

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

O některých integrálech omezených

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 32–36

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122509>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1899

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O některých integrálech omezených.

Podává

M. Lerch,
prof. ve Freiburgu Švýcarském.

Vzorec

$$(1) \int_{u+w}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2 - 2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx$$

lze takto dokázati. Položme

$$f(u) = e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx,$$

a diferencujeme vůči u dle známého pravidla; tak vyjde nejprve

$$\begin{aligned} f'(u) &= -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{w^2 \cos 2ux - wx \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx \\ &\quad - 2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{wx \sin 2ux + x^2 \cos 2ux}{w^2 + x^2} dx \end{aligned}$$

a tedy po sečtení

$$f'(u) = -2e^{-2uw} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux dx.$$

Jeden z nejznámějších vzorců počtu integrálního

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ux dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-u^2}$$

poskytne

$$f'(u) = -\sqrt{\pi} e^{-u^2 - 2uw},$$

z čehož plyne integrací

$$f(u) = \sqrt{\pi} \int_u^{\infty} e^{-z^2 - 2uz} dz = e^{w^2} \sqrt{\pi} \int_{u+w}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

poněvadž funkce $f(u)$ se blíží nulle, roste-li u do nekonečna ; druhý tvar vznikl substitucí $z = x + w$.

Tím vzorec (1) dokázán.

Klade-li se $w = 0$, vyjde ze vzorce (1)

$$(2) \quad \int_w^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-w^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2}.$$

V rovnici (1) nelze klásti $w = 0$ (obě veličiny u a w původně byly předpokládány kladnými), i jest otázka, jak lze tu přejíti k mezím pro $w = 0$.

Tu užijeme nejprve rovnice $\cos 2ux = 1 - 2 \sin^2 ux$, čímž integrál se rozpadne ve dva :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w \cos 2ux - x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2} \\ &- \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{2w \sin^2 ux + x \sin 2ux}{w^2 + x^2} dx; \end{aligned}$$

poslední integrál má pro $w = 0$ limitu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx,$$

i zbývá jen vyšetřiti limitu integrálu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{w dx}{w^2 + x^2};$$

ta jest podle vzorce (2) rovna integrálu

$$\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

a tedy bude v případě $w = 0$ vzorec (1) zníti

$$(3) \quad \int_w^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2ux}{x} dx.$$

Z tohoto vzorce vychází

$$\sqrt{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} e^{-vx^2} \frac{\sin 2x}{x} dx ;$$

rovnici tuto násobme na obou stranách $e^{-av}dv$ a integrujme od nuly do nekonečna, takže

$$\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-av} dv \int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2a} - \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

Přetvořme nejprve integrál v pravo. Ten lze psát po změně pořádku integračního takto

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \int_0^{\infty} e^{-v(a+x^2)} dv,$$

a poněvadž vnitřní integrace poskytne výsledek

$$\frac{1}{a+x^2},$$

bude hodnota tohoto integrálu dvojnásobného

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx^2}{a+x^2}.$$

Abychom pak přetvořili integrál na levé straně, t. j.

$$\int_0^{\infty} e^{-av} dv \int_{\frac{1}{\sqrt{v}}}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

uvažme, že to integrál dvojnásobný

$$\int \int e^{-av-x^2} dv dx,$$

jehož obor integrační dán jest podmínkami $vx^2 \geq 1$, $x \geq 0$. Poněvadž integrál ten jest absolutně konvergentní, nezávisí na pořádku integrace, i lze nejprve integrovati vůči v , takže máme výraz

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x^2}}^{\infty} e^{-v^2 - vx} dv = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx.$$

Tím způsobem nacházíme vztah

$$\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = \frac{\pi}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx}{a + x^2}.$$

Integrál na levé straně stojící lze však vyčíslení. Užije-li se identity

$$x^2 + \frac{a}{x^2} = \left(x - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2 + 2\sqrt{a},$$

obdrží se

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = e^{-2\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-\left(x - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2} dx$$

a zde substituce

$$x - \frac{\sqrt{a}}{x} = 2z$$

poskytne

$$x = z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}, \quad dx = \frac{z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} dz,$$

takže náš výraz bude

$$e^{-2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2} \frac{z + \sqrt{z^2 + \sqrt{a}}}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} dz;$$

avšak tento výraz rozpadá se ve dva

$$e^{-2\sqrt{a}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 + \sqrt{a}}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2} dz \right\};$$

první z těchto dvou integrálů rovná se nulle, druhý má hodnotu $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{a}};$$

následkem toho poslední výsledek bude zníti

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2a} e^{-2\sqrt{a}};$$

píšeme-li

$$a = \frac{u^2}{4}, x = \frac{z}{2},$$

vyjde tvar pěknější

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} \frac{dz}{u^2+z^2} = \frac{\pi}{2u^2} (1 - e^{-u}).$$

Odtud vyvodí se další vzorec obsahující integrální logaritmus, násobí-li se du a integruje-li se od u do nekonečna. Tak vyjde nejprve

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u} dx = \frac{\pi}{2u} - \frac{\pi}{2} \int_u^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z^2}.$$

Po částečné integraci máme

$$\int_u^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z^2} = \frac{e^{-u}}{u} - \int_u^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z} = \frac{e^{-u}}{u} + e^{-u} \log u - \int_u^{\infty} e^{-z} \log z dz$$

a tedy

$$(5) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{u} dx = \frac{1 - e^{-u}}{u} - e^{-u} \log u \\ + \int_u^{\infty} e^{-z} \log z dz.$$
