Prvé odvozuje Stern v „Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ 1878 způsobem poněkud dlouhým pomocí differenčních řad; Saalschütz pak ke své formuli přichází pomocí součtové řady Mac Laurinovy.

Ostatně plynou z identit dotčených též identity příslušné pro funkce Bernoulliho.

Příspěvek k theorii lemniskaty.

Podává

Dr. K. Zahradník,

ř. professor mathematiky při universitě v Záhřebu.

Lemniskata, jejíž rovnice jest

$$(1)\qquad (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0,$$

je křivkou racionální. Každý kruh, jenž se dotýká lemniskaty v reálném dvojném bodě, protíná ji v 7 pevných bodech, osmý průsek jeho je závislý na poloměru u toho kruhu jednoznačně, t. j. můžeme souřadnice toho bodu vyjádřiti pomocí poloměru u jako racionálního parametru. Obdržíme

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2+u^2)}{a^4+u^4} \\ y &= a^2\sqrt{2}\,\frac{u(a^2-u^2)}{a^4+u^4}. \end{aligned}$$

Substitucí

$$(3)\qquad u=at,\quad a\sqrt{2}=c$$

obdrží rovnice (2) tvar*)

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ y &= c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4}. \end{aligned}$$

Vložíme-li hodnoty (4) do rovnice kruhu, obdržíme ihned

---

*) Parametru u užívá *Dr. Em. Weyr* ve svém pojednání: „Die Lemniscate in razionaler Behandlung.“ Praha, 1873. Jinou cestou algebraickou přichází *Hermite* k rovnici (4) lemniskaty ve svém: „Cours d'Analyse.“ Paris, 1873, pg. 242.

$$(5) \qquad t^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}}t^{\mathrm{III}}t^{\mathrm{IV}} = 1$$

jakožto podmínku, dle které čtyři body lemniskaty t^{I}, t^{II}, t^{III}, t^{IV} leží na jednom kruhu.

Píšeme-li $t^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{III}} = t^{\mathrm{IV}} = t$, obdržíme

$$(6) \qquad t^3 t^{\mathrm{I}} = 1,$$

kterážto rovnice podává vztah mezi bodem oskulačním t kruhu křivosti a jeho reálným průsekem t' s lemniskatou.

Z rovnice (6) vychází, že každým bodem t' lemniskaty tři kruhy křivosti procházejí a to jeden reálný a dva imaginárné. Parametry bodů oskulačních obdržíme jako kořeny kubické rovnice

$$(7) \qquad t^3 \; \frac{1}{t'}.$$

Z této rovnice plyne ihned, označíme-li t_1, t_2 t_3 její kořeny, že body oskulační t_1, t_2, t_3 kruhů křivosti procházejících bodem t' lemniskaty opět na jednom kruhu leží, což lze i takto dokázati. Jelikož tato vlastnost*) dle Joachimsthala kuželosečce připadá, a z kuželosečky inversí kardioidu, lemniskatu, cissoidu atd. obdržíme, platí tato vlastnost též pro uvedené křivky, tudíž i pro lemniskatu zvláště.

Píšeme-li k vůli krátkosti:

$$t_1 + t_2 + t_3 = (t)_1$$
$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = (t)_2$$
$$t_1t_2t_3 = (t)_3,$$

obdržíme z rovnice (7)

$$(8) \qquad (t)_1 = 0, \; (t)_2 = 0, \; (t)_3 = \frac{1}{t'},$$

tudíž též

$$(8') \qquad (t^{3\lambda})_1 = \frac{3}{t^\lambda}, \quad (t^{3\lambda})_2 = \frac{3}{t^{2\lambda}}, \quad (t^\mu)_1 = (t^\mu)_2 = o,$$

kdež $\mu \neq 3\lambda$, λ i μ jsou čísla celá i positivná a místo t' jsme jednoduše psali t.

---

*) Viz *K. Zahradník*: „Vlastnosti jistých trojin oskulačních na kuželosečce. Archiv math. a fysiky, II. díl, Praha, 1879.

Tři body oskulační t_1, t_2, t_3, jež sdruženy jsou bodu t', t. j. jejichž kruhy křivosti společně probíhají bodem t' lemniskaty, jmenujeme trojinou bodů oskulačních.

Těžiště trojiny oskulační.

Budiž T (ξ, η) těžiště trojiny oskulační t_1, t_2, t_3 sdružené bodu t. Vzhledem k rovnicím (8) i (8′) obdržíme

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= \frac{c}{3}\sum_{h=1}^{3}\frac{t_h(1+t_h^2)}{1+t_h^4} = c\,\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}\\
\eta &= \frac{c}{3}\sum_{h=1}^{3}\frac{t_h(1-t_h^2)}{1+t_h^4} = c\,\frac{t(1-t^2)}{1+t^4},
\end{aligned}
$$

neb jest

$$
\begin{gathered}
\Sigma(t_1+t_1^3)(1-t_1^4+t_2^4t_3^4) = (t^3)_1 + (t)_3(t^3)_2\\
\Sigma(t_1-t_1^3)(1-t_1^4+t_2^4t_3^4) = -(t^3)_1 + (t)_3(t^3)_2\\
\Pi(1+t^4) = 1+(t)_3^4.
\end{gathered}
$$

Leží tudíž těžiště trojiny oskulační na lemniskatě i jest oným bodem, jemuž je ta trojina sdružená.

Kruh opsaný trojině oskulační.

Rovnice kruhu probíhajícího třemi body jest

$$
(10)\qquad
\begin{gathered}
(x^2+y^2)\,|\,x, y, 1\,| - x\,|\,x^2+y^2, y, 1\,|\\
+\,y\,|\,x^2+y^2, x, 1\,| - |\,x^2+y^2, x, y\,| = 0.
\end{gathered}
$$

Za trojinu oskulační však platí

$$
|\,x, y, 1\,| = -2c^2\varDelta\frac{(t)_1+(t)_2(t)_3}{\prod\limits_{h=1}^{3}(1+t_h^4)} = 0,
$$

a to za příčinou rovnic (8) i (8′); mimo to jest

$$
\begin{aligned}
|\,x^2+y^2, y, 1\,| &= -2c^3\varDelta\frac{1+(t)_3^2}{\Pi(1+t^4)}\\
|\,x^2+y^2, x, 1\,| &= -2c^3\varDelta\frac{1-(t)_3^2}{\Pi(1+t^4)}\\
|\,x^2+y^2, x, y\,| &= 4c^4\varDelta\frac{(t)_3}{\Pi(1+t^4)},
\end{aligned}
$$

znamená-li

$$\Delta = |1, t, t^2|.$$

Rovnice kruhu (10) přechází, jsou-li ty tři body, jimiž probíhá, trojinou oskulační, ve tvar

$$[1 + (t)_3^2]\, x - [1 - (t)_3^2]\, y - 2c\,(t)_3 = 0,$$

t. j. v rovnici

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{P} \equiv (1 + t^2)\, x + (1 - t^2)\, y - 2ct = 0.$$

Kruh opsaný trojině oskulační skládá se z přímky úběžné a z přímky P, která bodem t, jemuž je trojina oskulační sdružená, probíhá.

Přímka P je společná tětiva reálného kruhu křivosti a lemniskaty. Opíše-li bod t lemniskatu, obaluje přímka P rovnoosou hyperbolu

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{H} \equiv x^2 - y^2 - c^2 = 0,$$

jejíž reálná poloosa $OA = c$.

Sestrojení středu křivosti.

Jak známo, je lemniskata průmětnice rovnoosé hyperboly, pokládáme-li její střed za pol. Z toho plyne sestrojení bodu oskulačního reálného kruhu křivosti, jenž bodem t probíhá, konstrukce ta, k níž *Dr. Em. Weyr**) dospěl zcela jinou cestou. *Na $\overline{Ot}$ sestrojme v bodě t kolmici. Její průsek s lemniskatou je hledaný bod t^*.* Naopak můžeme k bodu t^* lemniskaty jako bodu oskulačnímu nalézti sdružený bod t jakožto průsek kruhu s lemniskatou, je-li průměr kruhu Ot^*.

Jelikož sestrojení normály v bodu lemniskaty nečiní žádných obtíží, je tím i jednoduchá konstrukce poloměru křivosti i středu křivosti v bodě lemniskaty dána.

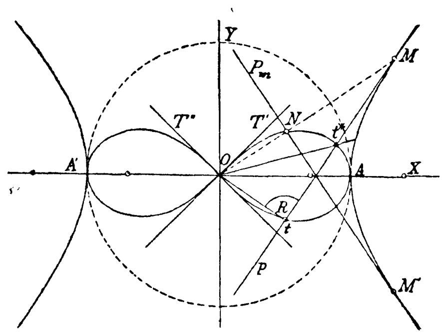
Přímka P je tudíž tečnou hyberboly H; její bod dotyčnosti budiž M a t pata kolmice s bodu O na P spuštěné. Můžeme však lemniskatu považovati za inversní křivku rovnoosé hyper-

*) *Dr. Em. Weyr* l. c. pag. 21.

boly H se středem inverse v bodě O a poloměrem kruhu inverse $OA = c$. Platí tudíž

$$ON \,.\, OM = c^2.$$

Uvažujeme-li lemniskatu jakožto průmětnici hyperboly H s polem v O, tu odpovídá bodu $M(x, y)$ hyperboly bod $t(\xi, \eta)$ lemniskaty. Uvažujeme-li však lemniskatu jako křivku inversní hyperboly H vzhledem k Γ jakožto kruhu inverse, odpovídá



bodu $M(x, y)$ hyperboly H bod $N(\xi', \eta')$ lemniskaty. Body t, N leží symetricky vzhledem k ose X. Jest totiž

$$t \begin{cases} \xi = \dfrac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta = -\dfrac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases} \qquad N \begin{cases} \xi' = \dfrac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta' = \dfrac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Patrně je polára P_m bodu M vzhledem ke kruhu inverse Γ tangentou hyperboly H, jejíž bod dotyčnosti M' s bodem M symetricky leží k ose X. Tuto vlastnost můžeme i následovně vyjádřiti: *Hyperbola H je sama sobě polaroreciproká vzhledem ke kruhu Γ.*