Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Kolářík

List Descartův. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 7 (1878), No. 2, 113--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122531

Kořen jest tudíž racionalní; druhý jest

$$-(88888-65432)=-23456.$$

Př. 3. $$x^2+5555x=-7405926$$

$$-7405926 : (5555+x)=-3333$$

$$\begin{array}{rl}
\underline{+7665000} & \genfrac{}{}{0pt}{}{3000}{\overline{2555}} \\
\hline
259074 : & \genfrac{}{}{0pt}{}{6000}{\underline{5551}} \\
1335 & 445 \\
9 & 3 \\
\hline
3557 & : 1045 \\
3225 & 3 \\
\hline
3324 & : 1105 \\
3324 & 3 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Druhý kořen jest $-(5555-3333)=-2222$.

Mohou se tedy kořeny rovnic druhého stupně vypočítati úkonem, který se úplně podobá odmocňování čísel. A podobně možná určiti realní kořeny rovnic stupně třetího, o čemž později.

List Descartův.

Podává

August Kolářík.

V theorii křivek vyšších stupňů, jak ji moderní analytická i synthetická theorie zbudovala, mají zvláštní důležitost křivky racionální čili unicursální. Jsou to ony křivky, jichž bodů souřadnice x, y dají vyjadřiti co racionální funkce jediné proměnné (parametr).

Tak na př. dvě rovnice

$$x=a+\alpha u$$
$$y=b+\beta u$$

vyjadřují nejjednodušší křivku racionální — přímku. Neboť vyloučením parametru u jde z rovnic těch

$$\begin{vmatrix} \alpha, & a-x \\ \beta, & b-y \end{vmatrix}=0.$$

Pro racionálné křivky třetího stupně jest obecný tvar funkcí (f_1 a f_2) tento

$$x = \frac{a_1 u^3 + b_1 u^2 + c_1 u + d_1}{a u^3 + b u^2 + c u + d}, \quad y = \frac{a_2 u^3 + b_2 u^2 + c_2 u + d_2}{a u^3 + b u^2 + c u + d},$$

na základě kterýchž rovnic prof. Dr. Weyr v III. ročníku „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ obšírně o racionálných křivkách třetího stupně pojednává a vlastnosti jich obecné vyvinuje.

Z obecných těchto vlastností nejdůležitější jest ona,*) že „každá racionálná křivka 3. stupně má bod dvojný“, na základě které chceme vyvinouti rovnici křivek takových v soustavě Descartesově.

Obecná rovnice křivek 3. stupně jest

$$F(x, y) \equiv Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0, \qquad (1)$$

z níž patrno, že křivka stupně 3. určena jest 9ti body, poněvadž rovnice (1) obsahuje 9 neodvislých koefficientů.

Podmínka, by počátek soustavy souřadnic byl bod dvojný, jest

$$K = 0, \quad /^0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad /^0 \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{**)}$$

čili

$$/^0\, 3Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + Fy + H = 0$$
$$/^0\, Bx^2 + 2Cxy + 3Dy^2 + Fx + 2Gy + J = 0,$$

z čehož jde

$$J = 0, \quad H = 0.$$

Dle toho jest rovnice křivky třetího stupně, která v počátku souřadnic má bod dvojný,

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^2 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 = 0,$$

která se ještě zjednoduší, položíme-li podmínku, aby osy X a Y byly zároveň tečnami v bodu dvojném.

Abychom totiž obdrželi průsek osy X s křivkou, položme $y = 0$, tu pak

$$Ax^3 + Ex^2 = 0 \text{ čili } x^2(Ax + E) = 0.$$

*) Viz Časopis ročník III. str. 29.

**) Studnička, Základ. vyšší math. str. 181, díl I.

Rovnice tato má tři kořeny, totiž 0 a 0 (bod dvojný) a $-\frac{E}{A}$. Má-li i tento třetí býti roveň nulle, musí $E = 0$ a jelikož i osa Y má býti též tečnou ku křivce, tu podobně $G = 0$. Za těchto podmínek jest rovnice racionálné křivky třetího stupně

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Fxy = 0. \qquad (3)$$

Onen zvláštní druh, při němž $A = D$, $B = C = 0$, slove pak listem Descartovým a lze tedy rovnici jeho psáti ve tvaru

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0\,^{*)} \qquad (4)$$

§. 2. **Rozličné tvary rovnice listu Cartesiova.**

Rovnice (4) lze užíti k stanovení rovnice polárné této křivky. Položíme-li totiž $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, obdržíme

$$r^3 (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) - 3a r^2 \cos\varphi \sin\varphi = 0$$

čili

$$r = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \qquad (5)$$

Uvážíme-li, že $\cos^3\varphi + \sin^3\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi)(1 - \sin\varphi\cos\varphi)$, a že $\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{1 + \sin 2\varphi}$, lze též rovnici (5) psáti:

$$r = \frac{3a\sin 2\varphi}{(2 - \sin 2\varphi\sqrt{1 + \sin 2\varphi}}. \qquad (6)$$

V některých případech výhodnější jest užíti rovnice k osám o 45^0 otočeným. Tu obdržíme, položíme-li

$$\frac{1}{2}(x' - y')\sqrt{2} \text{ za } x, \quad \frac{1}{2}(x' + y')\sqrt{2} \ldots \text{ za } y.$$

Po krátké redukci dostaneme

$$x'^2 (x'^2 + 3y'^2)\sqrt{2} - 3a(x'^2 - y'^2) = 0, \qquad (7)$$

z čehož následuje rovnice polárná, je-li $\psi = \varphi - \frac{\pi}{4}$

$$r\sqrt{2}\cos\psi(1 + 2\sin^2\psi) - 3a\cos 2\psi = 0,$$

aneb jelikož $1 + 2\sin^2\psi = 2 - \cos 2\psi$

$$r = \frac{3a\cos 2\psi}{\sqrt{2}\cos\psi(2 - \cos 2\psi)}. \qquad (8)$$

---

*) René Des Cartes (nar. r. 1596, zemřel 1650) uvádí ve svém listu Mersennovi co příklad proti Fermatově theorii tečen křivku určitou, po něm „listem Descartesovým" (folium de Descartes) zvaným. Viz: „Renati Des Cartes Epistolae omnes. Frankofurti a. M. 1692. P. III. epist. 49."

Vyjádříme-li konečně souřadnice co funkce určitého parametru u, položme u bodu křivky $\frac{y}{x} = u$.

Z rovnice (4) — dělíme-li jí na x^3 — následuje

$$1 + u^3 - \frac{3au}{x} = 0,$$

z čehož

$$x = \frac{3au}{1+u^3}, \text{ a tedy } y = \frac{3au^2}{1+u^3}. \tag{9}$$

Jelikož $r = \sqrt{x^2+y^2}$, bude

$$r = \frac{3au}{1+u^3} \sqrt{1+u^2} \tag{10}$$

§. 3. **Rozbor rovnic předešlých.**

Z §. 1. následují bezprostředně věty tyto:

α) „List Cartesiův jest racionálná křivka stupně 3. s realným bodem dvojným.“

β) „Tečny ve dvojném bodu tomto stojí k sobě kolmo.“

Beřeme-li tečny tyto za osy X a Y, lze dle rovnice (5) říci, že pro určité φ obdržíme určité r, tudíž na každém paprsku jdoucím počátkem soustavy je jediný určitý bod křivky. Parametr toho bodu jest než $\frac{y}{x}$ čili $tg\,\varphi$.

Jako každá křivka stupně třetího musí míti tato křivka aspoň jeden bod realný úběžný.

Z rovnice (6) jde, že r se stane ∞, je-li

$$1 + \sin 2\varphi = 0,$$

tedy pro

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Lze tedy říci:

γ) „Cartesiův list má jeden realný bod úběžný na přímce, která 135^0 s kladným X svírá.“

Z rovnice (7) jde, že pro každé x' obdržíme dvě stejné toliko znamením se lišící hodnoty za y' — proto

δ) „Přímka půlící úhel tečen ve dvojném bodu listu Cartesiova dělí křivku ve dvě souměrné části.“*)

*) To následuje i z rovnice (8), neboť pro $+\psi$ i pro $-\psi$ je totéž r.

Tážeme-li se po vrcholech křivky naší vzhledem k X neb X', obdržíme pro vrchol vzhledem k X (x_1, y_1), částečným differencováním dle x rovnice (4)

$$3x_1{}^2 - 3ay_1 = 0$$

a tedy

$$x_1 = a\sqrt[3]{2},\ y_1 = a\sqrt[3]{4}.$$

Vrchol vzhledem k X' obdržíme, differencujeme-li rovnici (7)

$$(3x_1'^2 + 3y_1'^2)\sqrt{2} - 6ax_1' = 0 \text{ čili } y_1'^2 = ax_1'\sqrt{2} - x_1'^2,$$

což do rovnice (7) jsouc dosazeno dává

$$x_1'^3 + 6x_1'^2 a - 3x_1'^3\sqrt{2} - 3ax_1'^2 + 3ax_1'\sqrt{2} - 3ax_1'^2 = 0$$

odkudž

$$x_1' = \pm a\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}} = \pm a\sqrt{\frac{3}{17}(6-\sqrt{2})}$$

$$y_1' = \sqrt{x_1'(a\sqrt{2} - x_1')}.$$

K vyšetřování bodů lze výhodně užíti jich parametrů, které jsou $tg\,\varphi$. Z rovnice (9) obdržíme pro

$$u = 0 \ldots.\ x = 0 \ldots y = 0 \ldots a_0$$

$$u = 1 \ldots.\ x = \frac{3a}{2} \ldots y = \frac{3a}{2} \ldots a_1$$

$$\overline{a_0 a_1} = \sqrt{2 \cdot \frac{9a^2}{4}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$u_\infty \ldots x = \int^0 \frac{3a}{\frac{1}{u} + u^2} = 0,\ y = \int^0 \frac{3a}{\frac{1}{u^2} + 1} = 0 \ldots a_\infty.$$

Z rovnice (10) poznáváme, že roste-li u od 1 do ∞, ubývá r od $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$ k nulle; — roste-li ale u od 0 do 1, roste též r od 0 do $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$. Dle toho můžeme si učiniti pojem o části křivky v kvadrantu prvém, ku které měl Descartes zřetel, a která se obyčejně kličkou nazývá.

Pokračuje-li u od $-\infty$ do -1, roste r od 0 do ∞, pro u od -1 k 0 ubývá r od ∞ k 0.

Z rovnice (9) jde však zároveň, že x i y zároveň negativné býti nemohou — tudíž křivka naše nemá realných bodů v kvadrantu třetím.

§. 4. Sečna listu Cartesiova.

Každá přímka protíná list Cartesiův, co křivku stupně třetího, ve třech bodech. Z těchto mohou býti buď všechny reálné aneb 1 realný a 2 pomyslné. Mezi parametry takových tří bodů panuje velmi jednoduchá relace. Dr. Weyr odvodil ji obecně pro racionálné křivky stupně třetího (viz „Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1870) a ukázal, jak z relace té vychází mnoho zajímavých vět. My učiníme to vzhledem k našemu případu.

Je-li $Ax + By + 1 = 0 \equiv P$ rovnice přímky křivku protínající, obdržíme parametry bodů průsečných, položíce za x a y hodnoty z rovnic (9). Bude tu

$$\frac{3A\,ua}{1+u^3} + \frac{3a\,Bu^2}{1+u^3} + 1 = 0$$

čili
$$u^3 + 3aB\,u^2 + 3A\,au + 1 = 0.$$

Jsou-li u_1, u_2, u_3 kořeny této rovnice, bude tu

$$u_1 + u_2 + u_3 = -3aB,\quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 3aA,$$

a konečně

$$u_1u_2u_3 = -1, \tag{15}$$

což jest hlavní relace od polohy přímky neodvislá. Jest to nutná a dostačující podmínka, by tři body listu Cartesiova na jedné přímce ležely a vysloviti lze ji též takto:

„Protneme-li list Cartesiův přímkou, jest vždy
$$tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2\,tg\,\varphi_3 = -1 \quad \text{čili} \quad 1 + tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2\,tg\,\varphi_3 = 0.\text{“}$$

Z rovnice $u_1 + u_2 + u_3 = -3aB$ následuje, že pro $B = 0$ jest $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, což interpretováno ve smyslu geometrickém zní:

„Každá přímka rovnobežná s osou y protíná list Descartesův ve třech bodech tak, že $tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2 + tg\,\varphi_3 = 0$ čili součet jich parametrů nulle se rovná.“

Je-li $B = \frac{1}{3a}$, bude $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ a tedy

$$tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2 + tg\,\varphi_3 = tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2\,tg\,\varphi_3,$$

kteráž stejnina má platnost, je-li

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi\ ^{*)}$$

---

*) Viz: Jandečka, Trigonometrie str. 20.

Avšak B jest rovno $\frac{1}{3a}$ pro všechny přímky procházející bodem ve vzdálenosti — $3a$ na ose y položeným a lze tedy říci:

„Každá bodem ve vzdálenosti — $3a$ na ose y ležícím bodem procházející přímka protíná list Cartesiův ve třech bodech tak, že součet úhlů příslušných provodičů jest 180^0."

Položíme-li v rovnici (15) $u_3 = 1$, majíce na zřeteli bod a na x', protíná každá tím bodem vedená přímka list ve dvou bodech a_1 a_2, jichž parametry vyhovují relaci

$$u_1 u_2 = -1 \text{ čili } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

„Každá tedy bodem a na x' procházející přímka protíná list Descartův ve dvou bodech a přímky spojující body tyto s bodem dvojným stojí na sobě kolmo."

Z toho jde, že je-li klička sestrojena, lze pak snadno z ní nekonečnou část křivky odvoditi.

Prochází-li taková přímka sečná zároveň bod ve vzdálenosti —$3a$ na ose y, bude

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

tedy

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{8}, \; \varphi_2 = \frac{5\pi}{8}.$$

Rovnice přímky, která dvěma určitými body listu Cartesiova prochází, má tvar

$$\eta - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(\xi - x_1), \text{ kde } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

jest směrnicí σ a rovná se, jsou-li u_1 a u_2 parametry bodů příslušných

$$\sigma = \frac{\frac{3au_2^2}{1+u_2^3} - \frac{3au_1^2}{1+u_1^3}}{\frac{3au_2}{1+u_2^3} - \frac{3au_1}{1+u_1^3}},$$

z čehož po redukci jde

$$\sigma = \frac{u_1 + u_2 - u_1^2 u_2^2}{1 - u_1 u_2 (u_1 + u_2)}$$

a tudíž nahradíme-li x_1 a y_1 příslušnými funkcemi u_1, obdržíme

$$\xi (u_1 + u_2 - u_1^2 u_2^2) - \eta [1 - u_1 u_2 (u_1 + u_2)] - 3 a u_1 u_2 = 0 \quad (11)$$

co rovnici přímky hledané.

Jednoduché hodnoty nabývá σ, je-li $u_1 + u_2 = 0$. Takové dva body, jichž parametry pouze znamením se liší, nazývejme sdruženými. Rovnice přímky takovými sdruženými body procházející (kde $u_1 = - u_2$) jde z rovnice (11)

$$\xi u^4 - \eta + 3a u^2 = 0. \quad (12)$$

Směrnice takové přímky $\sigma = u^4$, tedy

$$tg\, \delta = tg^4 \varphi\,. \text{ (obr. 1. tabulky)}$$

Každá přímka dvěma sdruženými body procházející protíná list v určitém ještě bodu a'', jehož parametr u'' vyhovuje podmínce

$$u^2 u'' = 1, \text{ tedy } u'' = \frac{1}{u^2}$$

čili

$$tg\, \varphi'' = \frac{1}{cot g^2 \varphi}\,.$$

Přímky spojující body sdružené listu Cartesiova obalují určitou křivku. K stanovení této netřeba než rovnici (12) differencovati dle u a z obou rovnic u vyloučiti.

Differencováním obdržíme

$$4 \xi u^3 + 6 a u = 0 \text{ tedy } u^2 = - \frac{3a}{2\xi}\,,$$

což vložíme-li do rovnice (12) dává

$$\xi \eta = \left(\frac{3a}{2} \right)^2 \quad (13)$$

hledanou rovnici křivky obalové. Rovnice tato jest rovnicí hyperboly a tedy: „Přímky spojující body sdružené listu Descartesova obalují rovnoramenou hyperbolu, jejíž asymptoty jsou tečnami v bodu dvojném listu.“ —

Předpokládejme, že křivku naši dvě přímky P a P' protínají v bodech a_1, a_2, a_3 a a_1', a_2', a_3'.

Dle rovnice (15) bude

$$u_1 u_2 u_3 = - 1, \; u_1' u_2' u_3' = - 1. \quad (\alpha)$$

Spojíme-li tyto po dvou, protíná přímka $\overline{a_1 a_1'}$ křivku v bodu a''_1, přímka $\overline{a_2 a'_2}$ v a''_2 a konečně $a_3 a'_3$ v bodu a''_3. Lze dokázati, že i a''_1 a''_2 a a''_3 na přímce P'' leží.

Neboť jsou-li u''_1, u''_2, u''_3, parametry bodu a''_1 a''_2 a''_3, bude

$$u_1 u'_1 u''_1 = -1,\ u_2 u'_2 u''_2 = -1,\ u_3 u'_3 u''_3 = -1\,. \quad (\beta)$$

Znásobíme-li rovnice β, obdržíme

$$u_1 u'_1 u''_1 \,.\, u_2 u'_2 u''_2 \,.\, u_3 u'_3 u''_3 = -1$$

a vzhledem k rovnicím (α):

$u''_1 u''_2 u''_3 = -1$, což jest důkazem, že body $u''_1 u''_2 u''_3$ na přímce leží. (Dokončení.)

Některé věty geometrie polohy v planimetrii a geometrii deskriptivní.

Podává

F. Machovec.

Pokusím se co možná jednoduše dokázati některé věty geom. polohy vzhledem ku křivkám II stupně nejprvé o kružnici a ty pak užitím zákonů promítání zevšeobecním.

Způsobu toho užito sice již k důkazu mnohých vět geometrie polohy, jak patrno ku př. ze slovníku Klüglova v článku „Viereck", kde vyvinuty jsou věty o čtyrúhelnících vepsaných a opsaných a dle Laplace věta Pascalova, než nejsou výsledky tam obdržené všeobecné, nýbrž platicí jen pro jisté polohy útvarů v nich se vyskytujících.

1.) V čtyrúhelníku vepsaném křivce II stupně jsou čtyry body určeny protilehlými stranami a tečnami v protilehlých vrcholech na jediné přímce. Kružnici vepsaný rovnoběžník může býti jen pravoúhelník, neb dle vlastnosti rovnoběžníků musí býti protilehlé úhly stejné a v čtyrúhelnících vepsaných kružnici vyplňovati se do dvou pravých.

Je-li kružnici vepsán pravoúhelník *abcd*, určují protilehlé strany jeho dva body přímky nekonečně vzdálené, poněvadž dále úhlopříčny toho pravoúhelníka jsou průměry kružnice neb úhly obvodové nad nimi jsou pravé, jsou i tečny v protilehlých vrcholech stejnosměrné a určují tedy též dva body přímky ne-