Jan Krejčí

Začátky mathematické krystallografie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 4, 218--232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122500

Začátky mathematické krystalografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.)*

Tvary soustavy stejnoklonné.*)

1. Soustava stejnoklonná obsahuje tvary, které se dají úměrnými úseky ze stejnoklonu (Rhomboedru) vyvinouti. (Ročník I. str. 12.)

Stejnoklon co prvotvar s plochami v poloze *h*.

2. Prvotvarný stejnoklon (obr. 1.) jest obmezen 6 stejnými kosočtverci, které se stýkají v 6 polárních hranách H, a v 6 pobočných H', při čemž $H + H' = 180^0$.

Rohy jsou dvoje: dva stejnohranné polární, a 6 lichohranně pobočných.

---

*) Podávám zde novou theorii stejnoklonné (rhomboedrické) soustavy, jednodušší nežli posavadní, anať jest pouhou obdobou theorie krychlových tvarů.

Němečtí krystallografové a přední zástupce jejich *Naumann*, berou za základ té soustavy čtyři osy, což jednak ruší souměrnost soustavní, jelikož všechny ostatní soustavy vztahují ke třem osám a nad to nepodávají, jak bude později ukázáno, koeficienty úseků čtvrtiměrných mineralií cirkulární polarisací vyznačených, tak jak je tato polarisace vyžaduje; ba ve vlastním smyslu čtvrtiměrných tvarů ani neznají.

Angličtí krystallografové a jiní, kteří se dle návodu *Millera* řídí, vztahují sice všechny plochy rhomboedrických tvarů na tři stejnoklonné osy; avšak jakož stereografický průmět, jejž Miller pěstuje, nikdy nenahradí názornost krystallových obrazů dle šikmého průmětu, tak jest i způsob jeho výpočtu neprůhledný, jelikož nepřispůsobil trigonometrický výpočet krystallografii, nýbrž naopak krystallografii starým trigonometrickým vzorcům. Této závadě jest odpomoženo všeobecnými krystallografickými vzorci v I. ročníku toho časopisu (str. 10—24).

Nejvíce přibližují se přirozenému způsobu výpočtu francouzští krystallografové, zejmena *Dufrénoy* ve své učební knize. Avšak i jeho methodě vadí nejasnost a neobratnost mathematického výkladu.

Zde ponejprvé jest ze stanoviště všeobecně analytického bezprostřední poměr hran rhomboedrických tvarů k úsekům na hranách protvaru (základního rhomboedru) znázorněn, a sice jak uvedené vzorce ukazují, způsobem překvapně jednoduchým.

3. *Osa*, která spojuje polární rohy, slove *hlavní*, a poznamená se, jsouc obdobou trojúhelné osy ve tvarech krychlových, písmenem t. (Ročník I. str. 61. 2.)

Stejnoklonné tvary staví se kolmo na tuto osu, anať v té postavě jest souměrnost jejich nejpatrnější.

Vodorovný průmět stejnoklonu kolmo na osu t postaveného, jest pravidelný šestiúhelník, pročež se dá stejnoklon do šestibokého hranolu vepsati.

Kolmice p z pobočných rohů stejnoklonu na osu t spuštěná, dělí ji ve 3 stejné díly.

Neboť v trojbokém výkrojku $\frac{1}{2}H$, $\frac{1}{2}D$, T, v němž $\frac{1}{2}D = 90^0$, $T = 60^0$, jest

$$\cos T = \operatorname{tang}(d, t).\cot(h, t),$$

z čehož

$$\text{an } \cos T = \tfrac{1}{2},$$
$$\cot(d, t) = 2\cot(h, t),$$

a tudíž kladouce,

$$\cot(d, t) = \frac{t'}{p}, \cot(h, t) = \frac{t''}{p},$$

jest

$$\frac{t'}{p} = \frac{2t''}{p}$$

nebo

$$t'' : t' : t = 1 : 2 : 3.$$

Délka osy t ustanoví se z úklonu polární hrany k ose t, a jest pro délku prvotvárné hrany $h = 1$,

$$t = 3\cos(h, t).$$

Úhly (h, t) a (d, t) ustanoví se z trojbokého výkrojku $\frac{1}{2}H$, $\frac{1}{2}D$, T; an jest

$$\cos(h, t) = \cot \tfrac{1}{2}H\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$
$$\cos(d, t) = 2\cos\tfrac{1}{2}H\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Mimo hlavní osu t rozeznávají se ještě tři *stejnoklonné osy* $= a = 1$, kteréž spojují středy protilehlých ploch, a jejichž délka a vzájemný úklon se rovná délkám a vzájemnému úklonu hran prvotvaru, s nimi rovnoběžných. Též se rozeznávají tři stejně dlouhé *vedlejší osy* $= r$, kteréž spojují středy protilehlých pobočných hran. Osy tyto jsou obdobou kosočtverečných os r tvarů krychlových, stojí na ose t kolmo a v jedné rovině, a setkávají se v středobodu pod úhlem 60^0.

Ve vodorovném šestiúhelném průmětu prvotvaru jest osa r poloměrem šestiúhelníka do něho vepsaného, takže $\sin 60^0 = \frac{r}{p}$ kdežto $p = \sin(h, t)$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, pročež

$$r = \frac{1}{2} \sin(h, t) \sqrt{3}.$$

Jelikož v trojbokém výkrojku $\frac{1}{2} H, \frac{1}{2} D, T$, v němž $(d, h) = \frac{1}{2} \alpha$, jest

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sin(h, t) \sqrt{3}, \text{ jest též}$$
$$r = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

4. Známka prvotvárného stejnoklonu jest h, u Millera $= 100$.

Tvary z prvotného stejnoklonu odvozené.

5. Stejnoklon jest obdobou krychle a tudíž také tvary z něho odvozené jsou obdobou odvozených tvarů krychlových. Při odvození tvarů ze stejnoklonu sluší k tomu zřetel obraceti, že tvary stejnoploché povstávají jen změnou stejných hran neb rohů prvotvaru. Jiné tvary povstávají tedy přikrojením polárních hran neb rohů a jiné přikrojením pobočných hran nebo rohů.

Tvary tak vyvinuté mají plochy v poloze buď *dvanáctičetné* nebo *osmičetné*, a jsou buď *plnoměrné*, *poloměrné* nebo *čtvrtiměrné*.

6. Velký díl hmot v té soustavě vyhráněných má však na svých tvarech plochy v takové poloze, jako na srostlicech krychlových s jednou společnou trojúhelnou osou, a tvary takové dají se tudíž odvésti od dvou se prostupujících stejnoklonů kolem hlavní osy o 180° k sobě otočených. (II. ročník str. 128—130.)

Tvary takové slovou *dvoustejnoklonné* (dirhomboedrické) a také ty jsou buď plnoměrné, poloměrné neb čtvrtiměrné. Tvary soustavy stejnoklonné mají tudíž dvojí ráz; totiž ráz jednoduše stejnoklonný nebo dvoustejnoklonný.

Tvary jednoduše stejnoklonné.

I. Plnoměrné.

A. S plochami dvanáctičetnými.

a) S plochami v poloze $d_{\pm 1}$

7. Otupením všech 12 hran prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 12plochý (obdoba kosočtverečného dvanáctistěnu, I. ročník str. 61.), obmezený dvojími plochami, an má stejnoklon dvojí hrany.

Šest ploch otupuje polární hrany H (Obr. 2.) v poměru $1:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= d$, u Millera $= 110$.

Šest jiných ploch otupuje pobočné hrany H' (Obr. 3.) v poměru $-1:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= \underline{d}_1$, u Millera $= \bar{1}10$.

8. Plochy d o sobě vyvinuté sestavují *stejnoklon polárních hran* se 6 polárními hranami D, a 6 pobočnými D'. Tvar ten jest s ohledem na prvotvar v úhlopříčné postavě, totiž hrany jeho leží nad plochami prvotvaru.

9. Plochy $\underline{d}_1$ o sobě vyvinuté sestavují *pravidelný šestiboký hranol pobočných hran* (hexagonální prisma) se 6 hranami $D = 120^0$. (Obr. 3.)

b) S plochami v poloze $d_{\pm n}$

10. Dvouplochým přikrojením všech 12 hran prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 24plochý (obdoba krychlového čtyrmecítmíka, I. ročník str. 62), obmezený dvojími plochami, z nichž 12 přikrajuje polární hrany H (Obr. 4.) v poměru $n:1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= d_n$, u Millera $= n10$; kdežto 12 ploch přikrojuje pobočné hrany H' (Obr. 5.) v poměru $-:n1:{}^1/_0$, pročež známka jejich $= \underline{d}_n$, u Millera $\bar{n}10$.

11. Plochy d_n o sobě vyvinuté, sestavují pro ten případ, že n větší neb menší než 2, *lichohranný šestiboký jehlanec polárních hran*, tak zvaný *Skalenoeder*, obmezený 12 lichostrannými trojúhelníky, kteréž se setkávají u každého polu v 6 polárních hranách H a D střídavě ostřejších a tupějších a pak v 6 pobočných hranách S. (Obr. 6.)

12. Vzájemná závislost hran skalenoedrů vůbec dá se vyhledati dle všeobecné rovnice (Ročn. I. str. 23, 15.). Hrana ${}^1/_2\,H$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = 1\bar{1}0$; hrana ${}^1/_2\,D$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = \bar{1}10$; hrana ${}^1/_2\,S + 90^0$, totiž spojková hrana skalenoedru a hranolu $\underline{d}_1$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = 0\bar{1}1$; z čehož dosažením za abc, $a'b'c'$ vytknutých hodnot

$$\cos{}^1/_2\,H = \frac{(n-m)\,K}{\sqrt{GG'}},$$

$$\cos {}^1/_2 D = \frac{(1-n)K}{\sqrt{GG'}}$$

$$\cos ({}^1/_2 S + 90^0) = \sin {}^1/_2 S = \frac{(1-m)K}{\sqrt{GG'}}.$$

Z rovnic těch vychází, že

$$\cos {}^1/_2 H + \cos {}^1/_2 D = \sin {}^1/_2 S,$$

tak že z dvou známých hran skalenoedru lze třetí ustanoviti.

13. Přípona n dá se po d_n ustanoviti tak jako v krychl. soustavě (I. ročník str. 62, 63).

Neboť vezme-li se pro ${}^1/_2 H$, $abc = n10$, $a'b'c' = 1\bar{1}0$,
pro ${}^1/_2 D$, $abc = n10$, $a'b'c' = 011$, jest

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = n-1.$$

14. Je-li na tvaru d_n $H = D$, jest $n = 2$, a skalenoeder promění se v *pravidelný šestiboký jehlanec* (hexagonalní Pyramidu) *polárních hran*, obmezený 12 stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se setkávají u každého pólu v 6 hranách H, a pak v 6 pobočných hranách S. Obr. 7.

Známka toho tvaru jest $d_2 = i$, u Millera $= 210$.

15. Plochy $\underline{d_n}$ o sobě vyvinuté sestavují *skalenoeder pobočných hran*, do něhož jest prvotvar vepsaný. Obr. 5.

16. Přípona n pro tvar $\underline{d_n}$ ustanoví se z rovnic polovičných polárních hran, pro něž jest na hraně

$${}^1/_2 H, abc = 0n1, a'b'c' = 110,$$

na hraně

$${}^1/_2 D, abc = 0n\bar{1}, a'b'c' = \bar{1}01,$$

z čehož dle všeobecné rovnice

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = n.$$

B. S plochami osmičetnými.

a) *S plochami v poloze* $0_{\pm 1}$

17. Otupením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar osmiplochý (obdoba osmistěnu), obmezený dvojími plochami, z nichž dvě odtínají polární rohy (Obr. 8.) v poměru 1 : 1 : 1, pročež známka jejich $= 0$, u Millera $= 111$; kdežto druhých šest ploch odtíná pobočné rohy jeho (Obr. 9.) v poměru $-1 : 1 : 1$, pročež známka jejich $= \underline{o}_1$, u Millera $= \bar{1}11$.

18. Plochy o o sobě vyvinuté neuzavírají prostor a mohou se tedy objeviti jen ve spojení s jinými plochami. Obr. 8.

Plochy ty slovou *polární*, neb *Pinakoidy*.

19. Plochy $\underline{o_1}$ o sobě vyvinuté sestavují *stejnoklon pobočných rohů* s polárními hranami O a pobočnými hranami O'. Stejnoklon ten jest v úhlopříčné postavě.

b) S plochami v poloze $O_{\pm 1/m}$

20. Trojplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu od úhlopříček ploch jeho vyvine se tvar 24plochý (obdoba čtyrúhelného čtyrmecítmíka), obmezený trojími plochami.

Šest ploch přikrojuje polární rohy trojplošně (Obr. 10.) v poměru $1/m : 1 : 1$, pročež známka jejich $= O_{1/m}$, u Millera $= m11$. Šest ploch přikrojuje poboční rohy jednoplošně od vodorovné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 9.) v poměru $-1/m : 1 : 1$, pročež známka jejich $= \underline{o}_{1/m}$, u Millera $= \bar{m}11$.

Dvanáct jiných ploch přikrojuje konečně pobočné rohy dvouplošně od nakloněné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 12.) v poměru $1 : 1/m : -1$, totiž přikrojuje spojkovou hranu mezi h a o_1, obr. 12., pročež známka jejich $= \bar{o}_{1/m}$, u Millera $1m\bar{1}$.

21. Plochy $o_{1/m}$ o sobě vyvinuté, sestavují *tupý stejnoklon* s polárními hranami H a pobočnými H'.

22. Příponu m lze ustanoviti jako u krychlového tvaru o^1/m (I. ročn. str. 64) dle rovnice

$$\frac{m+2}{m-1} = \frac{cot\,(r, t),}{cot\,(d, t),}$$

kdežto (r, t) znamená úklon prvotvarné plochy a (d, t) úklon odvozené plochy k ose t.

Úklony ploch k ose t ustanoví se dle rovnice v odstavci 3. uvedené.

23. Plochy $\underline{o}_{1/m}$ (srovnej obr. 9.) o sobě vyvinuté sestavují *ostrý stejnoklon* s polárními hranami H a pobočnými H'.

Přípona m ustanoví se dle též rovnice, jako při $o_{1/m}$.

24. Je-li po $\underline{o}_{1/m}$ přípona $m = -2$, jest $cot\,(d, t) = 1/_0$, totiž plochy odvozeného prvotvaru jsou rovnoběžné s osou t, a tvar se promění *v pravidelný šestiboký hranol pobočných rohů* se 6 hranami $H = 120^\circ$. Hranol $\underline{d_1}$ otupuje jeho hrany. Známka jeho jest $o_{1/2} = \underline{p_1}$, u Millera $= \bar{2}11$.

25. Plochy $O_{1/m}$ o sobě vyvinuté sestavují *skalenoeder úhlopříčky*. Obr. 13.

26. Přípona m ustanoví se pro $\overline{O}_{1/m}$ rovnicí

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = \frac{m-1}{2.}$$

27. Je-li na skalenoedru $\overline{O}_{1/m}$ hrana $H = D$, jest $m = 3$, a tvar se promění *v pravidelný šestiboký jehlanec úhlopříčky*, jehož známka jest $\overline{O}_{1/3} = \overline{i}$, u Millera $= 13\overline{1}$.

c) S plochami v poloze $O_{\pm m}$

28. Trojplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 24plochý (obdoba osmistěnného čtyrmecítmíka), obmezený trojími plochami.

Šest ploch přikrojuje polární rohy trojplošně od hran (Obr. 11.) v poměru ${}^1/m : {}^1/m : 1$, neb $1 : 1 : m$, pročež jejich známka $= O_m$, u Millera $= mm1$.

Šest ploch přikrojuje pobočné rohy jednoplošně od vodorovné úhlopříčky prvotvaru (srovnej obr. 9.) v poměru $1 : 1 : -m$, pročež známka jejich $= \underline{O}_m$, u Millera $mm\overline{1}$.

Dvanáct jiných ploch konečně přikrojuje pobočné rohy dvouplošně od nakloněné úhlopříčky prvotvaru v poměru $1 : m : -1$, pročež známka jejich $= \overline{O}_m$, u Millera $m1\overline{m}$.

Tentýž výledek dá přikrojení rohu mezi pobočnou hranou prvotvaru h a plochou stejnoklonu o_1 rovnoběžně se spojkovou hranou (h, o_1); nebo přikrojení pobočných hran stejnoklonu $\underline{o}_1$ Obr. 13.

29. Plochy O_m o sobě vyvinuté sestavují *obrácený tupý stejnoklon*, jehož polární hrany D leží nad plochami prvotvaru.

30. Přípona m ustanoví se jako pro krychlový tvar O_m dle rovnice (I. ročník str. 65).

$$\frac{2m+1}{m-1} = \frac{\cot (r, t)}{\cot (h, t),}$$

kdežto (r, t) znamená úklon prvotvárné plochy a (h, t) úklon odvozené plochy k ose t.

31. Plochy $\underline{O}_m$ o sobě vyvinuté sestavují *obrácený ostrý stejnoklon* s hranami D a D'.

Přípona m ustanoví se dle vzorce předešlého.

31. Je-li pro $\underline{O}_m$ přípona $m = -2$, jest $cot\,(r, t) = cot\,(h, t)$, totiž oba stejnoklony, prvotvarný a odvozený mají osy t stejné a jsou tudíž stejné, jsouce k sobě obráceny o 180°.

Tvar $\underline{O}_2$ budeme znamenati (h).

Spojka obou tvarů h a (h) dá šestiboký jehlanec, kterýž jest k jehlancům ze skalenoedrů povstalým, v úhlopříčné postavě. Obr. 14.

33. Plochy $\overline{O}_m$ o sobě vyvinuté sestavují *obrácený skalenoeder úhlopříčky*. Obr. 13.

34. Přípona m ustanoví se rovnicí

$$\frac{cos\ ^1/_2\,H}{cos\ ^1/_2\,D} = \frac{1-m}{2m}.$$

35. Je-li po $\overline{O}_m$ $H = D$, jest $m = {}^1/_3$, a tvar se promění v pravidelný šestiboký jehlanec úhlopříčky $\overline{O}_{1/_3} = \overline{i}$.

d) S plochami v poloze $O_{\pm s}$

36. Šestiplochým přikrojením všech 8 rohů prvotvarného stejnoklonu vyvine se tvar 48plochý, (obdoba 48stěnu) obmezený čtverými plochami.

Dvanáct z nich přikrojuje polární rohy šestiplošně (ob. 15.) v poměru ${}^1/m : {}^1/n : 1$ a známka jejich jest O_s, kdežto s značí vytknutý poměr úseků; u Millera $m\,n\,1$.

Tři jiné dvanáctiploché tvary přikrojují pobočné rohy dvouplošné (ob. 16.) v poměr $\pm {}^1/m : \pm {}^1/n : \pm 1$; jejich známka jest $= \underline{O}_s$, kdežto s znamená vytknutý poměr úseků; u Millera $= \overline{h\,k\,l}$, kdežto v pořádku abc znamená každé písmeno kladnou neb zapornou hodnotu úseků.

37. Plochy O_s o sobě vyvinuté sestavují *tupý skalenoeder* s polárními hranami H, D a pobočnými S.

38. Přípony m, n ustanoví se jako u krychlového O_s (I. ročník str. 67.) rovnicemi.

$$\frac{cos\ \frac{1}{2}H}{cos\ \frac{1}{2}D} = \frac{n-m}{1-n},$$

$$m' = \frac{2m}{n+1},$$

kdežto m' znamená jmenovatele přípony stejnoklonu $O_{1/m'}$ kterýž otupuje polární hrany D nad plochami prvotvaru.

39. Je-li pro O_s $H = D$ jest $n = \frac{m+1}{2}$ a skalenoeder přejde v *tupý šestiboký jehlanec*, jehož známka jest $= i_m$, u Millera $m \frac{m+1}{2} 1$.
Ustanovení jeho provede se dle rovnice

$$m' = \frac{4m}{m+3},$$

kdežto m' znamená stejnoklon $O_{1/m'}$, kterýž otupuje jeho polární hrany D.

40. Pro skalenoeder, který přikrojuje polární hrany stejnoklonu d jest $n = m - 1$ a známka jeho jest obdobně rhombickým 48stěnem krychlovým $= r_m$, u Millera $= m\, m{-}1\ 1$.

Je-li v tom případu $H = D$, jest $m = 3$, $n = 2$, pročež $r_3 = r_i$; u Millera $= 321$.

41. Plochy $\underline{O_s}$ o sobě vyvinuté sestavují *troje ostré sklalenoedry*, jejichž podoba závisí na poměru úseků. Přípony m, n ustanoví se, znamenají-li $^1/a$, $^1/b$, $^1/c$ úseky na hranách prvotvaru, dle rovnice

$$\frac{\cos \frac{1}{2} H}{\cos \frac{1}{2} D} = \frac{a-b}{b-c},$$

kdežto pro a, b, c dosadí se hodnoty s patřičnými známkami $\pm$. Ostatně počítá se jako při O_s.

42. Je-li po $\underline{O_s}$ $H = D$, jest $n = \frac{m+1}{2}$ a tvar přejde v *ostrý šestiboký jehlanec*, jehož známka jest $= \underline{i}_m$, u Millera $= \bar{m}\ \frac{m+1}{2}\ 1$.

Ustanovení provede se v podstatě taktéž jako při i_m.

43. Je-li po $\underline{O_s}$ připona $n = m - 1$, přejde tvar v *12boký hranol*, jehož plochy přikrojují hrany hranolu $\underline{d_I}$.

Tvar ten má dvoje hrany H a D a jest tudíž souměrný a nikoliv pravidelný. (obr. 16).

Známka jeho jest $= \underline{r}_m$; u Millera $= \bar{m}\ m - 1\ 1$.

44. V hranolu $\underline{r}_m$ jest

$$\tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} D = 150^\circ,$$

pročež stačí k ustanovení jediná hrana, a sice dle téže rovnice, dle níž se ustanovuje v soustavě krychlové tvar r_m (I. ročník str. 68.):

$$\cot D' \sqrt{3} = 2m - 1,$$

kdežto

$$D' = 90^0 - \tfrac{1}{2}H = \tfrac{1}{2}D = 60^0.$$

45. Kdyby bylo $H = D$, proměnil by se ten hranol v pravidelný 12boký hranol, a hrany jeho byly by $H = D = 150^0$, tudíž $D' = 15^0$.

Jelikož $cot\, 15^0 = 2 + \sqrt{3}$, bylo by též $m = 2 + \sqrt{3}$, což jest výraz neúměrný a tudíž na vyhraněných tvarech nemožný.

Spojka $\underline{d_1}$ a $\underline{p_1}$ jeví se sice co pravidelný 12boký hranol, avšak poloha ploch jest jiná, než u hranole $\underline{r_m}$, v němž by bylo $H = D$.

Stejnoklonné plnoměrné tvary dle Naumanna.

46. *Naumann* a jeho stoupenci vztahují plochy stejnoklonných tvarů na tři ze čtyr os, z nichž tři r v jedné rovině se protínají pod úhlem 60^0 a čtvrtá t na nich stojí kolmo.

Jakým spůsobem Naumann tvary odvozuje, bude později ukázáno; zde se jedná jen o výklad známek Naumannových pro naše plnoměrné stejnoklonné tvary a o porovnání jich s našimi známkami.

Naumann poznamenává základní čili prvotvarný stejnoklon (Rhomboeder) písmenem R.

Při výpočtu nebéře $h = 1$, nýbrž $r = 1$, pročež $\tfrac{1}{2}p = tang\ 30^0 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, nebo $p = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Pro délku poloosy t jest $cot\,(h, t) = \dfrac{\tfrac{2}{3}\,t}{2\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = t\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ a tudíž

$$t = cot\,(h, t)\sqrt{3}.$$

Odvozené stejnoklony vztahuje Naumann k hlavní ose $m\,t$, kteráž roste od 0 až do ∞. Proto značí Naumann stejnoklony všeobecně $m\,R$, obrácené $-\,m\,R$, Pinakoid $o\,R$, hranol rohů $\infty\,R$.

Pro dva stejnoklony v zárovné postavě jest $\dfrac{cot\,(h, t)}{cot\,(h', t)} = m$, kdežto h znamého hranu prvotvaru, a h' odvozeného tvaru.

Plochy *jehlanců šestibokých* odtínají jedno r ve vzdálenosti $= 1$, druhé ve vzdálenosti $= 2$; Naumann jim dává známku $m\,P\,2$ a dle toho *hranolu pobočných hran* známku $\infty\,P\,2$.

Je-li S pobočná hrana těch jehlanců, jest $m = tang\,\tfrac{1}{2}\,S$.

Skalenoedry vztahuje Naumann na stejnoklony do jejich pobočných hran vepsané a znamená je $m\,R\,n$, kdežto m znamená vlastně $m\,t$ totiž hlavní osu vepsaného stejnoklonu a n koefficient, jímž se osa $m\,t$ násobí, aby měla délku hlavní osy skalenoedru. Pro výpočet vyvinuje Naumann z daných hran rovnice

$$\frac{n+1}{n-1}=\frac{\cos\frac{1}{2}H}{\cos\frac{1}{2}D},$$
$$m\,t=\cot\xi'\sqrt{3},$$
$$\cos\xi'=\frac{\tan\frac{1}{2}S}{n\sqrt{3}},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}S=\frac{2n}{n+1}\cos\tfrac{1}{2}H.$$

Pro *12boký hranol* (obr. 16.), v němžto každá plocha odtíná jedno r ve vzdálenosti $=1$, druhé ve vzdálenosti $=n$, jest v trojúhelníku r, n, s, v němž $(r,\,s)=\frac{1}{2}H$, $(r,\,n)=60^0$

$$\tan\tfrac{1}{2}H=\frac{n\sin 60^0}{1-n\cos 60^0},$$

nebo an $\sin 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}, \cos 60^0=\frac{1}{2}$,

$$\tan\tfrac{1}{2}H=\frac{n\sqrt{3}}{2-n}.$$

V trojúhelníku p, r, s, v němž $(r,\,s)=\frac{1}{2}H$, $(r,\,p)=30^0$ jest

$$\tan\tfrac{1}{2}H=\frac{n\sqrt{3}}{2-n}=\frac{p\sin 30^0}{1-p\cos 30^0},$$

nebo an $\sin 30^0=\frac{1}{2}, \cos 30^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$p=\frac{n\sqrt{3}}{n+1}.$$

V hranolu ∞R jest $n=1$, a tudíž $p=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; v hranolu $\infty P2$ jest $n=2$, tudíž $p=2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

47. *K převedení známek našich* vztahujících se ke třem hranám nebo osám stejnoklonným prvotvaru *na známky Naumannovy*, které se vztahují k osám r', r'' k sobě pod úhlem 60^0 nakloněným, a k ose t' na nich kolmé, vyznačí se délka těch os hodnotami našich přípon, a pak se vezme $r'=1$.

Z rovnic všeobecné krystallografie pro soustavy kosoúhelné (I. Ročník str. 22.) vychází délka čáry ze středobodu na plochu krystallu vedené ze souřadnic jejích

$$k^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2xz\cos\beta+2xy\cos\beta.$$

Pro soustavu stejnoklonnou, v níž $\alpha = \beta = \gamma$, jest tudíž

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (yz + xz + xy)\, 2 \cos \alpha .$$

Postaví-li se za k osy r', r'', t', a pro plochu odtínající hranu prvotvaru v poměru $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$, rovnice

$$\frac{x}{\mathfrak{a}} + \frac{y}{\mathfrak{b}} + \frac{z}{\mathfrak{c}} = 1,$$

jest pro osu r', an pro ni $x = 0$ a y záporné

$$-\frac{y}{\mathfrak{b}} + \frac{z}{\mathfrak{c}} = 1, \quad y = z$$

pročež

$$y = z = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}},$$

a obdobně pro $y = 0$,

$$x = z = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}} .$$

Z toho máme, berouce hranu prvotvaru $h = 1$, pro poloosu r'

$$2 r' = \sqrt{2 y^2 - 2 y^2 \cos \alpha},$$

kdežto α znamená úhel v rovině ploch h u pólu, nebo po dosazení vytknuté hodnoty z a y

$$r' = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} .$$

Jelikož však

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sin \tfrac{1}{2} \alpha = r$$

(viz odstavec 3), jest

$$(1) \quad r' = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b} - \mathfrak{c}}\, r ,$$

a obdobně

$$(2) \quad r'' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}\, r .$$

Pro poloosu t' jest $x = y = z$ a tudíž dosazením jejich do rovnice plochy

$$x = y = z = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

z čehož

$$2 t' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (xy + xz + yz)\, 2 \cos \alpha},$$

nebo

$$2t' = \frac{\mathfrak{abc}}{\mathfrak{ab}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ac}} \sqrt{3}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

Pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$ jest dle odstavce (3)

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sin(h,\ t)\sqrt{3},$$

a jelikož

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \frac{3\sin^2(h,t)}{2},$$

jest

$$2\cos\alpha = 2 - 3\sin^2(h,\ t),$$

a taktéž

$$1+2\cos\alpha = 3 - 3\sin^2(h,t) = 3\cos^2(h,t),$$

pročež

$$2t' = \frac{\mathfrak{abc}}{\mathfrak{ab}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ac}}\ 3\cos(h,t),$$

nebo an

$$3\cos(h,t) = 2t$$

$$(3) \quad t' = \frac{\mathfrak{abc}}{\mathfrak{ab}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ac}}.t$$

Vezme-li se dle Naumanna pro vedlejší osy $r=1$, pro hlavní osy $t=1$, mají dle vytknutých rovnic (1, 2, 3), do nichž se vloží za $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ přiměřené hodnoty úseků, a v nichž se osy r', r'', t', dělí hodnotou osy r', následující vzorce platnost k převedení našich známek na Naumannovy známky:

$h = R.$

$(h) = -R.$

$d = -\frac{1}{2}R.$

$\underline{d_1} = \infty P2.$

$\underline{d_n} = m'Rn'$, při čemž $m' = t''$ osa stejnoklonu do pobočných hran vepsaného, a $n' = \frac{t'}{t''}$, $t' = \frac{n}{n+1}$. Pro vepsaný stejnoklon $O_{1/m}''$ dá pásmová rovnice $m'' = n-1$, načež jest $t'' = \frac{m''-1}{m''+2} = \frac{n-2}{n+1}$; tudíž

$$m' = \frac{n-2}{n+1},\ n' = \frac{n}{n-2}.$$

$d_2 = i = \frac{2}{3}P2.$

$\underline{d_n} = Rn'$, při čemž $n = \frac{t'}{r'} = \frac{n+1}{n-1}$.

$o \quad = oR$

$\underline{o}_1 \quad = -2R$

$O_{1/m} = m'R$, při čemž $m' = \frac{t'}{r'} = \frac{m-1}{m+2}$.

$\underline{O}_{1/m} = m'R$, při čemž $m' = \frac{m+1}{m-2}$.

$\underline{\underline{O}}_{1/2} = \underline{p}_1 = \infty R$.

$\overline{O}_{1/n} = m'Rn'$, při čemž pro stejnoklon do pobočných hran vepsaný $m' = t'' = \frac{m-3}{m}$, $t' = \frac{m+1}{m}$, $n' = \frac{t'}{t''} = \frac{m+1}{m-3}$.

$\overline{O}_{1/3} = \overline{i} = \frac{4}{3}P2$

$O_m = -m'R$, při čemž $m' = \frac{t'}{t''} = \frac{1-m}{2m+1}$.

$\underline{O}_m = -m'R$, při čemž $m' = \frac{m+1}{1-2m}$.

$\overline{O}_m = -2Rm$.

$$O_s = m'Rn', \text{ při cemž } m' = \frac{\frac{m}{n}(m+1) - 2m}{\frac{m}{n}(m+1) - m},$$

$$n' = \frac{\frac{m}{n}(m-1)}{\frac{m}{n}(m+1) - 2m}.$$

$i_m = m'P2$, při čemž $m' = \frac{2(m-1)}{3(m+1)}$.

$\underline{r}^m = \infty Pn'$, při čemž $n' = \frac{2m-1}{m+1}$.

Zobrazení stejnoklonných plnoměrných tvarů.

48. Stejnoklonné tvary rýsují se v postavě na hlavní ose kolmé, a každý z nich dá se do šestibokého hranolu vepsati.

a) Hranol $\underline{d}_1$ jest totožný s hranolem kolem prvotvaru opsaným a rýsuje se jak bylo při srostlicích krychlové soustavy udáno (II. ročník str. 129.) Poloměr šestiúhelného průřezu jest $p = sin\,(h,\ t)$.

b) Hranol $\underline{p}_1$ rýsuje se v úhlopříčné postavě k předešlému a jeho poloměr jest $r = \frac{1}{2}\, sin\,(h, t)\, \sqrt{3}$.

c) Dvanáctiboký hranol $\underline{r}_m$ má mimo vedlejší osy r, které se končí v hranách H, ještě mezi osy $p = \frac{r(2m-1\sqrt{3}}{3m}$, které se končí v hranách D. (obr. 16.)

d) Šestiboké jehlance $i_{\pm m}$ vyobrazí se na základě šestiúhelníka s poloměrem $p = sin\,(h, t)$, na nějž se postaví osa t'.

e) Stejnoklony sestrojí se z hranolu $\underline{d}_1$, jemuž še dá délka t', načež se hranol rozdělí ve tři stejné díly a body v hranách nalezené spojí se, jak ukazuje obr. 13. v II. ročníku číslo III.

f) Skalenoedry rýsují se dle vzorce $S_{t''}^{t'}$, při čemž t'' znamená hlavní osu stejnoklonu do pobočných hran vepsaného a t' hlavní osu skalenoedru.

Vyrýsuje se tudíž stejnoklon s osou t'', načež se té ose dá délka t', a póly její spojí se s pobočnými rohy vepsaného stejnoklonu.

Spojky stejnoklonných plnoměrných tvarů.

49. Spojky plnoměrné stejnoklonné jsou velmi rozmanité; obyčejně však na nich převládá některý stejnoklon, skalenoeder, jehlanec neb hranol. Ustanovení jejich děje se jako v krychlové soustavě s ohledem na polohu ploch k prvotvaru. Dle pásmové rovnice (I. ročník str. 24.) ustanoví se plochy, jimiž se hrany známých ploch otupují neb přikrojují.

Vychází z toho zejmena na jevo, že *každým skalenoedrem jest ustanovena poloha pěti stejnoklonů*, a sice *a*) pro stejnoklon do pobočných hran $\underline{S}$ vepsaný; *b)* do polárních hran H; *c)* do polárních hran D vepsaný; *d)* pro stejnoklon, jenž otupuje hrany H a *e)* jenž otupuje hrany D.

Příklady následující vysvětlí ustanovení spojek dle rovnic a vzorců uvedených.

(Pokračování.)