Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O normálách určitého druhu křivek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 4, 239--242

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122499`

pohyb, kterým se jednotlivé osy uvádějí z původní polohy do nové, u všech stejného smyslu, *svorný*, platí znamení svrchní (+), v opačném případě spodní (—).

Zvolíme-li tedy směr nových os tak, že

$$\Delta = +1,$$

obdržíme konečně z podmínek soustavy (7) a podobných ještě

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\beta_2 \gamma_3), \quad \alpha_2 = (\beta_3 \gamma_1), \quad \alpha_3 = (\beta_1 \gamma_2), \\ \beta_1 &= (\gamma_2 \alpha_3), \quad \beta_2 = (\gamma_3 \alpha_1), \quad \beta_3 = (\gamma_1 \alpha_2), \qquad (11) \\ \gamma_1 &= (\alpha_2 \beta_3), \quad \gamma_2 = (\alpha_3 \beta_1), \quad \gamma_3 = (\alpha_1 \beta_2). \end{aligned}$$

Spojíme-li tedy všechny tyto výsledky, poznáme snadno, že *devět koefficientů, vyskytujících se při orthogonální substituci neb při této transformaci pravoúhlých souřadnic musí vyhoviti dvaadvaceti podmínkám* a sice soustavám (2), (3), (8) a (9) po třech, vzorci (10) jednu a soustavě (11) devět podmínek obsahující.

Podmínky (11) konečně souvisí ještě s jinou poučkou o determinantech; obdržímeť pomocí jich

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\beta_2 \gamma_3), (\gamma_2 \alpha_3), (\alpha_2 \beta_3) \\ (\beta_3 \gamma_1), (\gamma_3 \alpha_1), (\alpha_3 \beta_1) \\ (\beta_1 \gamma_2), (\gamma_1 \alpha_2), (\alpha_1 \beta_2) \end{vmatrix},$$

kdež poslední determinant, sestaven jsa ze subdeterminantů soustavy předcházející, sluje determinantem *přidruženým* a co takový rovná se *druhé* mocnině*) determinantu původního, z čehož jde

$$\Delta = \Delta^2 \text{ neb } \Delta = 1,$$

jak původně bylo za základ položeno.

O normálách určitého druhu křivek.

(Od *Al. Strnada.*)

Následující řádky mají za účel odvození věty o normálách křivek vytvořených na základě stálé délky neb stálého úhlu.

1. Předpokládejme přímku stálé délky, pohybující se tím spůsobem, že konečné body její a, b opisují křivky K_a, K_b v rovině

---

*) V rovině možná podobnou cestu nastoupiti, nejedná-li se o čas.

R, dále pak rovinu R' sjednocující se s R, avšak pohybující se zároveň s $\overline{ab}$ tak, že veškeré útvary v ní s body a, b v pevném spojení se nalezají.

Tu bude každý bod m roviny R' vytvořovati určitou křivku K_m, každá přímka M obalovati křivku K_M. Normály všech takto odvozených křivek mají společnou vlastnost, kterou zde odvoditi chceme.

Buďtež (viz obr. 21.) K_a, K_b dané křivky základní. Vytkněme na nich dvě družiny bodové $a\,b$, $a'\,b'$, tak že tedy $\overline{ab} = \overline{a'b'}$; uprostřed tetiv $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ vztyčme pak kolmice N_a, N_b, kteréž protínati se budou v bodu o.

Přijde-li $\overline{ab}$ z původní své polohy do $\overline{a'b'}$, přijde libovolný bod m do polohy m', přímka M do polohy M'. Poněvadž $\overline{ao} = \overline{a'o}$, $\overline{bo} = \overline{b'o}$, můžeme si mysliti polohu $\overline{a'b'}$ povstalou z $\overline{ab}$ otočením okolo o o náležitý úhel; totéž však platí o všech útvarech roviny R': přemístění jich jest jen otočení okolo o. Z toho následuje, že body m, m' leží na kružnici Γ_m, jejíž střed jest v o, přímky M, M' pak dotýkají se kružnice Γ_M, soustředné s předešlou.

Dejme nyní tomu, že bod a' stane se soumezným (nekonečně blízkym) s bodem a, tedy i b' soumezným s b; pak jsou příslušné polohy m, m' též soumeznými body křivky K_m, přímky M, M' soumeznými tečnami křivky K_M. Kolmice N_a, N_b stanou se normálami křivek K_a a K_b v bodech a, b.

Kružnice Γ_m má nyní s K_m dva soumezné body, tudíž i tečnu a normálu společnou; touto jest přímka $\overline{mo}$. Podobně má kružnice Γ_M s K_M dvě soumezné tečny společné, následovně i dotyčný bod a normálu; jest to kolmice s o na M spuštěná.

Z úvahy této vychází věta, již jsme dokázati chtěli:

„*Normály křivek odvozených K_m a $_M$ prochází průsečíkem příslušných normál křivek základních K_a, K_b.*"

Že místo dvou křivek základních může také býti jediná, v níž jest pak ab tetivou stálé délky, netřeba podotýkati.

Co zvláštní případy křivek K_m a K_M sluší vytknouti:

a) geom. místo bodu dělícího $\overline{ab}$ v stálém poměru,

b) křivku obalovou přímek $\overline{ab}$.

Jednoduchý příklad poskytuje tu přímka stálé délky, jejíž konečné body pohybují se po dvou k sobě kolmých přímkách; obaluje pak astroidu a každý bod její opisuje ellipsu.

Sestrojení bodu dotyčného na tečně křivky první, tečny pak v daném bodu křivky druhé jest dle předcházejícího zřejmé. Věta vyslovená podává také prostředek ku sestrojení tečen, respective normál, křivek konchoidických. Jak z toho snadno poznati lze, *mají všechny křivky konchoidické o společné základně tutéž polární subnormálu.* *)

2. Obalují-li ramena stálého úhlu (AB) dvě různé aneb sjednocující se křivky L_A a L_B, opisuje každý s nimi neproměnně spojený bod m křivku K_m, každá přímka M pak obaluje křivku určitou K_M. Způsobem obdobným jako větu v odstavci (1) lze dokázati, že „*normály takto odvozených křivek prochází průsečíkem příslušných normál křivek základních L_A a L_B.*“

Totéž vysvitá však též z následujícího: Spojíme-li bod m s body a, b přímkami A, B, budou tyto, je-li $\overline{ab}$ stálá délka a abm stálý trojúhelník, tvořiti stálý úhel (AB) a obalovati určité křivky L_A, L_B, o nichž dle uvedeného víme, že normály jich jdou bodem o. Vycházíme-li od křivek těchto co základních a vztahujeme-li veškeré útvary pohyblivé roviny R' k tečnám A, B, přesvědčíme se ihned o správnosti věty vyslovené.

Tato platí specielně o geometrickém místu vrcholu úhlu (AB), pro kterýž případ podal analytický důkaz Enneper. **)

Konečně poukazujeme ještě k dvěma zvláštním způsobům odvozování křivek z daných základních, kteréž v právě uvedeném obsaženy jsou.

a) Nejprvé jsou to *průmětnice* v širším smyslu, t. j. geom. místo vrcholu stálého úhlu, jehož jedno rameno prochází pevným bodem (pólem), druhé pak obaluje křivku základní Tento druh odvodí se z obecného patrně tím, že jedna z křivek základních stane se křivkou třídy první, to jest bodem, veškeré tečny její tvoří pak svazek paprskový, jehož středem tento bod jest.

b) Jsou-li křivky L_A a L_B v takovém vztahu, že ku př. L_B jest evolutou pro L_A, lze považovati tečnu křivky L_A a normálu k ní náležející za rameno stálého úhlu (pravého), kteráž křivky L_A a L_B obalují.

---

*) Viz: Hermite, Cours d' analyse, lière partie, pag. 92.

**) Viz: Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik 1871 str. 342.

Průsečíkem příslušných normál jest tu střed křivosti pro odpovídající bod na křivce L_A. Tečnami a normálami křivky L_A dáno jest nesčíslné množství soustav pravoúhelných (béřeme-li tečny ku př. za osy úseček, normály za osy pořadnic).

Geom. místem bodu majícího tentýž vztah ke všem těmto soustavám jest určitá křivka (prof. Tilšer nazývá ji *čarou posuvnou* čili *posuvnicí* čáry základní *), čarou obalovou přímky stejného vztahu ke všem těmto soustavám bude opět jiná křivka. Oběma náleží ta společná vlastnost, že *normály jich jdou příslušným středem křivosti křivky základní.*"

O společném původu některých integrálů omezených.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.)*

Historický rozvoj nějaké nauky liší se obyčejně od soustavného, jelikož tu z jednoho neb několik hlavních východišť se takořka organicky celá síť pouček utkává, kteréž nesouvisle během času bádáním rozmanitým byly objeveny. Napřed se obyčejně hromadí materiál a teprv když tolik ho pohromadě, že se na stavbu celé budovy může pomýšleti, vyskytuje se základní myšlenka, stavební plán, podlé něhož se jednotlivé poučky co stavební prostředky pojí k jednotnému celku, k vědecké soustavě.

Co platí o celku, vztahuje se poměrně i k částem co podřízeným celkům, co soustavám nižšího druhu; spojujíce roztroušené poučky pomocí jednoho pravidla v jednotnou vazbu připravujeme materiál k stavbě hlavní, skládáme prvky stavební v členy obsáhlejší a spojujeme stavivo v integrující části celé budovy.

Co tuto všeobecně bylo proneseno o vědách exaktních, platí zejmena o rozběhlé nauce o integrálech omezených; i zde jest hojnost rozptýleného materiálu, kterýž dosud nebyl v jednotu vyšší uveden, i zde jest mnoho jednotlivých vzorců, které

*) Viz: Tilšer, Soustava deskr. geometrie, seš. 1. str. 92.