Mechanika, matematická fysika a astronomie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 4, 311--340

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122478

5. B sekce:

Mechanika, matematická fysika a astronomie.

O NĚKTERÝCH OTÁZKÁCH Z THEORIE LAGRANGEOVY STRUNY A ROUTHOVY MEMBRÁNY.

JIŘÍ BERÁNEK, Brno.

Viz Spisy přírodovědecké fak. Masarykovy university, Brno, č. **293**.

*

Résumé. — Výtah.

Sur quelques problèmes se rattachant à la théorie de la corde de Lagrange et de la membrane de Routh.

JIŘÍ BERÁNEK, Brno.

Voir les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, No **293**.

ON FIELDS OF FORCES IN WHICH CENTRES OF GRAVITY CAN BE DEFINED.

S. FENYŐ — J. ACZÉL, Budapest.

Cf. Hungarica Acta Mathematica **I**, 53.

*

Výtah. — Summary.

O silových polích, v nichž je možno definovati těžiště.

S. FENYŐ — J. ACZÉL, Budapest.

Viz Hungarica Acta Mathematica **I**, 53.

NAPJATOST KULOVÉ SKOŘEPINY V OKOLÍ PODPĚRY.

MILOSLAV HAMPL, Praha.

Diferenciální rovnice, jimiž se dá řešiti napjatost kulové skořepiny namáhané osamělou silou, jsou:

$$\vartheta'' + \vartheta' \operatorname{cotg}\varphi - \vartheta \operatorname{cotg}^2\varphi - \nu\vartheta = -\frac{12(1-\nu^2)}{E}\frac{R^2}{\delta^2}\tau,$$

$$\tau'' + \tau' \operatorname{cotg}\varphi - \tau \operatorname{cotg}^2\varphi + \nu\tau = E\vartheta.$$

Přitom značí:

φ úhel mezi radiálným směrem osamělé síly a proměnlivým bodem na kouli;
ϑ elastická změna úhlu φ následkem ohybu (positivní, když φ roste);
τ střední smykové napětí působící v řezu rovnoběžkové kružnice ve směru radiálním (kg/cm²);
R střední poloměr kulové nádoby (cm);
δ tloušťka kulové nádoby (cm);
E modul pružnosti v tahu (kg/cm²);
ν reciproká hodnota Poissonovy konstanty ($\nu \doteq 0{,}3$).

Akcenty značí derivace podle neodvisle proměnné φ;
Q osamělá radiální síla působící v polu $\varphi = 0$ (kg);
σ_1 střední napětí v meridiánu; σ_{B_1} ohybové napětí v meridiánu;
σ_2 střední napětí v šířkové kružnici; σ_{B_1} ohybové napětí v šířkové kružnici.

Poněvadž nás zajímá napjatost pouze v blízkosti pólu, kde působí osamělá síla Q, tedy pro malé hodnoty φ, můžeme předpokládati $\varphi^2 \ll 1$ a tedy

$$\operatorname{cotg}\varphi \to \frac{1}{\varphi}.$$

Pak příslušné diferenciální rovnice se zjednoduší na tvar

$$L(\vartheta) - \nu\vartheta = -\frac{12(1-\nu^2)}{E}\frac{R^2}{\gamma^2}\tau,$$

$$L(\tau) + \nu\tau = E\vartheta,$$

kde značí

$$L(\vartheta) = \vartheta'' + \frac{1}{\varphi}\vartheta' - \frac{1}{\varphi^2}\vartheta.$$

Eliminací ϑ z těchto rovnic dostaneme

$$L^2(\tau) + 4k^4\tau = 0,$$

kde

$$4k^4 = \frac{12(1-\nu^2)R^2 - 4\nu^2\delta^2}{\delta^2} \doteq \frac{12(1-\nu^2)R^2}{\delta^2}.$$

Zavedeme-li novou neodvisle proměnnou $x = \sqrt{2}k\varphi$, dostane tato rovnice tvar

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\tau}{dx} + \tau\left(\pm i - \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Její řešení je

$$\tau = C_1 \Re e I_1(x\sqrt{i}) + C_2 Im I_1(x\sqrt{i}) + C_3 \Re e H_1(x\sqrt{i}) + C_4 Im H_1(x\sqrt{i}),$$

kde I_1 je Besselova cylindrická funkce řádu 1, H_1 Hankelova funkce řádu 1. Poněvadž nás nezajímají funkce, které s rostoucím φ resp. x rostou do nekonečna, odpadnou funkce I_1, tedy $C_1 = C_2 = 0$.

Pro jednoduchost budu v dalším značit

$$H_1(x\sqrt{i}) = A_1(x) + iB_1(x)$$

resp.

$$H_0(x\sqrt{i}) = A_0(x) + iB_0(x).$$

Integrační konstanty se určí z podmínek:

1. V pólu $\varphi = 0$, $x = 0$ je $\vartheta = 0$, tedy tečná rovina koule nemění svůj směr.

2. Napětí působící na obvodě malé kružnice se středem v pólu jsou v rovnováze s osamělou silou Q.

S těmito podmínkami dostaneme konečně pro jednotlivá napětí následující Geckelerovo řešení:

$$\tau = \frac{kQ}{4R\delta}(A_1 + B_1),$$

$$\sigma_1 = -\frac{k^2Q}{R\delta}\left\{\frac{1}{\pi x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}x}(A_1 + B_1)\right\} = QU(x),$$

$$\sigma_2 = \frac{k^2Q}{R\delta}\left\{\frac{1}{\pi x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}x}(A_1 + B_1) - \tfrac{1}{2}A_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu}{4\sqrt{2}k^2}\left[\frac{1}{x}(A_1 - B_1) + \sqrt{2}B_0\right]\right\} = QV(x),$$

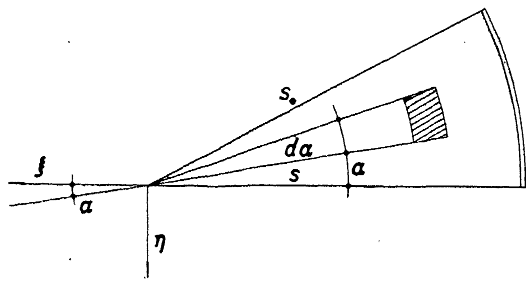
$$\sigma_{B_1} = -\frac{3}{2}\frac{Q}{\delta^2}\left\{B_0 + \frac{1-\nu}{x\sqrt{2}}(A_1 - B_1)\right\} = QU_B(x),$$

$$\sigma_{B_2} = -\frac{3}{2}\frac{Q}{\delta^2}\left\{\nu B_0 - \frac{1-\nu}{x\sqrt{2}}(A_1 - B_1)\right\} = QV_B(x).$$

V praxi se obyčejně nejedná o působení osamělé síly v bodě, nýbrž o tlak rozložený na plošce konečné velikosti. Předpokládejme, že tento tlak je konstantní na celé podpěrné ploše. Pokud jsou rozměry podpěry malé proti R, můžeme ji pokládati za rovinnou. Je-li tvar této plochy kruhová výseč, dá se stanoviti napjatost v jejím středu takto: Označme

ξ směr jednoho ramene výseče se středovým úhlem α_0, směr kolmý buď η. Plošný element ve vzdálenosti s je zatížen konstantním tlakem q, resp. silou qs ds dα. Napětí ve směru průvodiče jsou dříve odvozená Geckelerova napětí, kde místo síly Q nutno psáti sílu qs ds dα. Napětí ve směru osy ξ, resp. η pak budou podle známých formulí:

$$(\sigma_\xi) = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha,$$
$$(\sigma_\eta) = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha,$$
$$(\tau_{\xi\cdot\eta}) = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha.$$



Obr. 1.

Výsledná napětí vzniklá tlakem q na celou plochu výseče pak budou dána integrály přes celou výseč.

Poněvadž vzdálenost $s = R\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{2k}}\, x$, bude diferenciál plochy

s ds d$\alpha = \dfrac{R^2}{2k^2}\, x$ dx dα a tedy výsledná napětí budou:

$$\sigma_\xi = \frac{qR^2}{2k^2} \int\!\!\int_{\triangleleft} \{U(x) \cos^2\alpha + V(x) \sin^2\alpha\}\, x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\alpha,$$

$$\sigma_\eta = \frac{qR^2}{2k^2} \int\!\!\int_{\triangleleft} \{U(x) \sin^2\alpha + V(x) \cos^2\alpha\}\, x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\alpha,$$

$$\tau_{\xi,\eta} = \frac{qR^2}{2k^2} \int\!\!\int_{\triangleleft} \{U(x) - V(x)\} \sin\alpha \cos\alpha\, x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\alpha.$$

Podobné formule platí i pro ohybová napětí (index B). Na základě formulí pro integráty cylindrických funkcí dostaneme snadno:

$$\int_0^x (U + V)x \,\mathrm{d}x =$$

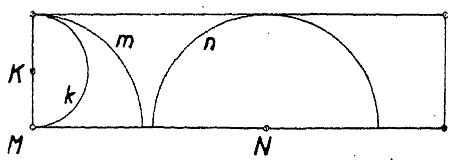
$$- \frac{k^2}{R\delta} \left\{ \frac{x}{2} \frac{A_1 + B_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} - \frac{\nu}{2k^2} \left[\frac{1}{2} A_0 - \frac{1}{4} + \frac{x}{2} \frac{A_1 - B_1}{\sqrt{2}} \right] \right\},$$

$$\int_0^x (U - V)x\,dx = \frac{k^2}{R\delta}\left\{\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\log\frac{\gamma x}{2} + B_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{2}\,\frac{A_1 + B_1}{\sqrt{2}} - \frac{\nu}{2k^2}\left[\frac{1}{2}A_0 - \frac{1}{4} + \frac{x}{2}\,\frac{A_1 - B_1}{\sqrt{2}}\right]\right\},$$

$$\int_0^x (U_B + V_B)x\,dx = \frac{3(1+\nu)}{\delta^2}\,\frac{x}{2}\,\frac{A_1 - B_1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^x (U_B - V_B)x\,dx = \frac{3(1-\nu)}{\delta^2}\left\{\frac{x}{2}\,\frac{A_1 - B_1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}A_0 - \sqrt{2}\right\}.$$



Obr. 2.

Abychom zjistili napjatost v hlavních bodech obvodu obdélníkové podpěry, rozdělíme si ji na půlkruhy resp. čtvrtkruhy a pomocí odvozených formulí můžeme počítati namáhání v jednotlivých bodech K, M, N. praxi tento výpočet je dostatečně přesný a dá se upraviti do přehledných diagramů.

*

Summary. — Výtah.

The stresses in a spherical shell in the neighbourhood of support.

MILOSLAV HAMPL, Praha.

In this paper the GECKELER'S solution which holds good for the point-support is extended to the case of supports of finite area. For a support in the shape of a circular sector, the normal and bending stresses at the centre of the circle are presented in tables and diagrams, as functions of a single dimensionless variable. For supports of other shape than sectorial, we can derive the stresses at certain points by dividing the area of support approximately into circular sectors.

SUR UN SYSTÉME D'ÉLÉMENTS CANONIQUES.

WLADIMÍR W. HEINRICH, Praha.

L'emploi des éléments canoniques en Mécanique céléste, est très apprécié par les astronomes. C'est surtout par l'élégance des opérations mathématiques qu'ils se recommandent. Une autre raison est la clarté et l'ordre parfait introduits dans tout le schèma du calcul.

Le premier à les employer d'une manière importante fut CHARLES DELAUNAY. Ce savant géomètre n'a pas hésité — dans sa Théorie du mouvement de la Lune — à effectuer 497 opérations canoniques en vue de réaliser autant de variations pénibles des arbitraires. On ne saurait trop admirer la patience de l'auteur, qui a consacré plus de vingt années de sa vie à l'exécution materielle des calculs algébriques qu'il effectua tout seul. Leur détail remplit 882 pages in quarto (Mémoires de l'Académie des Sciences, XXVIII (1860) — XXIX (1867).

DELAUNAY choisit comme variable angulaire, principale, l'anomalie moyenne (la vitesse angulaire).

Bien des années plus tard, le géomètre italien T. LEVI-CIVITA (Annali di matematica pura ed applicata, XX, 1913 — construisit d'autres éléments canoniques, utilisant pour variable angulaire principale l'anomalie excentrique.

Enfin G. W. HILL dans un problème particulier de la Mécanique céléste (Astron. Journal, XXVII (1913)) a choisi pour élément principal l'anomalie vraie.

J'ai publié, il y a bien des années (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohème 1932, III, (1934)) une méthode générale qui permet de trouver de tels éléments d'une façon systématique, les produisant en masse à l'exemple d'une fabrique. L'avantage de la méthode consiste surtout dans la manière quasi-mécanique avec laquelle s'opère la justification géométrique ou mécanique des nouvelles constantes. Il est pour ainsi dire inutile de réfléchir. Et grâce à cet artifice l'analyse peut pénétrer assez souvent plus loin que de coutume.

„C'est comme une machine aux rouages savamment combinés qu'on appliquerait presque indéfiniment pour broyer un obstacle fragment par fragment.“ (TISSERAND, Théorie de la Lune, III, 232. Méc. cél.)

C'est ainsi que j'ai réussi à retrouver non seulement les éléments de Delaunay, mais encore les équations de Lévi-Civita — ces dernières sous la forme généralisée.

Dans la présente note je vais établir le système où l'on adopte l'anomalie vraie comme élément angulaire principal, et je vais généraliser les équations canoniques correspondantes. Considérons le problème du mouvement des planètes. En admettant qu'on a intégré le problème simplifié du soleil et d'une planète unique — nous allons essayer d'effectuer la variation des arbitraires du problème complet.

Dans le Mémoire susmentionné j'ai profité de la remarque suivante:

La plupart des problèmes partiellement intégrés fournissent les coordonnées finales, orthogonales, scalaires ou angulaires sous forme de séries multiples périodiques de WEIERSTRASS-FOURIER. Les arguments de ces séries sont fonctions linéaires des multiples des variables angulaires, ces dernières étant elles-mêmes des fonctions linéaires du temps. Les coefficients des termes trigonométriques sont toujours des constantes, car elles font intervenir uniquement des variables scalaires. Si les coordonnées ne sont pas trouvées sous forme explicite, elles admettent presque toujours un tel développement.

Ainsi chaque coordonnée rectangulaire (x) ou scalaire (q) s'écrit:

$$\left.\begin{matrix} x \\ q \end{matrix}\right\} = b_0 + \Sigma b \cos\omega, \quad \omega = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3, \; m_k \text{ entiers } u_k = n_k t + h_k,$$

et la coordonnée angulaire:

$$\varphi_k = u_k + \Sigma c \sin\omega$$

b_k, c_k sont fonctions de quantités uniquement scalaires.

J'appellerai les arguments u_k ,,dernières coordonnées de Lagrange". Dans notre cas particulier je vais choisir pour ces variables l'anomalie vraie (v), la distance de périhélie du noeud (ω) et la longitude du noeud (Θ).

En employant la notation, d'ailleurs coutumière, du Mémoire cité plus haut (Soc. Royale, 1932) on trouvera immédiatement

$$T + U = A_0 + \Sigma A \cos\omega,$$

U étant fonction des forces, T la force vive.

Les équations canoniques s'écrivent alors

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{1}$$

$$H = \Sigma \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - U - \mu R,$$

où R est la fonction perturbatrice, μ petit paramètre la forme différentielle équivalente de Pfaff étant:

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \mathrm{d}v + \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \mathrm{d}\omega + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} . \mathrm{d}\Theta - \\ -\left(\dot{v} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} + \dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} + \dot{\Theta} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} - T - U - \mu R\right) \mathrm{d}t = \mathrm{d}P. \end{gathered} \tag{2}$$

Les équations qui intègrent le problème partiel donnent pour $\mu = 0$,

$$x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta = r\cos v\,(\cos\Theta\cos\omega - \sin\Theta\sin\omega\cos i) - $$
$$- r\sin v\,(\cos\Theta\sin\omega + \sin\Theta\cos\omega\cos i),$$
$$y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta = r\cos v\,(\sin\Theta\cos\omega + \cos\Theta\sin\omega\cos i) - $$
$$- r\sin v\,(\sin\Theta\sin\omega - \cos\Theta\cos\omega\cos i),$$
$$z = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta = r\cos v\sin\omega\sin i$$
$$+ r\sin v\sin i\cos\omega,$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad p = a(1-e^2), \quad \xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v, \quad \zeta = 0,$$

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2,$$

$$\dot\xi^2 + \dot\eta^2 = (\xi'^2 + \eta'^2)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2, \quad \dot\xi = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, \quad \dot\eta = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \quad \xi' = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}v}, \quad \eta' = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}v}$$

$$\xi\dot\eta - \eta\dot\xi = (\xi\eta' - \eta\xi')\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

L'intégrale des aires s'écrit

$$r^2\,\mathrm{d}v = k\sqrt{\mu_1}\sqrt{p}\,\mathrm{d}t, \quad \mu_1 = 1 + m. \tag{3}$$

L'intégrale de Jacobi du problème partiel donnera

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \dot\xi^2 + \dot\eta^2 = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)k^2\mu_1, \quad U = \frac{k^2\mu}{r},$$

$$T = U - \frac{k^2\mu_1}{2a} = k^2\mu_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right), \quad T + U = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{2a}\right)k^2\mu_1,$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)^2 T = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right)^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)k^2\mu_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot v} = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\}\,\dot v = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)k^2\mu_1\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot v} = \frac{r^2}{k\sqrt{\mu_1}\sqrt{p}}k^2\mu_1\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{k\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{p}}\left(2r - \frac{r^2}{a}\right).$$

Considérons la forme différentielle de Pfaff écrite ci-dessus (2) simplifiée en faisant $\mu = 0$. Les équations canoniques (1) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme de Pfaff (2) exprimée en termes périodiques représente une différentielle exacte. Pour effectuer la variation des arbitraires, il suffit de réaliser la scission de cette série multiple-périodique en partie constante (séculaire) et partie périodique, garder la première et ajouter la partie perturbatrice du problème complet c'est-à-dire renfermant $\mu\,R$. Or dans le cas fixé ci-dessus une difficulté surgit. Et en effet pour faciliter la scission, il faut supposer tous les termes de la serie trigonométrique de Weierstrss-Pfaff exprimés en fonction de la même variable, l'anomalie vraie v. Malheuresement, si on y parvient en employant l'équation (2) on détruit du même coup la différentielle totale exacte. C'est pourquoi il faut ajouter aux deux membres de l'équation (2) un terme, évidement differentielle exacte,

$$C\,\mathrm{d}t = C\,\mathrm{d}t,$$

Cétant la constante de l'intégrale de Jacobi $H - C = 0$. Et en effet dans le cas du problème des planètes, les deuxièmes membres des équations canoniques du mouvement ne contiennent pas la variable indépendante et l'on peut toujours profiter de l'existence de l'intégrale bien connue de Jacobi.

$$H - C = 0.$$

Dans ce cas, la forme de Pfaff complète s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}}\,\mathrm{d}\omega + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\,\mathrm{d}\Theta - (H - C)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}P + C\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Ensuite le quatrième terme du premier membre s'annule, de sorte que nous sommes toujours autorisés à multiplier par une variable indépendante quelconque-soit par l'expression (3), soit même par une fonction bien plus compliquée.

Nous allons poser maintenant

$$C = -\frac{k^2\mu_1}{2a_0} + \mu C_1,$$

où a_0 représente une constante *absolue* numériquement égale au grand axe de l'orbite planétaire elliptique. Afin d'effectuer la scission du problème partiel simplifié on pose de nouveau $\mu = 0$.

Alors il n'est pas difficile d'isoler les parties séculaires constantes en se rappelant qu'on aura en général.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\right] = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}\,\mathrm{d}u_1,\ \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \text{ etc.}$$

On trouve facilement

$$\left[T + U\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right] = \frac{3}{2}\,na^2, \quad [T - U] = -\frac{k^2\mu_1}{2a} = -\frac{n^2a^2}{2},$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\right] = \left[\frac{r^2}{k\sqrt{\mu_1}\sqrt{p}}\right] = \frac{1}{n}, \quad a^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{d}v = na^2\sqrt{1-e^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v.$$

$[r^2] = a^2\sqrt{1-e^2}$ voir par ex. Brown Planetary theory p 71 (1).

Les moments $\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}}\right]$, $\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right]$ restent constants pour la même raison que l. c. p 19, et le moment

$$\frac{\partial T}{\partial \dot v} = \frac{k\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{p}}\left(2r - \frac{r^2}{a}\right)\text{donnera } \left[\frac{\partial T}{\partial \dot v}\right] = k\sqrt{\mu_1}\sqrt{a} = na^2.$$

De cette manière on va trouver finalement

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}v} = -\frac{\partial H_2}{\partial y_k}, \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{n}n + \left(-\frac{k^2\mu_1}{2a} + \frac{k^2\mu_1}{2a_0}\right)\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial na^2} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}v} = \frac{\partial H_2}{\partial x_k}, \quad H_2 = H - C \text{ poux } \mu = 0$$

et les éléments canoniques

$$x_1 = na^2, \; x_2 = na^2\sqrt{1-e^2}, \; x_3 = na^2\sqrt{1-e^2}\cos i, \; y_1 = v, \; y_2 = \omega, \; y_3 = \Theta.$$

La variation des arbitraires sera donnée par les équations généralisées

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}v} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_k}, \quad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}v} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}.$$

$$\Phi_1 = \left(-\frac{k^2\mu_1}{2a} + \frac{k^2\mu_1}{2a_0}\right)\frac{1}{n} - \frac{r^2}{k\sqrt{\mu_1}\sqrt{p}}\left(\frac{k^2\mu_1}{2a_0} + C + \mu R\right).$$

Et si nous retournons à la variable indépendante originaire t

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_k}, \quad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_k}$$

$$\Phi_2 = \left(-\frac{k_2\mu_1}{2a} + \frac{k^2\mu_1}{2a_0}\right)\frac{k\sqrt{\mu_1}\sqrt{p}}{r^2 n} - (C_1\mu + R\mu).$$

*

Výtah. — Résumé.

O kanonických elementech planetární theorie.

WLADIMÍR W. HEINRICH, Praha.

Autor pomocí zvláštní velmi jednoduché a obecné methody konstruuje elliptické elementy à la Hill — při nichž za jeden úhlový element volena pravá anomalie. V dalším udává zobecnění příslušných pohybových rovnic kanonických na případ, kde též i za neodvisle proměnnou volena anomalie pravá místo obvyklého času.

SUR LA VARIATION DES ARBITRAIRES EN FORME NON CANONIQUE DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE.

WLADIMÍR W. HEINRICH, Praha.

Dans un Mémoire précédent (Král. čes. spol. nauk, Mémoires II, (1934)) j'ai donné une méthode générale de variation des arbitraires dans le cas des équations canoniques du mouvement. Dans ce qui suit je vais étudier la même méthode en forme non canonique de Lagrange.

L'idée principale était de remplacer les équations canoniques par la forme différentielle de Pfaff, qui représente une différentielle exacte.

Justement les équations canoniques du mouvement garantissent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait une différentielle exacte.

On imagine l'expression de Pfaff developpée sous forme d'une série multiple-périodique. Tous les termes particuliers périodiques de cette série constituant une différentielle exacte — il suffira de garder le terme premier, constant, séculaire et d'ajouter la partie non intégrée, perturbatrice.

Si l'on essaie d'appliquer la même méthode au cas des équations non canoniques de Lagrange, on va se heurter à un obstacle. Les équations du mouvement n'expriment plus les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme de Pfaff soit une différentielle exacte.

Heureusement, dans la plupart des cas en question, les coordonnées du problème partiel, qu'on avait réussi à intégrer, sont développées ou bien admettent un dévelopment en série multiple-périodique de Fourier-Weierstrass. Les arguments des termes particuliers trigonométriques sont formés par les fonctions linéaires des multiples des variables angulaires — celles-ci étant — elles mêmes des fonctions linéaires de la variable indépendante (t).

Or il semble avoir échappé à l'attention des géomètres-même à Lagrange et Poincaré, qu'il suffira de choisir ces „fonctions linéaires du temps" pour nouvelles coordonnées généralisées de Lagrange — pour que l'opération entière de la variation des arbitraires se trouve notablement simplifiée. Je vais appeler ces coordonnées, „les dernières coordonnées de Lagrange".

Je rappele que, par exemple, dans le cas du problème des planètes le nombre des crochets de Lagrange — inventés dans le but de la variation des arbitraires — peut être réduit de quinze à trois (Voir aussi H. Fabre: Bul. Astron., X (1937); XI (1938)).

Envisageons les équations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{u}_k} - \frac{\partial(T+U+\mu R)}{\partial u_k} = 0, \tag{1}$$

où T est la force vive, et supposons, comme à l'ordinaire, que la fonction de forces U, ainsi que la fonction perturbatrice R ne renferment pas de vitesses $\dot{u}_k$, μ représente un petit paramètre.

En essayant d'écrire la forme différentielle correspondante de Pfaff

$$\sum \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{u}_k} \mathrm{d}u_k + (T + U + \mu R)\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}P \tag{2}$$

on trouve immédiatement que les conditions pour que cette différentielle soit exacte, seront encore (1) mais leur nombre n'est pas complet. On ne saurait négliger les conditions ultérieures, telles que

$$\frac{\partial}{\partial u_l} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{u}_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{u}_l}. \tag{3}$$

Dans le cas des équations canoniques ces conditions étaient toujours remplies, vu que les moments hamiltoniens, sont toujours indépendants l'un de l'autre et par conséquent les derivées en question disparaissent.

Par contre dans le cas des équations de Lagrange, les deux membres de (3) ne s'annulent pas, en effet Lagrange imagine la force vive exprimée en fonction de u_k, $\dot{u}_k$. Hamilton en fonction de u, $\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} = p_k$. Heureusement, comme je l'ai mentionné plus haut — le développement du problème partiel intégré offre toujours la possibilité de passer aux dernières coordonnées de Lagrange.*)

Or il est aisé de voir que cette fois la théorie de Lagrange et de Hamilton se confondent complètement. Donc rien n'empêche de partir de la forme Pfaff-Hamilton, de lui faire subir la scission en une partie constante, séculaire et l'autre périodique, et de ne garder que la première, en ajoutant comme auparavant la partie perturbatrice.

Ensuite au lieu de considérer la deuxième série des équations canoniques, il vaut mieux opérer avec les dérivées secondes de Lagrange.

Et en effet la forme de Pfaff s'écrit cette fois

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \mathrm{d}u_k - \left(\sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - U - \mu R \right) \mathrm{d}t = \mathrm{d}P$$

d'où il vient, en posant $\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}\right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3\, \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}$ etc.

pour la partie complèment intégrée

$$\sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}\right] \mathrm{d}u_k - \left\{ \sum \dot{u}_k \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}\right] - \left[T + U\right] \right\} \mathrm{d}t = \mathrm{d}[P_1].$$

*) Voir l. c. ou la note précédente.

Ensuite, puisque

$$\frac{\partial[T]}{\partial u_k} + \frac{\partial[T]}{\partial[p]}\frac{\partial[p]}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial[T+U]}{\partial u_k} = 0, \quad \left[\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{u}_k}\right]$$

sera complètement indépendant de u_k et par conséquent la condition (3) se trouve toujours remplie. C'est ainsi que la première série des équations canoniques définissant les moments va coïncider avec les équations de Lagrange et nous alons trouver la lois de variation des arbitraires sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}\right] = \frac{\partial(\mu R)}{\partial u_k}.$$

Pour résoudre les équations de Lagrange on emploie souvent la methode de CHRISTOFFEL. Nous allons trouver, en employant la notation habituelle

$$2T = \sum a_{ij}\, u_i\, u_j, \quad a_{ik} = [a_{ik}] + \sum a'_{ik} \cos\omega$$

$$\sum\left\{a_{\varrho\tau}\ddot{u}_\tau + \sum \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\varphi q_\sigma}\dot{u}_\sigma \dot{u}_\tau\right\} - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial u_\varrho}\dot{u}_\sigma\dot{u}_\tau = Q_\varrho,$$

$$\ddot{u}_\tau + \sum \begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \nu\end{Bmatrix} \dot{u}_\sigma\, \dot{u}_\tau = Q_\varrho \alpha_{\varrho\nu}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \nu\end{Bmatrix} = \sum_\varrho a_{\varrho\nu}\begin{bmatrix}\sigma\tau\\ \varrho\end{bmatrix}, \quad \alpha_{\varrho\sigma} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial a_{\varrho\sigma}}, \quad \begin{bmatrix}\sigma\tau\\ \varrho\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial u_\tau} + \frac{\partial a_{\varrho\tau}}{\partial u_\sigma} - \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial u_\varrho}\right].$$

Dans le cas que nous avons traité, des dernières coordonnées de Lagrange u_k, tous les symboles DE CHRISTOFFEL disparaissent, puisque les parties constantes-séculaires sont toutes indépendantes des variables u_k.

On prefère cette fois faire passer les dérivées secondes de Lagrange au premier membre, pour obtenir les équations

$$[a_{11}]\ddot{u}_1 + [a_{12}]\ddot{u}_2 + [a_{13}]\ddot{u}_3 = \frac{\partial \mu R}{\partial u_1},$$

$$[a_{12}]\ddot{u}_1 + [a_{22}]\ddot{u}_2 + [a_{23}]\ddot{u}_3 = \frac{\partial \mu R}{\partial u_2},$$

$$[a_{13}]\ddot{u}_1 + [a_{23}]\ddot{u}_2 + [a_{33}]\ddot{u}_3 = \frac{\partial \mu R}{\partial u_3}.$$

Le résultat sera

$$\ddot{u}_k = \frac{1}{D}\sum_\varrho A_{k\nu} Q_\nu, \quad A_{k\nu} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial[a_{k\nu}]}, \quad Q_\nu = \frac{\partial \mu R}{\partial u_\nu}.$$

$$D = \begin{vmatrix} [a_{11}], & [a_{12}], & [a_{13}] \\ [a_{21}], & [a_{22}], & [a_{23}] \\ [a_{31}], & [a_{32}], & [a_{33}] \end{vmatrix}$$

Si alors, en retournant à la forme canonique, nous décidons de choisir pour nouvelles coordonnées-moments, les vitesses elles-mêmes, les coordonnées angulaires canoniques correspondantes vont être transformées par une transformations linéaire contregrédiente.

*

Výtah. — Résumé.

O variaci konstant nekanonických rovnic Lagrangeových.

WLADIMÍR W. HEINRICH, Praha.

Autor podal před lety velmi obecnou methodu variace konstant pohybových rovnic tvaru kanonického. V přítomné stati studuje applikaci téže methody na nekanonickou formu rovnic Lagrangeových.

NOVÉ ÚLOHY O KMITAVÝCH POHYBECH.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ, Brno.

Úvahy o tom, jak se rozděluje energie v kmitajícím pružném tělese mezi jednotlivé jeho hlavní kmity, vedly mne k podrobnému studiu úlohy: vyšetřiti asymptotický pohyb kyvadla, jež je uváděno do pohybu horizontálními nárazy tělísek; při každém nárazu mění se rychlost kyvadla podle zákona, že úhrnná hybnost obou hmot i jejich úhrnná kinetická energie zůstávají zachovány. Při tom se předpokládá, že tělísko dopadá na kyvadlo vždy s toutéž rychlostí a že jednotlivé nárazy následují ve stejných časových intervalech. Energie kyvadla má určitou asymptotickou hodnotu. V dřívější práci[1]) jsem odvodil tuto hodnotu; v přednášce jsem podal nástin důkazu pro dříve uveřejněné vzorce,[2]) kterými se řídí asymptotický pohyb kyvadla.

*

Résumé. — Výtah.

Problèmes nouveaux relatifs aux mouvements vibratoires.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ, Brno.

Les considérations dur la distribution, de l'énergie dans un corps élastique oscillant m'ont amené à étudier en détail la question suivante: déterminer le mouvement asymptotique d'un pendule qui subit une suite de chocs avec des corpuscules qui le frappent suivant une direction

[1]) B. HOSTINSKÝ, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, Brno **282**, (1946).

[2]) B. HOSTINSKÝ, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., **226** (1948), 990.

horizontale fixe; l'effet de chaque choc consiste à changer la vitesse du pendule suivant la loi que la quantité de mouvement totale des deux corps se conserve ainsi que leur énergie cinétique totale. On suppose que le corpuscule ait, avant le choc, toujours la même vitesse et que les chocs suivent l'un à l'autre dans des intervalles de temps égaux. Dans un travail autérieur[1]) j'ai calculé la valeur asymptotique de l'énergie du pendule après un grand nombre de chocs successifs. Je donne la démonstration des formules qui régissent le mouvement asymptotique, publiées en 1948[2].)

O JEDNÉ METHODĚ PRO ANALYSU KMITŮ.

ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno.

Určování složek složeného kmitavého pohybu provádí se nejčastěji FOURIEROVOU harmonickou analysou nebo methodou DALEOVOU nebo methodou LABROUSTOVOU. Určování harmonických složek jest obtížné a usnadňuje se analysátory, určování frekvencí methodou Daleovou nebo methodou Labroustovou vyžaduje velké přesnosti v měření souřadnic bodů křivky, namáhavé početní zpracování a přitom přesnost výsledku neodpovídá namáhavé práci. Tyto methody jsou obtížné i při omezení na kmitavý pohyb složený ze dvou složek. Zde podávám nástin jedné snadné methody pro určování složek složeného kmitavého pohybu, při čemž se omezuji na případ pohybu složeného jen ze dvou jednoduchých kmitavých pohybů.

Všimneme-li si výsledného pohybu složeného ze dvou kmitavých pohybů, můžeme někdy snadněji, někdy obtížněji přímo viděti, jaký průběh má spojnice $2n$-tých bodů obratu. V některých případech se po určitém počtu obratů $(2n)$ pohyb opakuje; pak tyto body leží na rovnoběžce s osou časovou. Jestliže poměr těchto frekvencí poněkud rozladíme, pak tyto body leží na křivce, která se zvětšujícím rozladěním svou periodu zmenšuje. Z těchto vlastností bodů obratu určuji poměr frekvencí. Máme-li na ose časové stupnici v sekundách, můžeme pak určiti frekvence a z toho pak již snadno výpočtem amplitudy a fázové posuny.

Všimněme si proto podmínky, která musí býti splněna, aby nastal bod obratu (tohoto pojmu užívám ve smyslu fysikálním, t. j. označuji jím body maximální výchylky). Ze vztahu

$$y = y_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + y_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2) \tag{1}$$

$$(y_1 > 0,\ y_2 > 0,\ \omega_1 > \omega_2),$$

plyne pro bod obratu podmínka

$$(y_1\omega_1 - y_2\omega_2)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right) =$$
$$= (y_1\omega_1 + y_2\omega_2)\,\mathrm{cotg}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right). \tag{2}$$

U jedné goniometrické funkce vyskytuje se v argumentu $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ a u druhé $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Rozdíl frekvencí vyskytuje se ještě u výsledné amplitudy, kterou můžeme úpravou vztahu (1) psáti ve tvaru

$$y = a\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + \eta\right), \tag{3}$$

$$a = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t + (\varepsilon_1-\varepsilon_2)]}. \tag{4}$$

Pohyb je tedy uzavřen mezi křivkami $y = \pm a$. Též periodicita křivky spojující sousední horní resp. dolní body obratu souvisí s rozdílem frekvencí $\omega_1 - \omega_2$. Příslušnou dobu, za níž se průběh obou těchto křivek opakuje, $\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$ můžeme vždy poměrně snadno nalézti v zaznamenaném výsledném pohybu.

Nyní jest třeba nalézti ještě jeden vztah pro určení poměru frekvencí. Tento vztah mohu odvoditi ze vztahu (2). Zavedu si zde pojem „$2n$-tého bodu z k-tého intervalu", kterým rozumím toto: Jestliže si zvolím jeden bod obratu v minimu proměnné amplitudy, pak $2n$-tý bod obratu je z k-tého intervalu, když časový interval t mezi oběma body splňuje podmínku

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2} \leqq t \leqq \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}.$$

Pokud jsou složeny kmitavé pohyby splňující podmínku $y_1\omega_1 - y_2\omega_2 > 0$, počítáme body obratu podle zaznamenaného výsledného pohybu. Jakmile není tato podmínka splněna — jest to poznati na průběhu křivky — musí býti mezi body obratu vloženy ještě další body, které je třeba počítati jako body obratu, aby mohly býti následující výsledky použity. O tom zde z nedostatku místa nepojednávám.

Jestliže na časový interval mezi $2n$-tými body obratu padne právě k intervalů $\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$, vychází pro poměr frekvencí

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{n-k}; \tag{5}$$

jestliže průměrná vzdálenost t mezi $2n$-tými body obratu vyhovuje podmínce

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \leqq t < k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

(t. j. $2n$-tý bod obratu je z levé části k-tého intervalu), pak leží tyto body obratu na křivce, jejíž perioda je

$$T_{2n}^{(k-)} = \frac{2\pi n}{n\omega_2 - (n - k)\omega_1} \tag{6}$$

a jestliže průměrná vzdálenost t mezi těmito body vyhovuje podmínce

$$k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} < t \leqq \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

(t. j. $2n$-tý bod je z pravé části k-tého intervalu), pak leží tyto body na křivce, jejíž perioda je

$$T_{2n}^{(k+)} = \frac{2\pi n}{(n - k)\omega_1 - n\omega_2}. \tag{7}$$

Určíme-li nyní počet časových intervalů $\dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ připadajících na periodu $T_{2n}^{(k)}$, máme tím nalezen vztah, z něhož můžeme určiti poměr $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$.

Potvrzení těchto výsledků předvedl jsem na řadě případů pro různé poměry frekvencí a amplitud.

*

Résumé. — Výtah.

Sur une méthode pour l'analyse des oscillations.

ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno.

Dans ce travail je présente une méthode facile pour déterminer les composantes d'un mouvement composé de deux oscillations simples. Dans ce but j'emploie des courbes sur lesquelles se trouvent tous les points des $2n$-ièmes élongations maxima.

Les élongations maxima arrivent dans les moments, qui remplissent la condition (2). Alors ces moments dépendent de la différence $\omega_1 - \omega_2$, qui se trouve aussi dans l'expression pour l'amplitude résultante (4) et dans l'expression pour les courbes sur lesquelles se trouvent toutes les élongations maxima supérieures, resp. inférieures. On trouve assez facilement la période de ces courbes $\dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ du mouvement enregistré.

Il faut trouver encore une relation pour déterminer le rapport des fréquences, ce qu'on peut déduire de la relation (2). J'introduis la notion de „$2n$-ième point du k-ième intervalle" dont le sens est le suivant:

si nous choisissons un point quelconque comme premier au minimum de l'amplitude variable, le point de la $2n$-ième élongation maxima se trouve dans le k-ième intervalle, quand l'intervalle t entre ces points remplit la condition $\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \leqq t \leqq \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$. Quand les oscillations remplissent la condition $y_1\omega_1 - y_2\omega_2 > 0$, on peut compter les élongations maxima du mouvement noté. Quand cette condition n'est pas remplie — ce qu'on voit d'après la forme de la courbe — il faut ajouter entre les élongations maxima encore d'autres points, qu'il faut compter comme élongations maxima pour pouvoir employer les résultats suivants. Faute de place on ne donne pas le développement complet.

Si l'intervalle entre les points de $2n$-ièmes élongations maxima est égal à $k \cdot \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, alors le rapport des fréquences est indiqué par le résultat (5). Si l'intervalle moyen t entre les points de $2n$-ièmes élongations maxima remplit la condition $\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \leqq t < k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, les élongations maxima se trouvent sur la courbe avec la période (6) et si cet intervalle moyen remplit la condition $k \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} < t \leqq$ $\leqq \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, les élongations maxima se trouvent sur la courbe avec la période (7). En déterminant le nombre d'intervalles de $\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ compris dans la période $T_{2n}^{(k)}$, on trouve la relation pour déterminer le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

L'affirmation de ces résultats a été démontrée sur une série de cas pour les rapports différents des fréquences et des amplitudes.

K STŘEDOVÝM POHYBŮM JACOBIHO TYPU.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

1. Středovým pohybem typu Jacobiho nazývá se pohyb, jehož zrychlení a lze vyjádřit rovnicí tvaru

$$a = f(\varphi)u^2, \tag{1,1}$$

kde φ je amplituda, u reciproká hodnota průvodiče, to jest $u = \frac{1}{\varrho}$;

$f(\varphi)$ je libovolná funkce amplitudy, vyhovující všem podmínkám, které klade další výpočet. Soustava polárních souřadnic ϱ, φ zvolena tak, že pól soustavy leží ve středu pohybu.

Vzorec Binetův

$$a = -k^2u^2(u + u'') \tag{1,2}$$

udává středové zrychlení v soustavě polárních souřadnic zvolené výše uvedeným způsobem. Akcenty značí derivace reciprokého průvodiče podle amplitudy, to jest $u'' = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$; k je konstanta ploch, to jest $k = \varrho^2\,\dot{\varphi}$ $\left(\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}\right)$.

Spojením rovnic (1,1), (1,2) nalezneme pro dráhu Jacobiho pohybu diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou; v symbolickém tvaru

$$(D^2 + 1)u = -\frac{1}{k^2}f(\varphi) \quad \left(D \equiv \frac{d}{d\varphi}\right). \tag{1,3}$$

Řešení vyžaduje dvě kvadratury:

$$u = -\frac{i}{2k^2}[\exp(-i\varphi)\,(\int\exp(i\varphi)f(\varphi)\,d\varphi + c_1) -$$
$$- \exp(i\varphi)\,(\int\exp(-i\varphi)f(\varphi)\,d\varphi + c_2)]; \tag{1,4}$$

c_1, c_2 jsou integrační konstanty.

2. Reálný tvar rovnice dráhy (1,4) jest

$$\frac{1}{\varrho} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + C_3F(\varphi),$$

kde značí

$$F(\varphi) \equiv \cos\varphi\int f(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi - \sin\varphi\int f(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi;$$

obsahuje tři parametry C_1, C_2, C_3 (dvě integrační konstanty rovnice (1,3) a další parametr související s konstantou ploch), v souhlase s okolností, že dráha je určena jednoznačně třemi počátečními podmínkami (bodem a směrem rychlosti v tomto bodě).

Předpokládejme, že pro daný zákon zrychlení (1,1) nalezli jsme jakýmkoliv způsobem partikulární řešení rovnice (1,3)

$$\frac{1}{\varrho_1} = F(\varphi); \tag{2,2}$$

pak podle (2,1) obecné řešení této rovnice bude míti tvar

$$\frac{1}{\varrho_2} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + C_3F(\varphi). \tag{2,3}$$

Rovnice (2,2), (2,3) ukazují, že o vzájemném vztahu obou drah platí

$$x_2 = \frac{x_1}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3}, \quad y_2 = \frac{y_1}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3}, \tag{2,4}$$

kde $x_1, \ldots, y_2$ jsou pravoúhlé souřadnice bodu dráhy. Těmito rovnicemi je však vyjádřena obecná homologie se středem homologie ve středu pohybu a s osou homologie $C_1x_1 + C_2y_1 + C_3 - 1 = 0$, závislou na parametrech pohybu C_1, C_2, C_3. Tudíž:

Všechny dráhy při daném zákonu zrychlení (1,1) *jsou homologické se středem homologie ve středu pohybu.*

Dále lze říci:

Počáteční podmínky při pohybu daném zákonem (1,1) *jsou ekvivalentní s parametry obecné homologie* (2,4).

3. Věty odst. 2 mají některé důsledky:

a) Je znám středový pohyb Jacobiho typu, při němž existuje algebraická trajektorie. Takovým je pohyb Keplerův $f(\varphi) \equiv \mu$, (μ = konst.), kde jako dráhy nalézáme elipsy. A tedy všechny dráhy středového pohybu o zákonu zrychlení $a = \frac{\mu}{\varrho^2}$ jsou kuželosečky. Tím dokázáno:

Existují středové pohyby, jejichž všechny dráhy jsou algebraické, a počáteční podmínky pohybu zvolíme jakkoliv, a sice téhož stupně.

b) Za střed pohybu volme pól souřadnicové soustavy; nechť polární rovnice

$$\varrho = F(\varphi) \tag{3,1}$$

vyjadřuje libovolnou křivku v této soustavě. Binetův vzorec dává pro zrychlení na takové trajektorii

$$a = \frac{k^2}{\varrho^2}\left[\frac{F''(\varphi)}{F^2(\varphi)} - 2\frac{F'^2(\varphi)}{F^3(\varphi)} - \frac{1}{F(\varphi)}\right], \tag{3,2}$$

tedy výraz tvaru $a = \frac{k^2}{\varrho^2} f(\varphi)$, který obsahuje parametr k. To znamená:

Libovolnou křivku lze považovat za dráhu středového pohybu typu Jacobiho, a sice nekonečně mnoha způsoby.

Přiřkněme parametru k význam konstanty ploch; pak křivka (3,1) je jednou z drah. Tudíž dále:

Nejobecnější pohyb příslušný k zákonu (3,2) *obdržíme z křivky*

$$\sqrt{x^2 + y^2} - F\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = 0$$

všemi homologiemi

$$x = \frac{\grave{x}}{C_1\grave{x} + C_2\grave{y} + \frac{1}{k^2}}, \quad y = \frac{\grave{y}}{C_1\grave{x} + C_2\grave{y} + \frac{1}{k^2}}.$$

c) Nechť křivka (3,1) je algebraická a má charakteristiky ch_1, ch_2, ... (stupeň, rod, ...), které jsou invariantní v homologii (2,4); o úplnosti soustavy těchto charakteristik nečiníme žádných předpokladů. Pak zřejmě platí:

Všechny algebraické křivky o týchž charakteristikách ch_1, ch_2, ..., invariantních vůči obecné homologii, lze pokládat za dráhy téhož středového pohybu (téhož zákona zrychlení) při různých počátečních podmínkách.

Charakteristiky ch_1, ch_2, ... s uvedenou vlastností lze předepsat; tedy jinak:

Pro všechny algebraické křivky o charakteristikách ch_1, ch_2, ... takových, že jsou invariantní vůči obecné homologii, a které považujeme za dráhy středového pohybu pro tentýž střed pohybu, platí tentýž zákon zrychlení.

*

Résumé. — Výtah.

Sur les mouvements centraux du type Jacobi.

ZDENĚK PÍRKO, Praha.

Dans le cas où l'accelération centrale peut être mise sous la forme $a = f(\varphi)u^2$, les orbites du point mobile jouissent de plusieures propriétés, dont quelques-unes sont déduites dans cette communication.

O ASYMPTOTICKÉM POHYBU LAGRANGEOVY STRUNY.

ANTONÍN SYROVÝ, Brno.

Nehmotná struna upevněná mezi dvěma pevnými body nese m hmotných bodů (koulí) $K_1, K_2, \ldots, K_m$ o stejných hmotách μ. Středy těchto koulí dělí strunu na $m + 1$ stejných částí o délce a. Struna je napjata silou S a kmitá příčně v rovině, jež obsahuje její rovnovážnou polohu. Do pohybu je uváděna elastickými rázy s koulí K_0 o hmotě μ_0 ($\mu_0 < \mu$), jež se pohybuje rychlostí u_0 po přímce procházející středem koule K_r a kolmé k rovnovážné poloze struny. Tato přímka leží v rovině, ve které struna příčně kmitá. Při každém rázu získá koule K_r část energie koule K_0 podle zákonů o elastickém rázu. Úlohou je určiti pohyb struny a vypočísti energie vlastních kmitů za předpokladu, že nárazy se opakují periodicky vždy po době τ a že jejich počet roste nade všechny meze.

Označme y_k okamžitou výchylku středu koule K_k z rovnovážné polohy. Jde-li o nekonečně malé kmity kolem rovnovážné polohy struny, pak pohybové rovnice, jež určují veličiny y_k jako funkce času jsou:

$$\mu \ddot{y}_k = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

kde
$$V = \frac{S}{a}\left[\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} y_k y_{k+1}\right]$$
je potenciální energie struny. Zaveďme normální souřadnice z_r $r = 1, 2, \ldots, m$ ortogonální substitucí:
$$y_k = \sum_{r=1}^{m} \varphi_{kr} z_r.$$
Koeficienty φ_{kr} této substituce jsou dány vzorcem:
$$\varphi_{kr} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin\frac{kr\pi}{m+1}, \quad k, r = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$
V těchto nových proměnných mají pohybové rovnice jednoduchý tvar:
$$\ddot{z}_r = -\frac{4S}{a\mu}\sin^2\frac{r\pi}{2(m+1)} z_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$
Řešení těchto rovnic je:
$$z_r = z_r^{(0)} \cos\nu_r t + \frac{1}{\nu_r} v_r^{(0)} \sin\nu_r t, \tag{2}$$
kde $z_r^{(0)}$ a $v_r^{(0)}$ jsou integrační konstanty a ν_r je 2π násobná frekvence r-tého vlastního kmitu. Frekvence ν_r jsou dány vzorcem:
$$\nu_r = 2\sqrt{\frac{S}{a\mu}} \sin\frac{r\pi}{2(m+1)}, \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{2a}$$
Integrační konstanty $z_r^{(0)}$ a $v_r^{(0)}$ lze vyjádřiti pomocí počátečních výchylek $y_k^{(0)}$ a počátečních rychlostí $\dot{y}_k^{(0)}$ hmotných bodů struny takto:
$$z_r^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr} y_k^{(0)}, \quad v_r^{(0)} = \frac{1}{\nu_r}\sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr} \dot{y}_k^{(0)}.$$
Energie E_r r-tého vlastního kmitu je dána vzorcem:
$$E_r = \frac{1}{2}\mu\,\nu_r^2\left(z_r^{(0)2} + \frac{1}{\nu_r^2} v_r^{(0)2}\right). \tag{3}$$

Ze zákonů o elastickém rázu, t. j. že úhrnná kinetická energie a úhrnná hybnost koulí K_0 a K_r se při rázu nemění, lze snadno vypočísti přírůstek rychlosti $g_r^{(j)}$ koule K_r při j-tém nárazu:
$$g_r^{(j)} = \lambda(u_0 - u_r^{(j)}), \tag{4}$$
kde $\lambda = \dfrac{2\mu_0}{\mu + \mu_0}$ a $u_r^{(j)}$ je rychlost koule K_r těsně před j-tým nárazem, t. j. v čase $j \cdot \tau - \varepsilon$, $\lim \varepsilon = 0$. Označme $z_s^{(j)}$ hodnotu normální souřadnice z_s těsně před j-tým nárazem. Dále zaveďme označení: $v_s^{(j)} = \dot{z}_s^{(j)}$. Z rovnic

(2) a (4) plyne, že těsně před $n+1$ nárazem, bude:

$$z_s^{(n+1)} = z_s^{(n)} \cos\nu_s\tau + \frac{1}{\nu_s}\left[v_s^{(n)} + \lambda\left(u_0 - \sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr} v_k^{(n)}\right)\varphi_{rs}\right]\sin\nu_s\tau,$$

$$v_s^{(n+1)} = -\nu_s z_s^{(n)} \sin\nu_s\tau + \left[v_s^{(n)} + \lambda\left(u_0 - \sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr} v_k^{(n)}\right)\varphi_{rs}\right]\cos\nu_s\tau. \qquad (5)$$

Existují-li limity

$$\bar{z}_s = \lim_{n\to\infty} z_s^{(n)} \text{ a } \bar{v}_s = \lim_{n\to\infty} v_s^{(n)},$$

pak tyto limity musí také vyhovovati rovnicím (5). Dostáváme tedy pro tyto limity soustavu $2m$ lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \bar{z}_s &= \bar{z}_s \cos\nu_s\tau + \frac{1}{\nu_s}\left[\bar{v}_s + \lambda\left(u_0 - \sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr}\bar{v}_k\right)\varphi_{rs}\right]\sin\nu_s\tau, \\ \bar{v}_s &= -\nu_s\bar{z}_s \sin\nu_s\tau + \left[\bar{v}_s + \lambda\left(u_0 - \sum_{k=1}^{m} \varphi_{kr}\bar{v}_k\right)\varphi_{rs}\right]\cos\nu_s\tau. \end{aligned} \qquad s = 1, 2, \ldots, m.$$

Řešením tohoto systému dostáváme:

$$\bar{z}_s = \frac{1}{\nu_s}\frac{\lambda u_0}{2-\lambda}\varphi_{rs} \operatorname{cotg}\frac{\nu_s\tau}{2}, \quad \bar{v}_s = -\frac{\lambda u_0}{2-\lambda}\varphi_{rs}.$$

Důkaz, že tyto limity existují, když žádná z period vlastních kmitů není rovna τ, se provede stejnou methodou, jak to učinil prof. Dr B. Hostinský v případě asymptotického pohybu matematického kyvadla uváděného do pohybu elastickými nárazy.

Přejdeme-li zpět k původním souřadnicím, máme pro limitní hodnotu výchylky a limitní hodnotu rychlosti koule K_k, které tato koule nabývá v okamžiku nárazu, bylo-li již těchto nárazů provedeno velmi mnoho:

$$\bar{y}_k = \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{\nu_s}\frac{\mu_0 u_0}{\mu}\varphi_{ks}\varphi_{rs}\operatorname{cotg}\frac{\nu_s\tau}{2}, \quad \bar{\dot{y}}_k = -\sum_{s=1}^{m}\frac{\mu_0 u_0}{\mu}\varphi_{ks}\varphi_{rs}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Pohyb struny, který není periodický, se s rostoucím počtem nárazů asymptoticky blíží periodickému pohybu danému rovnicí:

$$y_k = \frac{\mu_0 u_0}{\mu}\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{\nu_s}\varphi_{ks}\varphi_{rs}\left(\operatorname{cotg}\frac{\nu_s\tau}{2}\cos\nu_s t + \sin\nu_s t\right). \qquad (6)$$

Po velmi velikém počtu nárazů kmitá struna stále na jedné straně od své rovnovážné polohy. Každá koule struny kmitá kolem nové rovnovážné polohy Y_k dané výrazem:

$$Y_k = \text{s. h.}\, y_k = \frac{\mu_0 u_0}{\mu\tau} \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{\nu_s} \varphi_{ks}\varphi_{rs} \int_0^{\tau} \left(\cot g \frac{\nu_s \tau}{2} \cos\nu_s t + \sin\nu_s t\right) dt =$$

$$= \frac{2\mu_0 u_0}{\mu\tau} \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{\nu_s^2} \varphi_{ks}\varphi_{rs}.$$

Energie E_s s-tého hlavního kmitu je po velmi velikém počtu nárazů dána vzorcem:

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0^2 u_0^2}{\mu} \varphi_{rs}^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\nu_s \tau}{2}}. \tag{7}$$

Celková energie není rozdělena mezi jednotlivé vlastní kmity struny rovnoměrně a kromě toho závisí toto rozdělení na délce časového intervalu τ. Kdyby místo jediné koule K_0 naráželo na strunu l koulí o stejných hmotách μ_0 a stejných rychlostech u_0 vždy současně po uplynutí doby τ a kdyby tyto koule narážely na koule $K_{r1}, K_{r2}, \ldots, K_{r_l}$ struny, pak by vzorec (7) měl tvar:

$$E_s = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 u_0^2}{\mu} \left(\sum_{i=1}^{l} \varphi_{r_i s}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\nu_s \tau}{2}}.$$

*

Résumé. — Výtah.

Sur le mouvement asymptotique de la corde de Lagrange.

ANTONÍN SYROVÝ, Brno.

La corde de Lagrange est une corde tendue sans masse dont les extrémités sont fixes. La corde est chargée de m petits corps égaux $K_1, K_2, \ldots, K_m$ placés à distances égales entre eux. Soit μ la masse d'un de ces corps, a la distance $\overline{K_k K_{k+1}}$, S la tension de la corde et y_k le déplacement transversal infiniment petit du corps K_k. Le mouvement de la corde est engendré par des percussions élastiques du corps K_r avec un corps K_0 dont la masse est $\mu_0 (\mu_0 < \mu)$. Ce corps a avant chaque choc la même vitesse u_0. Les percussions se répètent périodiquement avec la période τ. Le problème est de déterminer le mouvement de la corde et de calculer les énergies des vibrations principales, si le nombre de chocs augmente sans limite. Dans ce cas le mouvement de la corde qui n'est pas périodique converge vers le mouvement donné par (6). Dans cette équation ν_s indique la fréquence propre de la s-ième vibration qui est donné par (2a). Les quantités φ_{kr} sont donnés par (1). L'énergie de la s-ième vibration après un grand nombre de chocs est donnée par (7).

VÍCENÁSOBNÉ FOURIEROVY INTEGRÁLY V TECHNICKÝCH VĚDÁCH.

Nekonečná rovinná deska na pružném podkladě. Volné kmity rovinných desek.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Problémy, o něž tu jde, byly spolu s řadou jiných otázek souvisících s Fourierovými integrály otištěny v Elektrotechnickém obzoru, XXXVIII, **23**, **24** a to v článku: V. Vodička, Fourierovy integrály a jejich použití.

*

Résumé. — Výtah.

Intégrales multiples de Fourier dans les sciences techniques. Plaque infinie sur un fondement élastique. Vibrations libres des plaques élastiques.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Voir l'article: V. Vodička, Fourierovy integrály a jejich použití dans le Elektrotechnický obzor, XXXVIII, **23**, **24**.

KOULE S VNITŘNÍMI ZDROJI TEPLA.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Homogenní a isotropní koule s poloměrem r_0 je prohřáta na teplotu $u_0(r)$ a vnořena v okamžiku $t = 0$ do temperaturního pole s konstantní teplotou T_0. Od této chvíle nechť vstoupí uvnitř koule v činnost tepelné zdroje s vydatností $q(r, t)$; ptáme se na výsledné temperaturní rozdělení $u(r, t)$ v kouli za předpokladu, že přechází teplo jejím povrchem do okolí (příslušný koeficient budiž h).

Jsou-li k, c, γ obvyklé fysikální konstanty problému, bude tento formulován rovnicemi

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial f}{\partial \varrho}\right) + \varphi(\varrho, \tau); 0 \leqq \varrho \leqq 1, \tau \geqq 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 0, \ \varrho = 0; \ \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \varkappa f = 0, \ \varrho = 1; \ f(\varrho, 0) = \vartheta_0(\varrho) - w_0;$$

v nich znamená

$$\varkappa = hr_0, \ \varrho = \frac{r}{r_0}, \ \tau = \frac{kt}{r_0^2 c\gamma}; \ \vartheta_0(\varrho) = \frac{r_0^3 c\gamma}{Q} u_0(r), \ w_0 = \frac{r_0^3 c\gamma}{Q} T_0;$$

$$f(\varrho, \tau) = \frac{r_0^3 c\gamma}{Q} [u(r, t) - T_0], \; \varphi(\varrho, \tau) = \frac{r_0^5 c\gamma}{kQ} q(r, t); \tag{2}$$

$$Q = 4\pi c\gamma \int_0^{r_0} r^2 u_0(r) \, \mathrm{d}r.$$

Řešení provádíme methodou Laplaceovy integrální transformace. Pro Laplaceův obraz

$$F(\varrho, p) = p \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\varrho, \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

hledané funkce $f(\varrho, \tau)$ dostáváme zobrazením úlohy (1), (2) tento problém typu Sturm-Liouvilleova:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varrho}\right) - p\varrho^2 F = p\varrho^2 w_0 - p\varrho^2 \vartheta_0(\varrho) - \varrho^2 \Phi(\varrho, p); \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varrho} = 0, \; \varrho = 0; \; \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varrho} + \varkappa F = 0, \; \varrho = 1.$$

Výraz $\Phi(\varrho, p)$ ovšem značí Laplaceův obraz funkce $\varphi(\varrho, \tau)$.

Problém lišící se od úlohy (3) pouze tím, že je pravá strana příslušné diferenciální rovnice nulová, nechť má charakteristické konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a charakteristické funkce $\psi_1(\varrho), \psi_2(\varrho), \ldots$ Řešení úlohy (3) je pak podle elementů Sturm-Liouvilleovy theorie dáno vzorcem

$$F(\varrho, p) = \sum_{n=1}^\infty \frac{p\psi_n(\varrho)}{p + \lambda_n} \int_0^1 \varrho^2 \left[\frac{1}{p}\Phi(\varrho, p) + \vartheta_0(\varrho) - w_0\right] \psi_n(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho$$

a přechodem k původní proměnné τ odtud methodami Laplaceovy transformace dostaneme řešení původního problému (1) ve tvaru

$$f(\varrho, \tau) =$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \psi_n(\varrho) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left\{e^{-\lambda_n \tau} * \int_0^1 \varrho^2 \left[\int_0^\tau \varphi(\varrho, \alpha) \, \mathrm{d}\alpha + \vartheta_0(\varrho) - w_0\right] \psi(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho\right\}; \tag{4}$$

při tom jest obecně

$$g(\tau) * h(\tau) = \int_0^\tau g(\xi) h(\tau - \xi) \, \mathrm{d}\xi. \tag{4,1}$$

Základem dalšího počítání je Greenova funkce $G(\varrho, \sigma)$ diferenciálního výrazu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varrho}\right)$ pro základní interval $0 \leqq \varrho \leqq 1$ a pro okrajové podmínky (3). Její stanovení je lehké a vede pomocí předpisu $K(\varrho, \sigma) = \varrho\sigma G(\varrho, \sigma)$ k souměrnému jádru

$$K(\varrho, \sigma) = \varrho\left(1 + \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\sigma\right),\ \varrho \leqq \sigma;\ K(\varrho, \sigma) = \sigma\left(1 + \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\varrho\right),\ \varrho \geqq \sigma. \quad (5)$$

Jeho charakteristickými konstantami jsou, jak známo, právě veličiny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, kdežto jeho charakteristické funkce $z_1(\varrho), z_2(\varrho), \ldots$ souvisí s funkcemi $\psi_1(\varrho), \psi_2(\varrho), \ldots$ z formule (4) vztahy

$$z_n(\varrho) = \varrho\psi_n(\varrho);\ n = 1, 2, \ldots$$

Pomocí charakteristických konstant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a char. funkcí $z_1(\varrho), z_2(\varrho), \ldots$ jádra (5) lze tedy psáti řešení $u(r, t)$ daného problému (1) ve tvaru

$$u(r, t) = T_0 + \frac{Q}{r_0^2 c\gamma} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} z_n\left(\frac{r}{r_0}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \{e^{-\lambda_n \tau} * \int_0^1 \varrho\, [\int_0^\tau \varphi(\varrho, \alpha)\, \mathrm{d}\alpha + \vartheta_0(\varrho) - w_0] z_n(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho\}. \quad (6)$$

Stanovení konstant λ_n a funkcí $z_n(\varrho)$ se provede řešením Fredholmovy integrální rovnice

$$z(\varrho) = \lambda \int_0^1 K(\varrho, \sigma) z(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma,$$

čili podle obecné theorie Fredholmovy a Sturm-Liouvilleovy řešením diferenciálního problému

$$z''(\varrho) + \lambda z(\varrho) = 0,\ z(0) = 0,\ z'(1) + (\varkappa - 1) z(1) = 0.$$

Vychází

$$z_n(\varrho) = \sqrt{\frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa - \sin^2 \sqrt{\lambda_n}}} \sin \varrho \sqrt{\lambda_n};\ n = 1, 2, \ldots, \quad (7)$$

při čemž jsou $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ nenulové kořeny transcendentní rovnice

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + (\varkappa - 1) \sin \sqrt{\lambda} = 0. \quad (8)$$

Speciální případ,

kdy byla koule původně prohřáta stejnoměrně na teplotu Θ_0 a v okamžiku $t = 0$ vnořena do temperaturního pole s teplotou stále nulovou a kdy není v tělese tepelných zdrojů, je podle obecných úvah charakterisován výsledkem

$$u(r, t) = \frac{2hr_0^2\Theta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}(\sin^2\sqrt{\lambda_n} - hr_0)} e^{-\frac{\lambda_n k t}{r_0^2 c\gamma}} \sin \frac{r\sqrt{\lambda_n}}{r_0}. \quad (9)$$

Tento je odborníkům dobře známý z elementů theorie vedení tepla.

*

Résumé. — Výtah.

Sphère avec des sources calorifiques.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Une sphère homogène et isotrope, de température initiale $u_0(r)$, est mise dans un milieu avec la température constante T_0. À cet instant, les sources calorifiques au débit $q(r, t)$ commencent à échauffer la sphère, dont la surface laisse, avec un coefficient donné, échapper la chaleur dans le milieu voisin.

Il est à trouver la distribution $u(r, t)$ de température dans le solide.

PROBLÉM VEDENÍ TEPLA VE VRSTEVNATÝCH TĚLESECH.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Nekonečně dlouhé těleso se skládá z n koaxiálních cylindrických vrstev s poloměry $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_n < \varrho_{n+1}$. Hledáme průběh teplot $u_i(r, t)$ v jednotlivých vrstvách za těchto předpokladů:

1. V dotykových plochách jednotlivých částí tělesa se mění teploty spojitě.

2. Ani temperaturní tok nevykazuje ve zmíněných plochách žádných nespojitostí.

3. Vnitřní hraniční plocha tělesa nepropouští teplo, vnější hraniční plochou se naproti tomu může teplo šířiti do okolí (počítáme zde s konečným přechodovým součinitelem). O teplotě okolí předpokládáme, že má stále nulovou hodnotu.

4. Počáteční teplota je pro každou vrstvu dána libovolnou integrabilní funkcí polohy $f_i(r)$.

I. Matematická formulace dané úlohy.

Předchozí podmínky a skutečnosti vyjádříme, používajíce běžných označení a zkratek, matematicky takto:

1. *Diferenciální rovnice* pro teplotní funkce $u_i(r, t)$ v jednotlivých vrstvách:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right); \ \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1}; \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

2. *Prostorové podmínky*:

$$u_i(\varrho_{i+1}, t) = u_{i+1}(\varrho_{i+1}, t); \ i = 1, 2, \dots, n-1; \tag{2}$$

$$\lambda_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} \right)_{\varrho_{i+1}} = \lambda_{i+1} \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial r} \right)_{\varrho_{i+1}}; \ i = 1, 2, \dots, n-1; \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{\varrho_1} = 0; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{\varrho_{n+1}} + h(u_n)_{\varrho_{n+1}} = 0. \tag{5}$$

3. *Počáteční podmínky:*

$$u_i(r, 0) = f_i(r),\ \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

II. Postup při řešení.

Partikulární integrály systému (1) budeme předpokládati ve tvaru

$$v_i(r, t) = Y_i(r) e^{-k_i^2 a_i^2 t},\ \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

kde značí

$$Y_i(r) = c_{i1} I_0(k_i r) + c_{i2} N_0(k_i r);\ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{7,1}$$

I_0, N_0 jsou Besselovy funkce nultého řádu, c_{i1}, c_{i2} libovolné integrační konstanty a k_i dosud volné parametry.

Dosazením výrazů (7) do podmínek (2)—(5) dospíváme předně ke vztahům

$$k_{i+1} a_{i+1} = k_i a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{8}$$

a pak k soustavě $2n$ homogenních lineárních rovnic pro určení konstant c_{i1}, c_{i2}; $i = 1, 2, \ldots, n$. Tato soustava obsahuje jediný volný parametr k_1 a podmínka její řešitelnosti pro něj dává složitou transcendentní rovnici s nekonečně mnoha kořeny

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu, \ldots \tag{9}$$

Každý z nich představuje přípustnou hodnotu parametru k_1, z níž pak podle (8) určíme hodnoty $k_2, k_3, \ldots, k_n$. Vyjdeme-li na př. od $\varkappa_\nu$, dostaneme

$$k_{i\nu} = A_i \varkappa_\nu,\ A_i = \frac{a_1}{a_i};\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Vedle toho existuje ke každému členu $\varkappa_\nu$ posloupnosti (9) soustava hodnot $c_{i1}^{(\nu)}, c_{i2}^{(\nu)}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ jakožto řešení výše zmíněného systému homogenních rovnic. Neurčitý multiplikativní faktor společný všem koeficientům $c_{i1}^{(\nu)}, c_{i2}^{(\nu)}$ se určí známým způsobem třeba pomocí normování. Ke každému páru hodnot $c_{i1}^{(\nu)}, c_{i2}^{(\nu)}$ patří pak skupina partikulárních integrálů

$$u_i^{(\nu)}(r, t) = Y_{i\nu}(r) e^{-a_1^2 \varkappa_\nu^2 t},\ \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Y_{i\nu}(r) = c_{i1}^{(\nu)} I_0(A_i \varkappa_\nu r) + c_{i2}^{(\nu)} N_0(A_i \varkappa_\nu r). \tag{11}$$

Obecnou soustavu řešení $u_i(r, t)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ daného problému pak předpokládáme v obvyklém tvaru

$$u_i(r, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu u_i^{(\nu)}(r, t), \quad \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1}; \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

při čemž musí splňovat podle (6) a (11) koeficienty γ_ν soustavu rovnic

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu Y_{i\nu}(r) = f_i(r), \quad \varrho_i \leqq r \leqq \varrho_{i+1}; \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Jádrem celé úlohy pak je odvození orthogonalitních vztahů mezi funkcemi $Y_{i\nu}(r)$. Delší a ne právě jednoduché počítání vede k výsledku

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i^2} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} r Y_{i\mu}(r) Y_{i\nu}(r) \, \mathrm{d}r = 0; \; \mu \neq \nu$$

a z něho dostaneme obvyklým způsobem pomocí (13) hotovou formuli pro γ_ν:

$$\gamma_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i^2} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} r f_i(r) Y_{i\nu}(r) \, \mathrm{d}r}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i^2} \int_{\varrho_i}^{\varrho_{i+1}} r Y_{i\nu}^2(r) \, \mathrm{d}r}; \; r = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Dosadíme-li tento výsledek do vzorců (12), vyjdou nám konečné formule pro hledané temperaturní funkce v jednotlivých vrstvách našeho tělesa.

*

Résumé. — Výtah.

Conduction de la chaleur dans les corps stratifiés cylindriques.

VÁCLAV VODIČKA, Plzeň.

Le problème suivant s'occupe de la conduction de la chaleur dans un cylindre infiniment long, consistant de n couches coaxiales cylindriques aux rayons $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_n < \varrho_{n+1}$ et aux matériaux différents.

On suppose la continuité de température et même du courant de la chaleur dans les surfaces communes des couches et puis une distribution initiale de température, donnée dans chaque partie du corps par une fonction de la position r. La face intérieure du solide est imperméable à la chaleur, qui peut, au contraire, passer (avec un coefficient donné) par la face extérieure. Le milieu autour du solide est supposé à la température constante zéro.