Josef Novák
Charakter množiny

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 3, 206--209

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122528

Charakter množiny.

J. Novák, Brno.

(Došlo 11. prosince 1936).

V Mengerově Dimensionstheorie je uvedena poznámka, že charakter kompaktní množiny v separabilním prostoru je spočetný (str. 73). Pan Frankl, jenž tuto poznámku vyslovil, poznal, že u nekompaktních množin nemusí tomu tak býti. V tomto článku dokážeme nutnou a postačující podmínku, aby charakter podmnožiny metrického prostoru byl spočetný. Charakter bodu v Hausdorffově prostoru byl ponejprv definován P. Alexandrovem a P. Urysohnem (Mémoire sur les espaces topologiques compacts str. 2). Na definici charakteru množiny mne upozornil prof. Čech.

Okolím množiny A v topologickém prostoru rozumíme každou otevřenou množinu, jež obsahuje množinu A. Systém $\mathfrak{S}$ okolí množiny A nazveme úplným, jestliže každé okolí množiny A obsahuje nějaké okolí ze systému $\mathfrak{S}$. Mezi úplnými systémy okolí množiny A existuje aspoň jeden o nejmenší mohutnosti. Tuto mohutnost nazveme charakterem množiny A a označíme ji $\chi(A)$. Je patrné, že $\chi(A) = 1$ tehdy, když množina A je otevřená. To je také jediný případ konečného charakteru. Nejblíže vyšší charakter je pak $\aleph_0$.

V metrickém prostoru P platí tato věta:

Charakter množiny $M \subset P$ je spočetný (t. j. roven 1 nebo $\aleph_0$), když a jen když

$$M = K + G,$$

kde K je kompaktní a G je otevřená množina.

Tuto větu můžeme vysloviti také takto:

Charakter množiny $M \subset P$ je spočetný, když a jen když množina M má kompaktní břeh.[1])

Dokažme nejprve, že obě věty jsou ekvivalentní.

---

[1]) t. j. množina $M . \overline{M} . \overline{P - M}$; v. Čech, Bodové množiny I, str. 56.

Nechť
$$M = K + G$$
je rozklad množiny M na kompaktní a otevřenou část. Břeh $\mathbf{B}(M)$ je ta část hranice množiny M, jež náleží do M; nemá tedy žádného bodu společného s otevřenou G. Proto $\mathbf{B}(M) = \bar{M} \,.\, \overline{P - M} \,.\, K$. Množina $\mathbf{B}(M)$ je tudíž kompaktní, neboť je průnikem uzavřené a kompaktní množiny.

Platí-li naopak věta druhá, pak rozklad množiny M vypadá takto:
$$M = \mathbf{B}(M) + (M - \mathbf{B}(M)).$$
Tím je ekvivalence obou vět dokázána.

Dokažme nyní první větu.

Je-li $M = \emptyset$, pak je věta zřejmá. Předpokládejme tedy, že množina M není prázdná.

Je-li $\chi(M) = 1$, pak množina M je otevřená a dá se takto rozložiti na kompaktní a otevřenou část:
$$M = (x) + M, \quad x \in M.$$
Nechť nyní $\chi(M) = \aleph_0$. Buď
$$\mathfrak{S} = G_1, G_2, G_3, \ldots$$
spočetný úplný systém okolí množiny M. Dokažme, že břeh $\mathbf{B}(M)$ množiny M je kompaktní, tedy, že v každé posloupnosti bodů z $\mathbf{B}(M)$ existuje vybraná posloupnost, jež konverguje k některému bodu z břehu $\mathbf{B}(M)$.

Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodová posloupnost v $\mathbf{B}(M)$. Zvolme v komplementu $P - M$ posloupnost bodů $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby
$$y_n \in \prod_{i=1}^{n} G_i - M \text{ a vzdálenost } \varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$
Takové body y_n existují, neboť v libovolné vzdálenosti od bodu x_n se nacházejí body z $\prod\limits_{i=1}^{n} G_i - M$. Množina $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y_n)$ není uzavřená, neboť jinak by okolí $P - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (y_n)$ množiny M neobsahovalo žádné okolí G_n, takže $\mathfrak{S}$ by nebyl úplný systém okolí množiny M. Proto existuje[2]) bod $y \in P$, jenž je limitou bodové posloupnosti $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ vybrané z $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Týž bod je limitou posloupnosti $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, takže $y \in \bar{M} \,.\, \overline{P - M}$. Kdyby bod y nenáležel do množiny M, pak by okolí $P - \sum\limits_{i=1}^{\infty} (y_{n_i}) - (y)$ množiny M neobsahovalo žádné okolí G_n, takže systém $\mathfrak{S}$ by nebyl úplný. Proto $y \in M \,.\, \bar{M} \,.\, \overline{P - M} = \mathbf{B}(M)$. Množina $\mathbf{B}(M)$ je tudíž kompaktní.

[2]) To vyplývá z věty 8·2·1, l. c. [1]) str. 40.

Předpokládejme nyní, že množina M je součtem kompaktní a otevřené množiny $M = K + G$. Je-li $K = \emptyset$, pak M je otevřená a $\chi(M) = 1$. V opačném případě je systém

$$\mathfrak{S} = \underset{x}{E}[\varrho(x, K) < 1] + G, \quad \underset{x}{E}[\varrho(x, K) < \tfrac{1}{2}] + G,$$
$$\underset{x}{E}[\varrho(x, K) < \tfrac{1}{3}] + G, \ldots$$

úplný systém okolí množiny M. Vskutku, je-li H okolím množiny M, pak je $K \subset H$ a protože H je otevřená, je $\overline{H} . \overline{P - H} . K = \emptyset$. Proto vzdálenost[3])

$$\varrho(K, \overline{H} . \overline{P - H}) = \delta > 0,$$

takže pro $m > \dfrac{1}{\delta}$ je $\underset{x}{E}\left[\varrho(x, K) < \dfrac{1}{m}\right] + G \subset H$.

Poznámka. Charakter množiny A je topologická vlastnost, neboť úplný systém okolí množiny A přejde homeomorfním zobrazením f zase v úplný systém okolí množiny $f(A)$; platí tedy uvedená věta v metrisovatelných prostorech, zejména také v prostoru, jejž Menger nazval separabilním.

V metrickém prostoru P platí tyto dvě věty, které dokázal prof. Čech:

Charakter každé uzavřené podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když

$$P = K + J,$$

kde K je kompaktní a J je isolovaná množina.

Jiné znění této věty je toto:

Charakter každé uzavřené podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když derivace prostoru P je kompaktní.

Platí-li prvá věta, pak derivace prostoru P je částí množiny K, a, jakožto uzavřená, je také kompaktní. Má-li naopak prostor P kompaktní derivaci P', dá se tento rozložiti na kompaktní P' a isolovanou $P - P'$.

Dokažme větu v prvém tvaru.

Označme J množinu všech isolovaných bodů prostoru P a pro nepřímý důkaz předpokládejme, že v $P - J$ existuje bodová posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, z níž se nedá vybrat konvergentní. Uzavřená množina $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)$ je pak svým vlastním břehem, jenž má podle předpokladu spočetný charakter. Podle předešlé věty je množina $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)$ kompaktní. To je spor.

---

[3]) L. c. [1]) str. 107, věta 17·3·4.

Je-li nyní F uzavřená podmnožina prostoru $P = K + J$, pak její břeh, jenž je identický s její hranicí, náleží do množiny K, takže je kompaktní. Podle předešlé věty je charakter množiny F spočetný.

Charakter každé podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když prostor má konečný počet hromadných bodů.

Důkaz. Nechť charakter každé podmnožiny prostoru P je spočetný. Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho hromadných bodů. Může nastat jeden z obou těchto případů: buď se dá z těchto hromadných bodů vybrat konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $x \neq x_n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, nebo existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hromadných bodů, z níž se nedá vybrat konvergentní. V obou případech je množina $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ svým vlastním břehem, jenž není kompaktní, takže podle prvé věty je charakter množiny $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ nespočetný. To je spor.

Má-li naopak prostor P konečný počet hromadných bodů, pak břeh každé množiny M je konečný, tedy kompaktní. Charakter $\chi(M)$ je tudíž spočetný.

Brno, topologický seminář, 1936.

Über den Charakter von Mengen.

(Auszug aus dem vorangehenden Artikel.)

Ein System $\mathfrak{S}$ bestehend aus Umgebungen einer Menge A in einem topologischen Raum nennt man vollständig, wenn jede Umgebung der Menge A eine Umgebung aus dem System $\mathfrak{S}$ als Teilmenge enthält. Es gibt ein vollständiges System $\mathfrak{S}'$ mit der kleinsten Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit heisst Charakter der Menge A.

In jedem metrisierbaren Raum P gilt folgender Satz:

Der Charakter einer Menge $M \subset P$ ist dann und nur dann abzählbar, wenn die Menge M einen kompakten Rand hat.

Herr Prof. Čech hat folgende zwei Korollare bewiesen:

Der Charakter jeder Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum eine endliche Ableitung besitzt.

Der Charakter jeder abgeschlossenen Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum P eine kompakte Ableitung hat.