, zvaného Ψ, pro osobu, jejíž původní jmění bylo J, (t. j. má-li jmění J vzrůsti k hodnotě Ψ), jest též moralní naděje

$$R = \int_J^\Psi \frac{dx}{x} = l \, \frac{\Psi}{J}, \tag{9}$$

při čemž dle výroku *Bernouilliho* nikdy J nulle se nerovná.

---

*) *Oettinger* vyvodil v *Crell-ově* časopisu svaz. 36. jakož i dříve ve svém spise „Anleitung zu finanziellen, politischen nnd jurdischen Rechnungen, Braunschweig 1845", hodnotu moralní naděje, kteráž není však správná, poněvadž souvisí se vzorcem (2), kterýžto vzorec *Oettinger* uvedl ve tvaru jak zřejmo nespravném, an píše totiž

$$Z = l \, \frac{J - x}{J}.$$

Hodnotu moralní naděje uvádí pak důsledně ve tvaru

$$N = p_1 \, l \, \frac{J + \alpha_1}{J} + p_2 \, l \, \frac{J - \alpha_2}{J}$$

kterýžto vzorec i na dále u výpočtu ponechává.

Tvrdí-li *Oettinger*, že jeho vzorec pro Z jest správný, pak jsou naše vzorce (3) a (4) chybné, což ale odporuje samému podání *Oettingerovu*, který tyto vzorce před výpočtem hodnot pro Z a V předpokládá.

**) Commentaria Academiae Petropolitanae, T. V. p. 175—176.

Srovnáním vzorců (8) a (9) obdržíme pak

$$\Psi = (J + a)^{\alpha} (J + b)^{\beta} (J + c)^{\gamma} \ldots, \tag{10}$$

kteréžto Ψ obsahuje hodnotu J a sumu očekávanou, jež sluje *výhodou morální.*

Hledáme-li hodnotu *očekávaného moralního jmění* čili dle *Laplace moralní naději,* která se rovná $\Psi - J$, obdržíme dle (10)

$$(J + a)^{\alpha} (J + b)^{\beta} (J + c)^{\gamma} \ldots - J. \tag{11}$$

Vyvineme-li tento výraz dle mocniny J v řadu, a ponecháme-li pouze členy, ve kterých sumy a, b, c, ... se vyskytují v první mocnině, obdrží vzorec (11) tvar

$$J^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} + J^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots-1} \cdot \{\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots\} - J \tag{12}$$

anebo pomocí známé podmínky

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 1,$$

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots, \tag{12'}$$

to jest *moralní naděje rovná se naději mathematické, když jsou sumy, jež po případě vyhráti lze, velmi malé proti původnímu jmění J.*

Moralní hodnota jmění Ψ jest dle vzorce (9) tím menší, čím větší jsou přírůstky, což také souhlasí s obyčejným úsudkem; neboť přičítá se tomu jmění, které se namáháním, vlastní pílí a znenáhla nabylo, větší cena než onomu, které snadně a najednou získáno bylo — „jak nabyl, tak pozbyl“ praví naše přísloví. —

Větu v §. 7. vytknutou, že suma α pro tutéž osobu jakožto zisk má menší důležitost nežli ztráta, dotvrdíme snadno, porovnáme-li vzorce (1) a (2); neboť jest patrně

$$l\,\frac{J+\alpha}{J} < l\,\frac{J}{J-\alpha}$$

a tedy i

$$\frac{J+\alpha}{J} < \frac{J}{J-\alpha}. \tag{13}$$

Z téhož vzorce plyne, že se jmění osoby hrou zhorší, ačkoliv jest pravděpodobnost, že sumu α vyhraje, tak velká jako že ji prohraje, jelikož se jmění osoby tím značněji zhorší, čím menší jest původně nebo přede hrou.

Totéž má platnost všeobecnou, když i výhra a ztráta mají nerovné pravděpodobnosti, kteréž jsou dle naděje mathematické v poměru přímém k sázkám.

Značí-li opět J jmění osoby přede hrou a p pravděpodobnost, že se vyhraje, s sázku, a má-li býti hra vůbec ve shodě, musí sázka druhého hráče býti dle §. 3.,

$$\frac{1-p}{p}\, s = \frac{q}{p}\, s.$$

Vyhraje-li první osoba, jest její jmění

$$J + \frac{q}{p} s,$$

a prohraje-li, což se stane s pravděpodobností $1 - p = q$, má jmění

$$J - s.$$

Nazveme-li opět jmění prvé osoby vzhledem k očekávání Ψ, jest

$$\Psi = \left(J + \frac{q}{p} s \right)^p (J - s)^q.$$

Má-li se tato moralní naděje rovnati naději pro ten případ, že se vůbec nehraje, kde tedy *moralní výhoda* rovná se nulle, pak by bylo

$$J = \left(J + \frac{q}{p} s \right)^p (J - s)^q. \qquad (14)$$

Pro $s = 0$ rovná se výraz na pravé straně J a differencialní poměr téhož výrazu dle s jest patrně vždy záporný čili menší nully.

Vzrůstajícím s zmenšuje se tedy týž výraz a proto platí nerovnost

$$\Psi < J,$$

což znamená, že hráč jest vzhledem k moralní naději vždy ve škodě u porovnání s tak zvaným bankérem, shodnou hru ovšem předpokládaje.

Je-li na př. fysické jmění osoby 100 zl., a má-li 50 zl. buď vyhrati nebo prohrati při pravděpodobnosti $^1/_2$, tu máme*)

$$J = 100,\ a = 50,\ b = -50,\ \alpha = \beta = {}^1/_2,$$

a tedy dle (11) moralní naděje

*) Srovnej „*Liagre*, Calcul des Probabilités Bruxelles, 1852 pag. 90.“

$$\Psi - J = (100 + 50)^{\frac{1}{2}} (100 - 50)^{\frac{1}{2}} - 100$$
$$= \sqrt{7500} - 100 = 86{\cdot}60 - 100 = -13{\cdot}4.$$

§. 9.

Poněvadž každá hra, když jest i mathematicky shodna, ve smyslu moralním spojena jest se zhoršením jmění osoby, namítá se nám otázka: jak velká musí býti sázka s aby jmění J osoby nějaké u porovnání s touto sázkou mohlo býti považováno za nezměněné?

Vyvineme-li pravou stranu ve vzorci (6) §. 8. v řadu, obdržíme

$$J - \frac{q}{2qJ} s^2 + \ldots, \tag{1}$$

a má-li býti hra pro onu osobu neškodna, musí se tato řada od J jen o malo lišiti, takže sbližně má býti

$$\frac{q}{2pJ} s^2 = \frac{J}{n}, \tag{2}$$

při čemž n může býti 100, 1000, 10000, ..., a tudíž sázka s, která jmění osoby o málo změnila

$$s = J\sqrt{\frac{2p}{nq}}. \tag{3}$$

Pravděpodobnost p, že by mohla osoba nějaká věnovati na hru jmění J zmenšené o nepatrný díl $\frac{J}{n}$ lze ustanoviti ze vzorce (6) §. 8.

Tu třeba v témže vzorci položiti jen $\left(1 - \frac{1}{n} J\right)$ místo s, takže obdrží pravá strana tvar

$$J\left[1 + \frac{q}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}. \tag{4}$$

Má-li tedy hra býti neškodnou, smí zmenšení jmění obnášeti $\frac{J}{n}$, kteroužto hodnotu možno vynechati, a pak nabývá poslední výraz podoby

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) J, \tag{5}$$

a tedy konečně

$$\left[1+\frac{q}{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p\frac{1}{n^q}=1-\frac{1}{n}, \tag{6}$$

z kteréžto rovnice se ustanoví p.

Položíme-li dle *Poisson-a* $n = 10000$, jest

$$p=\frac{82303}{82304},\ q=1-p=\frac{1}{82304}.$$

Když tedy v 82304 případech jediný jest nepříznivý, pak smí se dle (5) na hru vsaditi celé jmění zmenšené o sumu, kterou lze vynechati, neboť $\frac{82303}{82304}$ značí jaksi *moralní jistotu* a $\frac{1}{82304}$ *moralní nejistotu*, předpokládáme-li $n = 10000$.

Zdaž jest výhodnější k jednotlivému podniku věnovati jistou sumu S, kterouž v příznivém případě pravděpodobností p_1 získati a v nepříznivém pravděpodobností p_2 ztratiti můžeme, nebo na několik na sobě nezávislých podniků téhož druhu za stejných podmínek rozděliti?

Je-li jednotlivých podniků n a nazveme-li x sumu, kterou na jeden z těchto podniků vynaložíme, pak jest $S = nx$.

Srovnejme nyní moralní naději pro oba vytčené případy.

Vsadíme-li sumu S najednou, jest moralní naděje vzhledem J podle předcházejícího §.

$$N_1 = p_1\int\frac{dx}{J+nx}. \tag{7}$$

Rozdělíme-li však sumu S na n částí, mohou býti buď všechny výhry příznivé, nebo $(n-1)$, nebo $(n-2), \ldots,$ nebo 2, anebo 1, a moralní naděje pro jednotlivé případy jest tedy postupně

$$m_1 = p_1^n \int\frac{dx}{J+nx},$$

$$m_2 = \binom{n}{1} p_1^{n-1}p_2\int\frac{dx}{J+(n-1)x},$$

$$m_3 = \binom{m}{2} p_1^{n-2}p_2^2\int\frac{d}{J+(n-2)x},$$

$$\vdots$$

$$m^n = \binom{n}{n-1} p_1 p_2^{n-1}\int\frac{dx}{J+x}.$$

Moralní naděje pro všechny případy dohromady bude pak

$$N_2 = \sum_{n=1}^{n} m_n$$

$$= p_1 \int \frac{dx}{J + nx}\left[p_1^{n-1} + \binom{n}{1} p_1^{n-2} p_2 \frac{J + nx}{J + (n-1)x}\right.$$

$$\left. + \binom{n}{2} p_1^{n-3} p_2^{2} \frac{J + nx}{J + (n-2)x} + \ldots + \binom{n}{1} p_2^{n-1} \frac{J + nx}{J + x}\right]. \quad (8)$$

Součet této řady v závorkách jest patrně > 1, a proto platí $N_2 > N_1$ a sice jest N_2 tím větší, čím větší n.

Z toho poznáváme, *že není rádno svého jmění najednou k jakémusi podniku užiti, nýbrž znenáhla nebo stejnou dobou na rozličné spůsoby.*

Slavný *Laplace* v uvedeném již díle dokazuje příkladem, že jest obchodníku moralně výhodnější, očekává-li své zboží na několika lodích nežli na jedné a že tedy výhoda moralní zvětšuje se počtem lodí.*)

§. 10.

Z pojmu moralní naděje dá se též vyvoditi, že jest moralně výhodné na sumu s se *pojistiti,* kterou s pravděpodobností p očekáváme.

Očekává-li obchodník, vládnoucí jměním J, zboží v ceně s, které přes moře na lodích na patřičné místo má dojíti s pravděpodobností p, jest hodnota jeho jmění, nepojistí-li sumu s,

$$(J + s)^p; \quad (1)$$

pojistí-li se však, platí pojišťovacímu ústavu $(1 - p)s$, čímž sumu s má *jistou,* takže nyní celé jeho jmění činí

$$J - s - (1 - p)s = J + sp. \quad (2)$$

Poněvadž naděje mathematická obchodníka jest sp, a moralní dle (11) §. 8.

$$(J + s)^p - J,$$

a poněvadž $p < 1$, dále

$$\int \frac{p\,ds}{J + s} < \int \frac{p\,ds}{J + ps}$$

anebo

*) Tento úkol viz též „*Hoffmann*, Mathematisches Wörterbuch Bd. 7. Berlin, 1867. Pag. 361“.

$$p\,l\,(J+s) < l\,(J+ps),$$

a konečně

$$(J+s)^p < J+ps,\text{*)} \tag{3}$$

proto jest výraz (1) menší než (2), t. j. pro obchodníka jest *očekávané moralní jmění větší*, pojistí-li se na sumu s, nežli když se nepojistí, předpokládáme-li, že pojistné obnáší pouze $(1-p)\,s$. V tomto případě jest pojištění velmi výhodné.

Pojišťovací ústav vzhledem *ke správním výlohám* při pojištění sumy s přijímá více než $(1-p)\,s$, takže toto pojistné nutno nahraditi veličinou

$$(1-p)\,s+v, \tag{4}$$

kdež přirážka v může nanejvýš tak velká býti, aby

$$(J+s)^p = J+ps-v,$$

takže přirážka tato pak jest

$$v = J+ps-(J+s)^p, \tag{5}$$

což zároveň značí meze, kdež přestává pojištění býti výhodným.

Platí-li tedy obchodník méně než $(1-p)\,s+v$, jest pojištění pro něj výhodné. Z toho plyne též, *že pojišťovací ústavy zjednají pojištěnci moralní výhodu a sobě zároveň určitý výdělek.*

Užijmež nyní principu moralní naděje na *„Petrohradský problem.“* **)

Nazveme-li opět J jmění osoby B přede hrou, S sumu, kterou na počátku hry vsadí, jest jmění osoby B, když při 1., 2., 3., ... n-tém vrhu padne písmo postupně

$$(J-S+2),\ (J-S+2^2),\ (J-S+2^3),\ \ldots,\ (J-S+2^n)$$

s příslušnými pravděpodobnostmi

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n}.$$

Nepadne-li ale písmo v žádném z n vrhů, jest pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$ a majetek osoby B rovná se $J-S$.

Má-li se osoba B ve hře súčastniti, jest očekávané moralní jmění její dle (10) §. 9.

---

*) Ze vzorce (3) jde

$$(J+s)^p - J < ps,$$

t. j. moralní naděje obchodníka jest menší než jeho mathematická naděje.

**) Viz §. 2. případ III.

$$(J-S+2)^{\frac{1}{2}}(J-S+2^2)^{\frac{1}{2^2}}(J-S+2^3)^{\frac{1}{2^3}}\dots$$
$$(J-S+2^n)^{\frac{1}{2^n}}(J-S)^{\frac{1}{2^n}} \tag{6}$$

Je-li

$$J-S=J', \tag{7}$$

bude

$$J=(J'+2)^{\frac{1}{2}}.(J'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}.(J'+2^3)^{\frac{1}{2^3}}\dots$$
$$(J'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}J'^{\frac{1}{2^n}}, \tag{8}$$

kdež se klade podmínka, že se poměry peněžné osoby B nezmění, svolí-li ke hře.

Položíme-li dle *Laplace* $\frac{1}{J'}=\varepsilon$, přejde vzorec (8) vzhledem k rovnici (7) ve tvar

$$\frac{1}{\varepsilon}+S=\left(\frac{1}{\varepsilon}+2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{1}{\varepsilon}+2^2\right)^{\frac{1}{2^2}}.\left(\frac{1}{\varepsilon}+2^3\right)^{\frac{1}{2^3}}\dots$$
$$\left(\frac{1}{\varepsilon}+2^n\right)^{\frac{1}{2^n}}.\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2^n}}. \tag{9}$$

Ale poněvadž

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}=1,$$

obdržíme ze vzorce (9),

$$1+\varepsilon S=(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.(1+2^2\varepsilon)^{\frac{1}{2^2}}.(1+2^3\varepsilon)^{\frac{1}{2^3}}\dots$$
$$(1+2^n\varepsilon)^{\frac{1}{2^n}}. \tag{10}$$

Činitelé v rovnici (5) na pravé straně neustále se zmenšují a konvergují k jednotce; neboť povýšíme-li nerovnost

$$(1+2^m\alpha)^{\frac{1}{2^m}}>(1+2^{m+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{m+1}}}$$

na 2^{m+1} mocnost, obdržíme zcela správně, že

$$1+2^{m+1}\alpha+2^{2m}\alpha^2>1+2^{m+1}\alpha,$$

a dále, že logarithmus

$$l\left[(1+2^m\alpha)^{\frac{1}{2^m}}\right]=l\left[\left(\frac{1}{2^m}+\alpha\right)\frac{1}{2^m}\right]^{\frac{1}{2^m}}$$
$$=\frac{m\,l\,2}{2^m}+\frac{1}{2^m}\,l\left(\alpha+\frac{1}{2^m}\right),$$

kterýž pro $m = \infty$ přejde v nullu, a tudíž

$$(1 + 2^m \alpha)^{\frac{1}{2^m}} = 1.$$

Jest-li v rovnici (10) $n = \infty$, takže hra jde do nekonečna, jest tento případ pro osobu B nejpříznivější.

Pro dané ε dá se snadně logarithmickým spůsobem S určiti, zvolíme-li dostatečný počet činitelů.

Pro $J' = 100$ zl., tedy $\varepsilon = 0{\cdot}01$, vypočítal *Laplace* *) $J = 107{\cdot}89$ zl., proto $S = 7{\cdot}89$ zl., t. j. když jmění osoby B na začátku hry obnáší 107·89 zl., vsadí s rozvahou na tuto hru jen 7·89 zl., kterážto suma dle mathematické naděje byla nekonečnou.**)

O souvislosti kriterií konvergence nekonečných řad.†)

Napsal

Dr. K. **Zahradník** v Záhřebě.

1. Dříve než upotřebíme řady nekonečné, musíme se přesvědčiti o její konvergenci; nebo divergentním řadám nepřísluší určitá hodnota a tím se samy vylučují od upotřebení.

Tím je patrná vážnost a důležitost, jaká znakům o konvergenci a divergenci nekonečných řad rozhodujícím v analysi připadá. Právě tato jejich důležitost měla za následek, že nyní celou řadou takových kriterií vládneme, které odpovídají jednotlivým tvarům řad nekonečných.

Účelem tohoto pojednání je, vyložiti vnitřní souvislost těchto znaků.

2. Známo, že řada nekonečná

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots$$

konverguje, když od určitého místa počínaje, jest

---

*) Théorie analitique des probabilités. pag. 441. Paris, 1820.

**) Srovnej §. 2. případ III.

†) Uveřejněno v „Radu jugoslovenské akademije“ kniha 40. v Záhřebu.