František Josef Studnička
O společném původu některých integrálů omezených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 4, 242--247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122493

Průsečíkem příslušných normál jest tu střed křivosti pro odpovídající bod na křivce L_A. Tečnami a normálami křivky L_A dáno jest nesčíslné množství soustav pravoúhelných (béřeme-li tečny ku př. za osy úseček, normály za osy pořadnic).

Geom. místem bodu majícího tentýž vztah ke všem těmto soustavám jest určitá křivka (prof. Tilšer nazývá ji *čarou posuvnou* čili *posuvnicí* čáry základní*), čarou obalovou přímky stejného vztahu ke všem těmto soustavám bude opět jiná křivka. Oběma náleží ta společná vlastnost, že *normály jich jdou příslušným středem křivosti křivky základní.*"

O společném původu některých integrálů omezených.

(Podává Dr. *F. J. Studnička.)*

Historický rozvoj nějaké nauky liší se obyčejně od soustavného, jelikož tu z jednoho neb několik hlavních východišť se takořka organicky celá síť pouček utkává, kteréž nesouvisle během času bádáním rozmanitým byly objeveny. Napřed se obyčejně hromadí materiál a teprv když tolik ho pohromadě, že se na stavbu celé budovy může pomýšleti, vyskytuje se základní myšlenka, stavební plán, podlé něhož se jednotlivé poučky co stavební prostředky pojí k jednotnému celku, k vědecké soustavě.

Co platí o celku, vztahuje se poměrně i k částem co podřízeným celkům, co soustavám nižšího druhu; spojujíce roztroušené poučky pomocí jednoho pravidla v jednotnou vazbu připravujeme materiál k stavbě hlavní, skládáme prvky stavební v členy obsáhlejší a spojujeme stavivo v integrující části celé budovy.

Co tuto všeobecně bylo proneseno o vědách exaktních, platí zejmena o rozběhlé nauce o integrálech omezených; i zde jest hojnost rozptýleného materiálu, kterýž dosud nebyl v jednotu vyšší uveden, i zde jest mnoho jednotlivých vzorců, které

*) **Viz: Tilšer, Soustava deskr. geometrie, seš. 1. str. 92.**

lze jedinou poučkou obsáhnouti, jakž pozná se z krátkého příkladu, jejž tuto chceme vyložiti.

Učiníme-li v známém integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n + e^{ai}} = \frac{\pi}{n} \frac{e^{i(\frac{m}{n}-1)a}}{\sin \frac{m}{n}\pi} \qquad \textit{(Minding)}$$

jmenovatele reálným, obdržíme snadno pomocí známých stejnin, rozloučivše reálné a imaginárné členy,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+n-1} + x^{m-1}\cos a}{x^{2n} + 2x^n \cos a + 1} dx = \frac{\pi}{n} \frac{\cos(\frac{m}{n}-1)a}{\sin \frac{m}{n}\pi} \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\sin a}{x^{2n} + 2x^n \cos a + 1} dx = -\frac{\pi}{n} \frac{\sin(\frac{m}{n}-1)a}{\sin \frac{m}{n}\pi} \qquad (2)$$

z kterýchžto vzorců možná celou řadu zvláštních vyvésti, vyhoví-li se jen podstatným podmínkám, jakým podlehá vzorec původní. Položíme-li tu především

$$a = 0,$$

obdržíme ze vzorce (1)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^n + 1} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{m}{n}\pi, \qquad \textit{(Euler)} \quad (3)$$

z kteréhožto vzorce jde pro $n = 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x+1} = \pi \operatorname{cosec} m\pi, \qquad \textit{(Legendre)} \quad (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{x+1} = -\pi \operatorname{cosec} m\pi, \qquad (5)$$

a spojíme-li oba vzorce,

$$\int_0^\infty x^{m-1} \frac{x-1}{x+1} dx = -2\pi \operatorname{cosec} m\pi, \qquad (6)$$

a podobně pro $n = 2$.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{m}{2}\pi, \qquad \textit{(Cauchy)} \quad (7)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} \sec \frac{m}{2}\pi; \quad \text{(Schlömilch)} \quad (8)$$

pro $m = 1$ jde pak ze vzorce (3)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \quad \text{(Euler)} \quad (9)$$

a pro $n = 4$, $m = 1$ a $m = 3$ pozná se, že

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}; \quad (10)$$

podobně se obdrží se vzorce (5) a (8) pro $m = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = +\pi, \quad \text{(Öttinger)} \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \text{(Euler)} \quad (12)$$

Položíme-li ve vzorci (1) a (2)

$$a = \frac{\pi}{2},$$

obdržíme nový vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{m+n-1}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n} \sec \frac{m}{n}\frac{\pi}{2} \quad \text{(Poisson)} \quad (13)$$

a se vzorcem (3) souhlasící

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n} \operatorname{cosec} \frac{m}{n}\frac{\pi}{2};$$

ze vzorce (13) jde na př. pro $n = 3$, $m = -2, 0, 2$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{(Euler)} \quad (14)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{(Euler)} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}, \qquad \textit{(Euler)} \quad (16)$$

což se i obdrží ze vzorce (3) pro $m = 1, 3, 5$;
z téhož vzorce obdrží se pro $n = 1$ opět

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}\,sec\,\frac{m}{2}\pi$$

a z tohoto konečně, položíme-li

$$x = tg\,\omega,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^m\,\omega\,d\omega = \frac{\pi}{2}\,sec\,\frac{m}{2}\,\pi, \qquad \textit{(Cauchy)} \quad (17)$$

takže na př. pro $m = \frac{1}{2}$ bude

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\,\sqrt{tg\,\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad (18)$$

Položíme-li konečně ve vzorci (1)

$$a = \pi,$$

obdržíme především

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n-1} = -\frac{\pi}{n}\,cot\,\frac{m}{n}\,\pi \qquad \textit{(Mascheroni)} \quad (19)$$

z kteréhožto vzorce jde pro $n = 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x-1} = -\pi\,cot\,m\,\pi, \qquad \textit{(Cauchy)} \quad (20)$$

a taktéž pro $n = 2$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2}\,cot\,\frac{m}{2}\,\pi, \qquad \textit{(Mascheroni)} \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}\,tg\,\frac{m}{2}\,\pi, \qquad (22)$$

z kteréhožto vzorce jde na př. pro $m = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

Derivujeme-li vzorec (2) podlé a a položíme-li pak

$$a = 0,$$

obdržíme nový vzorec

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(x^n + 1)^2} = -\frac{m-n}{n^2} \pi \operatorname{cosec} \frac{m}{n} \pi, \quad \textit{(Ohm)} \tag{24}$$

z něhož jde na př. pro $m = 1$, $n = 2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \textit{(Cauchy)} \tag{25}$$

položíme-li pak

$$a = \pi,$$

obdržíme vzorec podobný

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(x^n - 1)^2} = -\frac{m-n}{n^2} \pi \cot \frac{m}{n} \pi, \tag{26}$$

z něhož jde na př. pro $m = 1$, $n = 4$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} = \frac{3}{16} \pi, \tag{27}$$

pro $m = \frac{3}{2}$, $n = 2$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} dx = + \frac{\pi}{8}. \tag{28}$$

Násobíme-li vzorec (2) da a integrujeme-li pak v mezích α, β, obdržíme především

$$\int_0^\infty x^{m-n-1}\, l \frac{x^{2n} + 2x^n \cos\beta + 1}{x^{2n} + 2x^n \cos\alpha + 1} dx =$$

$$-\frac{2\pi}{m-n} \cdot \frac{\cos(\frac{m}{n} - 1)\beta - \cos(\frac{m}{n} - 1)\alpha}{\sin \frac{m}{n} \pi}, \tag{29}$$

z kteréhožto vzorce jde pro $\alpha = 0$, $\beta = \pi$

$$\int_0^\infty x^{m-n-1}\, l\,\frac{x^n-1}{x^n+1}\,dx = \frac{\pi}{m-n}\cot\frac{m}{n}\,\frac{\pi}{2}; \qquad (30)$$

a z tohoto pro $m = n + 1$

$$\int_0^\infty l\,\frac{x^n-1}{x^n+1}\,dx = -\pi\, tg\,\frac{\pi}{2n} \qquad (31)$$

a tudíž pro $n = 2$

$$\int_0^\infty l\,\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = -\pi; \qquad (32)$$

ze vzorce (30) jde podobně pro $n = 1$

$$\int_0^\infty x^{m-2}\, l\,\frac{x-1}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{m-1}\cot\frac{m}{2}\pi \qquad \text{(Cauchy)} \quad (33)$$

a z tohoto konečně pro $m = n + 2$

$$\int_0^\infty x^n\, l\,\frac{x-1}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{n+1}\cot\frac{n}{2}\pi, \qquad (34)$$

takže pro $n = \frac{1}{2}$ se obdrží

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, l\,\frac{x-1}{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\pi. \qquad (35)$$

Podobným spůsobem bychom mohli derivováním a integrováním za integračním znamením vyvésti ze vzorce (1) nové vzorce a v nich pak za a klásti přiměřené hodnoty zvláštní. čímž bychom obdrželi celou řadu zvláštních integrálů omezených Z několika ukázek těchto jde patrně na jevo, jak z jednotlivého vzorce všeobecnějšího možná rozličnými obraty si zjednati celou řadu vzorců odvozených, které tímto spůsobem jsou vázány v zvláštní celek, jež všeobecnější onen vzorec zastupuje v soustavě vědecké.