Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Wilhelm Schmid

Quadratische Transformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 3, 210--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122529

Quadratische Tranformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze.

W. Schmid, Brünn.

(Eingegangen am 11. Juni 1936.)

1. Aus den geradlinigen Dreiecksnetzen einer Ebene π lassen sich Kegelschnitt-Dreiecksnetze einer Ebene π' ableiten, indem man π mittels einer quadratischen Punkt-Transformation auf π' abbildet. Den verschiedenen Typen der quadratischen Transformationen entsprechen verschiedene Klassen der so gewonnenen Kegelschnitt-Dreiecksnetze. Die quadratischen Transformationen zwischen zwei Ebenen sind entweder rational, also $(m, 1)$-deutig, wobei m nur die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen kann, oder nicht rational und dann $(2, 2)$-deutig.[1] Bei den rationalen Transformationen können die Fälle mit $m < 4$ als Sonderfälle des allgemeinen Falles $m = 4$ aufgefaßt werden. In den mir bekannt gewordenen Untersuchungen über ebene Kegelschnitt-Dreiecksnetze sind durchwegs solche behandelt worden, die sich mittels rationaler quadratischer Transformationen aus geradlinigen Dreiecksnetzen ableiten lassen. Ist nämlich die quadratische Transformation $\pi \to \pi'$ rational, so entspricht den Geraden von π' in π ein lineares Kegelschnitt-System zweiter Stufe B; denn die allgemeine Transformation dieser Art kann geradezu dadurch bestimmt werden, daß man den Geraden von π' die Kegelschnitte eines Systems B von π kollinear zuordnet.[2]) Den Geraden von π dagegen entspricht in π' ein im allgemeinen nicht lineares System von ∞^2 Kegelschnitten. Dieses System Γ ist eines der drei Systeme von je ∞^2 Kegelschnitten, die eine beliebige ebene Kurve dritter Klasse an je drei Stellen berühren. In dem linearen ∞^2-System B sind nämlich ∞^1 zerfallende Kegelschnitte enthalten, deren Doppelpunkte die Hessesche Kurve dritter Ordnung h von B erfüllen. Ihnen entsprechen in π' ∞^1

[1]) R. Ragonesi, Catania Atti Acc. Gioenia (5) **18** (1931), Nr. XXIII.
[2]) Siehe etwa R. Sauer, Math. Ann. **106** (1932), S. 725.

Geraden, welche eine Kurve c umhüllen. Diese Kurve c ist von der dritten Klasse.[3]) Denn den Geraden eines Strahlenbüschels von π' entsprechen in π die Kegelschnitte eines Büschels von B, von welchen drei zerfallen. Eine beliebige Gerade g von π schneidet h in drei Punkten. Diesen entsprechen drei Berührungspunkte des der Geraden g in π' zugeordneten Kegelschnitts von Γ mit der Kurve c[4]) und es läßt sich auch zeigen, daß das System Γ tatsächlich mit einem der drei Berührungssysteme von c identisch ist.[5])

Mittels der rationalen quadratischen Transformationen gelangt man demnach zu Dreiecksnetzen aus Kegelschnitten entweder eines linearen Systems zweiter Stufe B[6]) oder eines Berührungssystems Γ einer Kurve dritter Klasse.[7]) Umgekehrt kann jedes in einem solchen System B oder Γ enthaltene Kegelschnitt-Dreiecksnetz durch eine rationale quadratische Transformation aus einem geradlinigen Dreiecksnetz gewonnen werden. Es geht dies aus den Arbeiten von R. Sauer[6]) bzw. W. Schmid[7]) hervor.

Die mittels der nicht rationalen, (2, 2)-deutigen quadratischen Transformationen $\mathfrak{T}$ zwischen zwei Ebenen aus geradlinigen Dreiecksnetzen ableitbaren Kegelschnitt-Dreiecksnetze sind Gegenstand der folgenden Untersuchung. Es wird zunächst das Kegelschnittsystem Σ charakterisiert, in welches das Geradenfeld einer Ebene durch eine solche Transformation $\mathfrak{T}$ übergeht. Die aus Kegelschnitten von Σ gebildeten Dreiecksnetze erweisen sich als reine Dreiecksnetze auf einer zweiblättrigen Fläche vom Zusammenhang einer Fläche zweiter Ordnung. Innerhalb des zweiparametrigen Systems Σ werden ferner die einparametrigen Systeme bestimmt, deren Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, und schließlich werden Angaben über die von den Kegelschnitten eines solchen einparametrigen Systems eingehüllte Kurve gemacht.

2. Jede quadratische (2, 2)-deutige Punkt-Transformation zwischen zwei Ebenen π', π'' kann (bis auf Kollineationen und auf

---

[3]) Bei R. Sauer, a. a. O. S. 729 ist die Gleichung dieser Kurve, die dort H^* heißt, bestimmt.

[4]) Vergl. etwa R. Baldus, Math. Ann. **72** (1912), S. 9.

[5]) Vergl. W. Schmid, Monatsh. f. Math. u. Phys., **45** (1936), S. 13—20.

[6]) Über Dreiecksnetze aus Kegelschnitten eines linearen Systems zweiter Stufe siehe: O. Volk, Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1929, S. 132—134. — R. Sauer, Math. Ann. **106** (1932), S. 729. — O. Baier, Jahresber. d. DMV **42** (1932), S. 30-31. — K. Strubecker, Monatsh. f. Math. u. Phys. **39** (1932), S. 395—398. — R. Sauer-O. Baier, Jahresber. d. DMV **43** (1933), S. 153—162. — W. Schmid, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933), S. 411—417.

[7]) Über Dreiecksnetze aus Kegelschnitten, welche eine Kurve dritter Klasse an je drei Stellen berühren, siehe: R. Sauer-O. Baier, a. a. O. S. 161-162. — W. Schmid, [5]).

unendlich viele Arten) mittels einer Fläche zweiter Ordnung φ hergestellt werden, die aus zwei Punkten $O_{1,2}$ auf die Ebenen π' bzw. π'' projiziert wird, worauf man solche Punkte von π', π'' einander zuordnet, die Projektionen ein und desselben Punktes von φ aus O_1 bzw. O_2 sind.[8]) Wären $\delta_{1,2}$ die Polarebenen von $O_{1,2}$ bezüglich φ, d ihre Schnittlinie, $u_{1,2}$ die Schnitte von φ mit $\delta_{1,2}$, so sind die Projektionen $u'_{1,2}$ von $u_{1,2}$ aus O_1 auf π' zwei Kegelschnitte, die sich an zwei Stellen berühren und der Riß O'_2 von O_2 ist der gemeinsame Pol der Berührungssehne d' bezüglich $u'_{1,2}$. Die Projektion irgend einer Geraden g'' von π'' aus O_2 auf φ ist ein Kegelschnitt g; dessen Riß aus O_1 auf π' ist ein Kegelschnitt g', welcher u'_1 an zwei Stellen berührt und in zweien seiner Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzt. Sind umgekehrt $u'_{1,2}$ zwei vorgegebene Kegelschnitte von π', die sich an zwei Stellen berühren, und ist O'_2 der gemeinsame Pol der Berührungssehne d', so gibt es, wie man sich leicht überzeugt, ∞^2 Kegelschnitte g', welche u'_1 an zwei Stellen berühren und in zweien ihrer Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzen. Das System Σ dieser Kegelschnitte läßt sich stets durch eine quadratische, im allgemeinen (2, 2)-deutige Transformationen $\mathfrak{T}$ in das Geradenfeld einer Ebene π'' überführen. Soll nämlich eine hiezu geeignete Transformation $\mathfrak{T}$ bestimmt werden, so kann man den Punkt O_1 außerhalb von π' und eine Fläche zweiter Ordnung φ, welche dem Kegel (O_1, u'_1) längs u_1 eingeschrieben ist, beliebig wählen. Der Kegel (O_1, u'_2) berührt dann φ an zwei Stellen, so daß sein Schnitt mit φ in zwei Kegelschnitte zerfällt. Von diesen ist einer als Kegelschnitt u_2 zu wählen. Ist δ_2 die Ebene von u_2, O_2 der Pol von δ_2 bezüglich φ, so ist O'_2 der Riß von O_2 aus O_1. Der Kegel, der einen Kegelschnitt g' von Σ aus O_1 projiziert, berührt dann φ in zwei Punkten und sein Schnitt mit φ zerfällt in zwei Kegelschnitte $g_{1,2}$, deren Ebenen wegen der beiden Tangenten durch O_2 diesen Punkt enthalten. Wählt man dann als π'' etwa die Ebene δ_2, so sind die Projektionen von $g_{1,2}$ aus O_2 auf π'' zwei Geraden $g''_{1,2}$, und es ist in der Tat eine Korrespondenz (2, 2) zwischen den Ebenen π', π'' hergestellt, bei welcher den Kegelschnitten von Σ die Geraden von π'' entsprechen. Es gilt demnach

Satz 1: „Sind $u'_{1,2}$ zwei Kegelschnitte der Ebene π', die sich an zwei Stellen berühren, und ist O'_2 der Pol der Berührungssehne bezüglich $u'_{1,2}$, so bilden die Kegelschnitte g' von π', welche u'_1 an je zwei Stellen berühren und in zweien ihrer Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzen, ein zweiparametriges System Σ, welches durch eine quadratische, im allgemeinen (2, 2)-

[8]) G. Marletta, Rendiconti di Palermo 17 (1903), S. 183.

deutige Transformation der Ebene π' in das Geradenfeld einer Ebene π'' übergeführt werden kann. Umgekehrt gehen bei jeder (2, 2)-deutigen quadratischen Transformation einer Ebene π'' in eine Ebene π' die Geraden von π'' in ein solches Kegelschnittsystem Σ über".

Soll das Kegelschnittsystem Σ allgemein sein, d. h. nicht so degenerieren, daß es auch als Sonderfall des Typus B oder Γ angesehen werden kann, also durch eine rationale quadratische Transformation aus einem Geradenfeld ableitbar ist, so müssen die Punkte $O_{1,2}$ von einander verschieden sein und es darf keiner von ihnen der Fläche φ angehören. Ferner darf O_1 nicht Punkt von π', O_2 nicht Punkt von π'' sein. Die Fläche φ selbst muß eine eigentliche Fläche oder ein Kegel zweiter Ordnung sein, darf also nicht in zwei Ebenen zerfallen. Für die Kegelschnitte $u'_{1,2}$, durch welche das System Σ bestimmt ist, folgt hieraus: u'_1 muß entweder ein eigentlicher Kegelschnitt oder ein Geradenpaar, darf also nicht Doppelgerade sein. Bei nicht zerfallendem u'_1 muß u'_2 entweder ein ebenfalls nicht zerfallender Kegelschnitt oder eine Doppelgerade sein, welche aber als einfache Gerade nicht Tangente von u'_1 sein darf. Ist u'_1 ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkt S', so muß u'_2 entweder ein Geradenpaar mit demselben Doppelpunkt S' oder eine Doppelgerade durch S' sein.

3. Einem geradlinigen Dreiecksnetz der Ebene π'' entspricht bei der Projektion aus O_2 auf φ ein aus Kegelschnitten von φ gebildetes Dreiecksnetz. Dabei geht jeder Knotenpunkt des Dreiecksnetzes in π'' in zwei Knotenpunkte des Dreiecksnetzes auf φ über. Außer den Knotenpunkten weisen die an dem Dreiecksnetz beteiligten Kegelschnitte von φ keinerlei Schnittpunkte auf. Durch Projektion dieses Kegelschnitt-Dreiecksnetzes von φ aus O_1 nach π' gelangt man zu einem Dreiecksnetz aus Kegelschnitten von Σ. Da aber die Beziehung zwischen den Punkten von φ und ihren Projektionen aus O_1 auf π' (2, 1)-deutig ist, weisen die an dem Dreiecksnetz von Σ beteiligten Kegelschnitte außer den Knotenpunkten noch „scheinbare" Schnittpunkte auf. Die Beziehung zwischen den Punkten von φ und π' läßt sich nun eineindeutig machen, indem man die Ebene π' mit zwei Blättern überdeckt, welche längs u'_1 in einem Rückkehrschnitt, also wie in einer Falte, zusammenhängen. Man kann diese zweiblättrige Fläche π' durch eine Deformation von φ erhalten, bei welcher jeder Punkt P von φ auf seinem Projektionsstrahl O_1P in das entsprechende Blatt der Bildebene π' hineinrückt. Die zweiblättrige Fläche π' ist demnach vom Zusammenhang der Fläche zweiter Ordnung φ. Auf der zweiblättrigen Fläche π' sind dann die durch die (2, 2)-deutige quadratische Transformation

gewonnenen Kegelschnitt-Dreiecksnetze reine „Sechseckgewebe“ im Sinne von W. Blaschke.[9]) Es gilt demnach

Satz 2: „Durch eine (2, 2)-deutige quadratische Transformation zwischen zwei Ebenen π', π'' gehen die geradlinigen Dreiecksnetze von π'' in Dreiecksnetze aus Kegelschnitten des zugehörigen Systems Σ von π' über. Auf der zweiblättrigen Fläche π', deren Blätter längs des Kegelschnitts u'_1 in einem Rückkehrschnitt zusammenhängen, weisen die Kegelschnitte des Dreiecksnetzes keine Schnittpunkte auf außer den Knotenpunkten. Umgekehrt läßt sich jedes Dreiecksnetz aus Kegelschnitten eines Systems Σ der Ebene π' mittels einer (2, 2)-deutigen quadratischen Transformation aus einem geradlinigen Dreiecksnetz einer Ebene π'' herleiten“.

4. Aus den ∞^2 Kegelschnitten eines Systems Σ können gewisse einparametrige Systeme herausgegriffen werden, deren Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, während umgekehrt die Kegelschnitte eines jeden in Σ enthaltenen Dreiecknetzes einem von diesen einparametrigen Systemen angehören müssen. Denn die Kegelschnitt-Dreiecksnetze von Σ gehen nach Satz 2 durch eine Punkttransformation aus geradlinigen Dreiecksnetzen eines ebenen Feldes π'' hervor. Nach H. Graf und R. Sauer[10]) aber umhüllen die an einem ebenen, geradlinigen Dreiecksnetz beteiligten Geraden stets eine Kurve dritter Klasse, die auch zerfallen kann, und umgekehrt lassen sich die Tangenten einer solchen Kurve stets nach Dreiecksnetzen anordnen. Die erwähnten einparametrigen Systeme entsprechen also den Tangenten der Kurven dritter Klasse von π''. Es fragt sich nun, in welcher Weise sie sich innerhalb von Σ charakterisieren lassen. Es wäre zunächst der Kegelschnitt u'_2 nicht eine Doppelgerade. Dann kann dies am einfachsten durch Angabe der Kurven geschehen, welche Ort der Pseudo-Mittelpunkte der zu diesen Systemen gehörigen Kegelschnitte sind, wenn als pseudo-uneigentliche Gerade von π' die Gerade durch O'_2 parallel d' gewählt wird. Denn jeder Punkt von π' ist dann Pseudo-Mittelpunkt eines einzigen Kegelschnitts von Σ. Einem einparametrigen Kegelschnittsystem von Σ, dessen Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, entsprechen nun bei der Projektion aus O_1 ∞^1 Kegelschnitte von φ, deren Ebenen durch O_2 gehen, also einen Kegel $\varkappa$ umhüllen. Andererseits aber lassen sich die Spuren dieser Ebenen in π_1 nach Dreiecksnetzen anordnen. Nach dem oben angeführten Graf-Sauerschen Satz ist also dieser Kegel von der

[9]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 151.

[10]) Vergl. H. Graf und R. Sauer, Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1924, S. 128.

dritten Klasse. Von seinen Ebenen gelangt man nun in folgender Weise zu den Pseudo-Mittelpunkten der Kegelschnitte von Σ: Es wäre e die Schnittlinie einer Ebene ε des Kegels mit δ_2. Dann ist also die Einhüllende (e) der Geraden e eine Kurve dritter Klasse. E wäre der Pol von e bezüglich u_2. Der Ort (E) ist also eine Kurve dritter Ordnung. Dabei entsprechen drei Tangenten von (e), die durch einen Punkt gehen, drei Punkte von (E), die in einer Geraden liegen. Sei weiter O der gemeinsame Pseudo-Mittelpunkt von φ und $u_{1,2}$ für die Ebene durch O_1, O_2 parallel d als pseudouneigentliche Ebene. Dann ist der Pseudo-Mittelpunkt M des in der Ebene ε liegenden Kegelschnitts von φ der Schnittpunkt von e mit der Geraden OE. M entspricht daher dem Punkt E in einer involutorischen, birational-quadratischen Transformation von δ_2, für welche O und die pseudouneigentlichen Punkte $U_{1,2}$ von u_2 die Fundamentalpunkte sind. Der Ort (M) von M ist demnach eine Kurve sechster Ordnung mit dreifachen Punkten in O, $U_{1,2}$. Sie ist wegen der eineindeutigen Beziehung auf die ebene Kurve dritter Ordnung (E) im Allgemeinen vom Geschlecht 1, kann aber auch zerfallen. Drei Punkten von (E), die in einer Geraden liegen, entsprechen dabei drei Punkte von (M), die auf einem Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte O, $U_{1,2}$ liegen. Die Projektion aus O_1 nach π' schließlich ist eine Pseudo-Parallelprojektion, bei welcher der Pseudo-Mittelpunkt eines Kegelschnitts in den des Bild-Kegelschnittes übergeht. Daher gilt

Satz 3: „In der Ebene des Kegelschnittsystems Σ, dessen Kegelschnitt u'_2 nicht in eine Doppelgerade zerfällt, werde die Gerade durch O'_2 parallel d' als pseudouneigentliche Gerade eingeführt. Der gemeinsame Pseudo-Mittelpunkt von $u'_{1,2}$ sei mit O', die pseudo-uneigentlichen Punkte von u'_2 seien mit $U'_{1,2}$ bezeichnet. Die Kegelschnitte des Systems Σ, deren Pseudo-Mittelpunkte auf einer (nicht zerfallenden oder zerfallenden) Kurve sechster Ordnung liegen, welche die Punkte O' und $U'_{1,2}$ zu dreifachen Punkten besitzt, lassen sich nach Dreiecksnetzen anordnen. Umgekehrt liegen die Pseudo-Mittelpunkte der an einem Dreiecksnetz von Σ beteiligten Kegelschnitte stets auf einer solchen Kurve. Die Pseudo-Mittelpunkte dreier Kegelschnitte des Dreiecksnetzes, die sich in einem seiner Knotenpunkte schneiden, liegen dabei stets auf einem Kegelschnitt durch O', $U'_{1,2}$".

Tritt der in Satz 3 ausgeschlossene Fall ein, daß u'_2 die doppelt zählende Gerade d' ist, so fallen die Pseudo-Mittelpunkte der Kegelschnitte von Σ alle auf diese Gerade. Dagegen bleibt die Pseudo-Mittelpunkts-Konfiguration der den Kegelschnitt-Dreiecksnetzen von Σ auf φ entsprechenden Dreiecksnetze in der Ebene δ_2 erhalten. Sie kann in einfacher Weise nach π' projiziert werden, wenn als Zentrum dieser Hilfsprojektion einer der beiden auf O_1, O_2 gelegenen Eckpunkte des vollständigen Vierseits gewählt wird, dessen übrige vier Eckpunkte die in der Ebene O, O_1, O_2 liegenden Punkte von $u_{1,2}$ sind.

5. Der Kurve r'' 3. Klasse und im allgemeinen 6. Ordnung und vom Geschlecht 1, welche von den Geraden des Dreiecksnetzes in π'' eingehüllt wird, entspricht in π' eine von den Kegelschnitten des Dreiecksnetzes (außer dem Kegelschnitt u'_1) eingehüllte Kurve r', welche auf der zweiblättrigen Fläche π' jene Gebiete von einander trennt, durch deren Punkte es drei reelle bzw. einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Kegelschnitte von Σ gibt, deren Pseudo-Mittelpunkte auf der Pseudo-Mittelpunktskurve des Dreiecksnetzes liegen. Die Projektion von r'' aus O_2 auf φ ist eine Raumkurve r 12. Ordnung mit 18 Rückkehrpunkten, welche den 9 Rückkehrpunkten von r'' entsprechen. Die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte von r läßt sich direkt bestimmen und es ergibt sich, wie hier nicht ausgeführt werden soll, daß die Hüllkurve r' des Dreiecksnetzes von Σ im allgemeinen 12. Ordnung, 18. Klasse und vom Geschlecht 7 ist, 30 Doppelpunkte und 18 Rückkehrpunkte besitzt.

*

Kvadratické transformace a trojúhelníkové sítě kuželoseček.

(Obsah předešlého článku.)

Ze známých přímkových trojúhelníkových sítí roviny π lze odvoditi trojúhelníkové sítě kuželoseček v rovině π', když rovinu π zobrazíme na rovinu π' kvadratickou transformací. Různým typům kvadratických transformací odpovídají různé třídy takto získaných trojúhelníkových sítí kuželoseček. Pokud jest mi známo, byly vyšetřovány pouze takové typy trojúhelníkových sítí kuželoseček, které lze z přímkových odvoditi racionálními kvadratickými transformacemi. Předmětem tohoto pojednání jsou trojúhelníkové sítě kuželoseček, které lze odvoditi z přímkových kvadratickými transformacemi nikoliv racionálními, tedy (2, 2)-značnými.

Úvahy jsou uvedeny prostorově tak, že se kvadratická (2, 2)-značná transformace vytvoří kvadrikou φ, která se promítá ze dvou bodů O_1, O_2 na roviny π', π'', načež jsou k sobě přiřazeny ony body rovin π', π'', které jsou průměty jednoho a téhož bodu kvadriky φ z bodů O_1, O_2. Touto transformací přecházejí přímkové trojúhelníkové sítě roviny π'' v trojúhelníkové sítě kuželoseček, které patří k jistému systému Σ o dvou parametrech v rovině π'.

Tento systém lze charakterisovati takto: Jsou-li u'_1, u'_2 dvě kuželosečky v rovině π' dvojnásobně se dotýkající a O'_2 pól tětivy d', určené dotyčnými body, vzhledem k oběma kuželosečkám, tvoří kuželosečky g' v rovině π', které se dotýkají kuželosečky u'_1 ve dvou bodech a jejichž tečny ve dvou průsečících s kuželosečkou u'_2 jdou bodem O'_2, takový systém Σ. V tomto systému lze určiti systémy o jednom parametru, jejichž kuželosečky lze seřaditi v trojúhelníkové sítě. Za tím účelem zaveďme v rovině systému Σ přímku jdoucí bodem O'_2 a rovnoběžnou s d' jako pseudonevlastní (pseudo-uneigentliche) přímku. Společný pseudo-střed (Pseudo-Mittelpunkt) kuželoseček u'_1, u'_2 značme O', pseudonevlastní body kuželosečky u'_2 pak U'_1, U'_2. Kuželosečky systému Σ, jejichž pseudostředy tvoří sextiku (jež se může rozpadnouti), která má body O', U'_1, U'_2 za body trojnásobné, lze seřaditi v trojúhelníkové sítě a naopak. Pseudostředy tří kuželoseček trojúhelníkové sítě, které se protínají v jednom z jejích uzlových bodů, leží vždy na kuželosečce, jdoucí body O', U'_1, U'_2.

Představme si rovinu π' dvojnásobně pokrytou, při čemž oba listy splývají podél kuželosečky u'_1 způsobem v článku popsaným. Potom kuželosečky trojúhelníkové sítě na dvojnásobně pokryté ploše nemají průsečíků mimo uzly sítě. Práce končí několika poznámkami o křivce, která jest obálkou kuželoseček zmíněného systému o jednom parametru.