Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Poznámka k číslům Bernoulliho

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 24--27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122511

kde $n \equiv 1 \pmod{4}$ a čísla n, k jsou nesoudělna. Přejdeme-li k hodnotě sdružené, plyne za stejných podmínek

$$\sum_{a=0}^{|4k|-1} e^{-\frac{a^2 n\pi i}{2k}} = \left(\frac{n}{k}\right)(1-i)\sqrt{-4k}\,.$$

Poznámka k číslům Bernoulliho.

Napsal

Dr. Karel Petr,

professor v Olomouci.

Sčítáme-li 2., 5., 8., 11., . . . člen rekurrentního vzorce *Moivreova* pro čísla Bernoulliho, obdržíme výraz obsahující čísla Bernoulliho o indexech dle modulu 3 shodných. Jest pozoruhodno, že tento výraz jednoduše dá se ustanoviti. Obdržíme tak formuli, kteráž pro výpočet určitého čísla Bernoulliho téměř devětkrát jest výhodnější než formule Moivreova; jednak jest totiž třeba počítat jenom třetinu předcházejících, jednak pro výpočet jednotlivého čísla máme vzorec třikráte kratší.

Okolnost tuto, že z formule Moivreovy část členů jakožto známá se může vyjmouti, která, ač i z jiných ohledů než právě dotčeného, jest dosti zajímavá, dosud byla nepovšimnuta, hodláme v následujícím dokázati.

Kořeny rovnice

$$x(1-x)-1=0$$

označme ε_1, ε_2; platí mezi nimi vztahy, jak z rovnice ihned patrno,

$$\varepsilon_1 = 1-\varepsilon_2\,, \qquad \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = -1$$

$$s_{3k} = \varepsilon_1^{3k} + \varepsilon_2^{3k} = \mp 2, \quad s_{3k+1} = s_{3k+2} = \pm 1\,.$$

Znaménko horní platí pro indexy liché, dolní pro indexy sudé. Lze psáti tudíž identicky

$$(x-\varepsilon_1)^m = [(x-1)+\varepsilon_2]^m$$

$$(x-\varepsilon_2)^m = [(x-1)+\varepsilon_1]^m.$$

Umocníme-li a sčítáme-li tyto identity, dostaneme

$$2x^m - m_1 x^{m-1} - m_2 x^{m-2} + 2m_3 x^{m-3} - m_4 x^{m-4}$$
$$- m_5 x^{m-5} + 2m_6 x^{m-6} - \ldots$$
$$= 2(x-1)^m + m_1 (x-1)^{m-1} - m_2 (x-1)^{m-2} - 2m_3 (x-1)^{m-3}$$
$$- m_4 (x-1)^{m-4} + m_5 (x-1)^{m-5} + 2m_6 (x-1)^{m-6} + \ldots$$

anebo

$$-(x+1)^m + 3x^m + 3m_3 x^{m-3} + 3m_6 x^{m-6} + \ldots$$
$$= -(x-1-1)^m + 3(x-1)^m - 3m_3 (x-1)^{m-3}$$
$$+ 3m_6 (x-1)^{m-6} - \ldots$$

Tato identita vede nás k analogické pro funkce Bernoulliho. Tyto budeme zde definovati jakožto celistvé racionálné funkce pro celistvé hodnoty argumentu rovnicí

$$\varphi_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + x^m.$$

Dosadíme-li do odvozené identity za $x = 1, 2, 3, \ldots, x$ a pak sečteme, obdržíme po snadné redukci

$$-(x+1)^m + 1 + 6[m_3 \varphi_{m-3} + m_9 \varphi_{m-9} + m_{15} \varphi_{m-15} + \ldots]$$
$$= (x-1)^m - (-1)^m + x^m - 3[x^m - m_3 x^{m-3} + m_6 x^{m-6} - \ldots],$$

ve kterémžto vztahu tř·ba po případě vynechati člen od x nezávislý v závorce hranaté na pravé straně. Tuto identitu lze též psáti

$$m_3 \varphi_{m-3} + m_9 \varphi_{m-9} + m_{15} \varphi_{m-15} + m_{21} \varphi_{m-21} + \ldots$$
$$(\alpha) \quad = \frac{1}{3}\left[m_2 x^{m-2} + m_4 x^{m-4} + m_6 x^{m-6} + \ldots\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[m_3 x^{m-3} - m_6 x^{m-6} + m_9 x^{m-9} - \ldots\right].$$

Členy na x nezávislé v závorkách se již nevyskytují.

Dosadíme-li za φ_k různé výrazy a srovnáme-li koefficienty stejných mocnin x, dostaneme různé vzorce rekurrentní pro čísla Bernoulliho. Odvodíme zde jenom jediný, užívajíce vyjádření funkce Bernoulliho sudého indexu jakožto funkce argumentu x.*) Jest, jak známo,

*) Mohli bychom též vyjádřiti B. f. jakožto funkce argumentu $(2x+1)$, kteréžto vyjádření by nás vedlo k relacím mezi tangentovými koefficienty.

$$\varphi_{2\mu} = (-1)^{\mu+1} B_\mu x + x^2 \psi_{2\mu}, \quad \varphi_0(x) = x,$$

značí-li B_μ číslo μ-té Bernoulliho, $\psi_{2\mu}$ celistvou racionální funkci x.

Pokládáme-li v identitě (α) m za liché tvaru $2\mu + 3$ a srovnáme-li prvé mocniny x na obou stranách, dostaneme tento vztah pro čísla Bernoulliho:

$$1) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k, \ (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu-3} B_3 = (-1)^{\mu+1} \frac{2\mu}{3} \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k+1, \ (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu+1} B_1 = (-1)^{\mu+1} \frac{2\mu+3}{3} \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} &\mu = 3k+2, \ (2\mu+3)_3 B_\mu - (2\mu+3)_9 B_{\mu-3} \\ &+ (2\mu+3)_{15} B_{\mu-6} - \ldots \pm (2\mu+3)_{2\mu-1} B_2 = (-1)^\mu \frac{2\mu+3}{6}. \end{aligned}$$

Jestliže tyto formule srovnáme se vzorcem *Moivreovým* (Z „Miscellanea analytica“, r. 1730. p. 6., viz Saalschütz: „Vorlesungen über Bernoullische Zahlen“ pag. 7.)

$$\begin{aligned} &(2m+1)_1 B_m - (2m+1)_3 B_{m-1} + (2m+1)_5 B_{m-2} - \ldots \\ &= (-1)^{m+1} \left(m - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

vidíme ihned, že pro $m = \mu + 1$ členy naší formule shodují se s 2., 5., . . . členem formule Moivreovy.

Podotýkáme ještě, že způsobu, kterého jsme zde použili, dá se užiti k vyvození všech tak zvaných zkrácených formulí pro čísla Bernoulliho, jež jsou obsaženy ve spisu Saalschützově již citovaném. Stačí rozvinouti dle poučky binomické výraz

$$x^m (x-1)^n$$

jednou dle mocnin x, podruhé dle mocnin $x - 1$. Z identity tak vzniklé a z jiné jednonásobnou integrací*) z této odvozené, dají se odvoditi formule *Seidelovy* a *Sternovy a Saalschützovy.*

---

*) Tuto integraci lze však snadno nahraditi elementárným důkazem

Prvé odvozuje Stern v „Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1878 způsobem poněkud dlouhým pomocí differenčních řad; Saalschütz pak ke své formuli přichází pomocí součtové řady Mac Laurinovy.

Ostatně plynou z identit dotčených též identity příslušné pro funkce Bernoulliho.

Příspěvek k theorii lemniskaty.

Podává

Dr. K. Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebu.

Lemniskata, jejíž rovnice jest

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0, \tag{1}$$

je křivkou racionální. Každý kruh, jenž se dotýká lemniskaty v reálném dvojném bodě, protíná ji v 7 pevných bodech, osmý průsek jeho je závislý na poloměru u toho kruhu jednoznačně, t. j. můžeme souřadnice toho bodu vyjádřiti pomocí poloměru u jako racionálního parametru. Obdržíme

$$\begin{aligned} x &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2+u^2)}{a^4+u^4} \\ y &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2-u^2)}{a^4+u^4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Substitucí

$$u=at,\quad a\sqrt{2}=c \tag{3}$$

obdrží rovnice (2) tvar*)

$$\begin{aligned} x &= c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y &= c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Vložíme-li hodnoty (4) do rovnice kruhu, obdržíme ihned

---

*) Parametru u užívá *Dr. Em. Weyr* ve svém pojednání: „Die Lemniscate in razionaler Behandlung.“ Praha, 1873. Jinou cestou algebraickou přichází *Hermite* k rovnici (4) lemniskaty ve svém: „Cours d'Analyse.“ Paris, 1873, pg. 242.