Vavřinec Jelínek

O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 88--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122508`

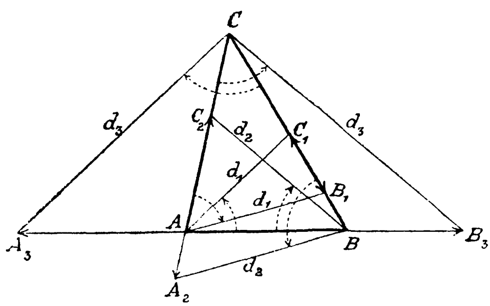
O trojúhelníku, od jehož každého úhlu ostatní dva jsou odečteny.*)

Pojednává

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

Odečtěme od každého úhlu trojúhelníka ostatní dva jeho úhly, přenášejíce úhel, který odečítáme, ku protilehlé straně. Z každého vrcholu budou vycházeti ku protilehlé straně dvě sobě rovné odčítací příčky, které tuto stranu rozdělí na dvě odčetné přímky a zbytek.



Odčítací příčky nazveme krátce „příčkami" a poznamenáme je písmenou d, rozeznávajíce je indexem dle vrcholu, z něhož vycházejí neb dle strany, kterou protínají. Na př.: $d_1 = AB_1 = AC_1$ jest příčka vycházející z prvního vrcholu A a protínající první stranu a. Pravíme tedy: d_1 jest příčka úhlu α nebo strany a.

Odčetné přímky, krátce „úseky" nazvané, poznamenáme písmenem strany, od níž přímka byla useknuta, a ježto na každé straně nastanou úseky dva, připojíme k tomuto písmenu ještě index souhlasný s úhlem, jehož odečtením úsek vznikl. Na př.: $b_1 = CA_2$ a $b_3 = AC_2$ jsou úseky téže strany b, první vznikl odečtením úhlu α, druhý odečtením úhlu γ od úhlu β. Index tento také udává vrchol, ku kterému úsek směřuje. Vrchol troj-

*) Předpokládá se částečné pojednání: „Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník", str. 79.

úhelníka, z něhož úsek vychází, vyčteme ze symbolu pro úsek, přidáme-li scházející tu číslo: b znamená 2. stranu, 3 třetí úhel; v symbolu b_3 schází číslo 1; vychází tedy $b_3 = AC_2$ z vrcholu A.

Dva úseky ($a_2 = CB_1$, $b_1 = CA_2$) na různých stranách (a, b), vycházející ze společného vrcholu (C), nazveme „horními" úseky dvou stran. Dva úseky ($a_3 = BC_1$, $b_3 = AC_2$), směřující ku společnému průsečíku (C) jejich stran (a, b), jmenujeme „dolními" úseky těchto stran.

Představíme-li si každou stranu jakožto základnu trojúhelníka před sebou od levé k pravé ruce, rozeznáváme její úseky na „levý" a „pravý" úsek dle polohy vrcholu, z něhož úsek vychází; na př. $c_2 = AB_3$ jest levý, $c_1 = BA_3$ pravý úsek strany c. Úseky téže strany jsou protisměrné. Všechny levé úseky jsou stejnosměrné a vznikly odečtením různých úhlů, jsou tedy různoúhlé; taktéž pravé úseky. Dva horní úseky jsou různoúhlé, dva dolní jsou stejnoúhlé.

Vzdálenost od konce jednoho úseku ku konci úseku druhého téže strany zoveme „úsekem" této strany a znamenáme písmenem e, jehož index souhlasí s příslušnou stranou čili s protilehlým úhlem; na př. $e_2 = A_2C_2$ jest úsekem strany b a leží tedy proti úhlu β.

Přímky: a, d_1, c_1, b_1, e_1, jsou stejnoúhlé, všechny náleží úhlu α.

Mimo úhly napočteme tedy v tomto trojúhelníku 15 přímek, jichž vzájemné vztahy stanoviti hodláme.

Z rovnosti úhlů následují podobnosti trojúhelníků:

$$\begin{aligned} ABC &\sim AB_1C \sim ABC_1 \\ &\sim A_2BC \sim ABC_2 \\ &\sim A_3BC \sim AB_3C \end{aligned}$$

a tudíž úměry

$$(1)\qquad \begin{aligned} a : b : c &= b : a_2 : d_1 = c : d_1 : a_3 \\ &= b_1 : a : d_2 = d_2 : c : b_3 \\ &= c_1 : d_3 : a = d_3 : c_2 : b \\ &= \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \end{aligned}$$

Jsou-li tedy z těchto hodnot dány tři na sobě nezávislé, lze dle uvedených úměr vypočítati všechny ostatní.

Na př. jsou-li dány tři strany, najdeme

z poměru	1. a 2.	a_2, d_1,
	1. a 3.	a_3,
	1. a 4.	b_1, d_2,
	1. a 5.	b_3,
	1. a 6.	c_1. d_3,
	1. a 7.	c_2,
	1. a 8.	α, β, γ.

Místo abychom podobným způsobem řešili trojúhelník pro ostatní kombinace jmenovaných hodnot, upozorníme zvláště na některé výsledky úměr v (1) a odvodíme ještě jiné rovnice, jimiž se řešení trojúhelníka zjednoduší.

Poměry 2. a 3., 4. a 5., 6. a 7. dávají rovnice

$$(2) \qquad d_1 = \sqrt{a_2 a_3}\,, \quad d_2 = \sqrt{b_1 b_3}\,, \quad d_3 = \sqrt{c_1 c_2}\,,$$

kteréž praví, že každá příčka jest střední měřickou úměrnou mezi oběma úseky své strany.

Dle	2. a 4.	poměru jest:	$ab = a_2 b_1$,
„	1. a 7.	„ „	$ab = c d_3$,
„	2. a 6.	„ „	$ab = c_1 d_1$,
„	4. a 7.	„ „	$ab = c_2 d_2$.

Z rovnic těchto a jiných obdobně sestavených následuje:

$$(3) \qquad \begin{aligned} ab &= a_2 b_1 = c d_3 = c_1 d_1 = c_2 d_2, \\ ac &= a_3 c_1 = b d_2 = b_1 d_1 = b_3 d_3, \\ bc &= b_3 c_2 = a d_1 = a_2 d_2 = a_3 d_3, \end{aligned}$$

t. j. součin dvou stran se rovná součinu jejich horních úseků neb součinu třetí strany s její příčkou aneb součinu z příčky některé této strany se stejnoúhlým úsekem strany třetí.

Násobíme-li součiny na 1., 2. neb 3. řádce v (3) funkcemi: $\frac{1}{2}\sin\gamma$, $\frac{1}{2}\sin\beta$ neb $\frac{1}{2}\sin\alpha$, obdržíme tolikéž různých výrazů pro plochu trojúhelníka.

Z úměr v (1)

$$a : b = b_1 : a, \quad a : c = c_1 : a, \quad a : d_2 = d_3 : a$$

a z jiných obdobně sestavených vychází

$$
(4)\qquad \begin{aligned} a^2 &= bb_1 = cc_1 = d_2d_3, \\ b^2 &= cc_2 = aa_2 = d_1d_3, \\ c^2 &= aa_3 = bb_3 = d_1d_2, \end{aligned}
$$

t. j. každá strana jest střední měřickou úměrnou mezi druhou stranou a přilehlým úsekem této, i mezi příčkami obou druhých stran.

Součtem dvou a dvou rovnic v (4) najdeme

$$
(5)\qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= c\,(c_1 + c_2), \\ a^2 + c^2 &= b\,(b_1 + b_3), \\ b^2 + c^2 &= a(a_2 + a_3), \end{aligned}
$$

t. j. součet zdvojmocněných dvou stran se rovná součinu třetí strany se součtem jejích úseků. Je-li některý úhel pravým, jest součet úseků protilehlé strany roven této straně a případná rovnice v (5) přejde do věty Pythagorovy.

Součin stejnomístných členů v rovnicích (4)

$$
a^2b^2c^2 = abc\,.\,a_3b_1c_2 = abc\,.\,a_2b_3c_1 = d_1^2d_2^2d_3^2
$$

dá, hledíme-li k tomu, že o sobě jest $abc = d_1d_2d_3$, souvislý vztah mezi stranami, stejnosměrnými úseky a příčkami

$$
(6)\qquad abc = a_3b_1c_2 = a_2b_3c_1 = d_1d_2d_3.
$$

Abychom našli podobný vztah mezi skupinami tří sousedních úseků ku stranám a příčkám, násobme stejnomístné členy dvou rovnic v (4)

$$
a^2b^2 = bc\,.\,b_1c_2 = ac\,.\,a_2c_1 = d_1d_2d_3^2
$$

a nahraďme součiny stran (zde bc a ac) dle (3) součinem jejich horních úseků, pak obdržíme z této i z obdobně sestavených rovnic

$$
(7)\qquad \begin{aligned} (ab)^2 &= b_1b_3c_2^2 = a_2a_3c_1^2 = d_1d_2d_3^2, \\ (ac)^2 &= a_2a_3b_1^2 = c_1c_2b_3^2 = d_1d_2^2d_3, \\ (bc)^2 &= b_1b_3a_2^2 = c_1c_2a_3^2 = d_1^2d_2d_3. \end{aligned}
$$

Násobíme-li první tři členy každé rovnice v (4) stranou buď a neb b neb c:

$$a^3 = ab \,.\, b_1 = ac \,.\, c_1,$$
$$b^3 = bc \,.\, c_2 = ab \,.\, a_2,$$
$$c^3 = ac \,.\, a_3 = bc \,.\, b_3$$

a nahradíme-li pak každý součin dvou stran každou jeho hodnotou dle (3), obdržíme:

$$\begin{aligned} a^3 &= a_2 b_1^2 = a_3 c_1^2 \\ &= bc_1 d_2 = cb_1 d_3 \\ &= b_1 c_2 d_2 = b_3 c_1 d_3 \\ &= b_1 c_1 d_1; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b^3 &= b_3 c_2^2 = b_1 a_2^2 \\ &= ac_2 d_1 = ca_2 d_3 \\ &= a_2 c_1 d_1 = a_3 c_2 d_3 \\ &= a_2 c_2 d_2; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} c^3 &= a_3^2 c_1 = b_3^2 c_2 \\ &= ab_3 d_1 = ba_3 d_2 \\ &= a_2 b_3 d_2 = a_3 b_1 d_1 \\ &= a_3 b_3 d_3. \end{aligned}$$

(Dokončení.)

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$x^3 (x^2 + 1) - 8x^2 (x - 1) = \frac{4 (x^3 + 1) - x^2 (x - 1)}{4}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 2.

Kolik kladných celistvých řešení má rovnice

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1?$$

Týž.

Úloha 3.

Které úhly nepřesahující 360^0 činí zadost rovnici

$$tg\, x + tg^3 x + tg^5 x + \ldots = \frac{1}{2} \sqrt{sin^2 x + sin^4 x + sin^6 x + \ldots}.$$

Týž.